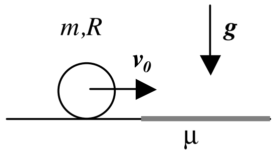
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 20/4/2010

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa m = 3.0 kg e raggio R = 20 cm si trova su un piano orizzontale; una parte del piano è lucidata a specchio e presenta attrito trascurabile, l'altra parte presenta invece attrito sia dinamico che statico, con coefficienti $\mu_S = \mu_D = \mu = 0.50$. A un dato istante il cilindro, che inizialmente si muoveva di pura **traslazione** (senza ruotare) con velocità di modulo v_0 = 3.0 m/s trovandosi nella parte senza attrito, incontra la parte con attrito: si osserva che il cilindro si mette in rotazione e che, passato un certo intervallo di tempo, esso comincia a muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento).



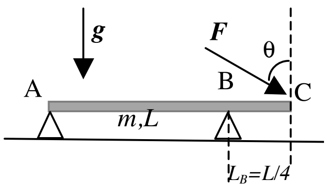
a) Quanto vale la velocità angolare ω' che il cilindro possiede nell'istante in cui inizia il moto di rotolamento puro?

ω' = …………………………………… = …….. rad/s $2v_0/(3R)$ = 10 rad/s [la condizione di rotolamento puro implica una precisa relazione tra velocità del centro di massa, v_{CM}, e quella di rotazione, ω, che si scrive: $\omega = v_{CM}/R$. Le equazioni del moto (traslazionale e rotazionale, scritte nelle componenti orizzontali e assiali, rispettivamente) recitano: $a_{CM} = -F_A/m$ e $\alpha = F_A R/I$, con $F_A = \mu mg$, modulo della forza di attrito e $I = mR^2/2$ momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo. Il moto (sia traslazionale che rotazionale) è uniformemente accelerato e le leggi orarie delle velocità si scrivono: $v_{CM}(t) = v_0 + a_{CM}t$ e $\omega(t) = \alpha t$. Nell'istante considerato deve essere: $v_{CM}(t') = \omega(t')R$, da cui $t' = v_0/(F_A(1/m+R^2/I))$. La soluzione si ottiene semplicemente usando la $\omega' = \omega(t')$ ed eseguendo tutte le sostituzioni e semplificazioni che l'algebra consente. Si ottiene infatti $\omega(t') = \alpha t' = (F_A R/I)v_0/(F_A(1/m+R^2/I)) = (R/I)v_0/(1/m+R^2/I) = v_0(2/(mR))/(1/m+2/m) = v_0(2/R)/3 = 2v_0/(3R)$. – CORRETTO 26/05/2015 – thanks to Simona]

b) Quanto vale il lavoro L_A fatto dalla forza di attrito?

L_A = …………………………………… = …….. J $-(m/6)v_0^2$ = -4.5 J [per il bilancio energetico, si ha $L_A = \Delta E_K = (m/2)v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 - (m/2)v_0^2$, con $v_{CM}' = \omega' R$ per la condizione di rotolamento puro]

2. Una sottile trave **omogenea** di massa m = 3.0 kg e lunghezza L = 2.0 m si trova in equilibrio in direzione orizzontale essendo sostenuta da due appoggi **puntiformi** A e B; come rappresentato in figura, l'appoggio A corrisponde a un estremo della trave, mentre l'appoggio B si trova a distanza $L_B = L/4$ dall'altro estremo della trave. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto valgono, in **modulo,** le forze F_A e F_B che gli appoggi esercitano sulla trave?

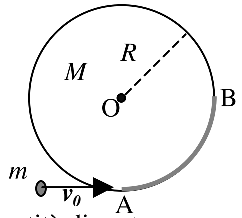
F_A = …………………………….=.......... N $mg/3$ = 9.8 N [la trave è in equilibrio traslazionale e rotazionale. L'equilibrio traslazionale implica, per i moduli: $F_A+F_B = mg$. L'equilibrio rotazionale, scritto rispetto al polo A, implica: $mgL/2 = F_B 3L/4$, dove abbiamo usato la circostanza che il centro di massa si trova a metà della lunghezza della trave omogenea, mentre la forza F_B ha braccio $3L/4$ rispetto al polo considerato. Si ha dunque un sistema di due equazioni e due incognite che, risolto, fornisce le soluzioni]

F_B = …………………………….=.......... N $2mg/3$ = 20 N [vedi sopra]

b) Ad un certo istante sull'estremo C della trave (vedi figura) viene applicata una forza esterna di modulo F = 80 N orientata come in figura (l'angolo indicato, misurato rispetto alla verticale, vale $\theta = \pi/3$). Quanto vale, in modulo, l'accelerazione angolare α con cui la trave **inizia** a ruotare sull'appoggio B? [Ricordate che $cos(\pi/3)$ = ½ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$; può anche esservi utile il cosiddetto teorema degli assi paralleli, che recita $I = I_{CM} + md^2$, con d distanza fra gli assi paralleli e I_{CM} momento di inerzia per una rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa]

α = …………………………….= .... rad/s^2 $(12/7)(F\cos\theta - mg)/(mL)$ = 3.0 rad/s^2 [in seguito all'applicazione della forza $\boldsymbol{F}$ l'equilibrio viene a mancare e inizialmente la trave esegue una rotazione attorno all'appoggio B, che useremo come polo. Subito all'inizio della rotazione, il contatto all'appoggio A si annulla, e quindi la forza $\boldsymbol{F_A}$ non fa più effetto. La rotazione avviene allora sotto l'effetto del momento della forza peso, che tende a fa ruotare la trave in senso antiorario (rispetto alla figura) e al momento della forza $\boldsymbol{F}$, che fa ruotare la trave in senso opposto. L'equazione del moto rotazionale, tenendo conto dei bracci delle forze considerate rispetto al polo B, recita: $\alpha = (F(L/4)\cos\theta - mg(L/4))/I$. Il calcolo di I, momento di inerzia rispetto al polo B, si può eseguire con il teorema degli assi paralleli, ricordando che, per una sottile trave omogenea, è $I_{CM} = mL^2/12$ e che, nel caso considerato, è $d = L/4$; si ottiene $I = (7/48)mL^2$, da cui la soluzione. Si noti che il segno positivo garantisce che effettivamente la rotazione avviene in senso orario, data la scelta dei segni esplicitata sopra]

3. Una piattaforma ruotante è costituita da un disco omogeneo di massa M = 3.0 kg e raggio R = 50 cm disposto su un piano **orizzontale** e tale da poter ruotare **con attrito trascurabile** attorno al proprio asse geometrico. La piattaforma è inizialmente **ferma**. Sul bordo del disco, per un tratto pari a ¼ del perimetro, è presente un bordo a rilievo: il materiale di cui è costituito questo bordo ha massa trascurabile rispetto a quella del disco, che dunque mantiene caratteristiche **omogenee** (simmetria circolare); inoltre anche lo spessore (in direzione radiale) del rilievo è trascurabile. Un proiettile (puntiforme) di massa $m = M/6$ = 0.50 kg viene "sparato" verso l'estremo A di questo rilievo (vedi figura) avendo inizialmente una velocità orizzontale di modulo v_0 = 9.0 m/s. Il rilievo si comporta di fatto come una guida per il moto del proiettile che, alla fine, fuoriesce dall'estremo B. Nel suo moto il proiettile incontra **attrito trascurabile**, sia rispetto alla guida che rispetto alla superficie del disco.



a) Discutete per benino, in brutta, quali tra le grandezze del sistema (disco+proiettile), energia cinetica, quantità di moto, momento angolare assiale, si conservano nel processo e perché.

Discussione: …………………………………… Nel processo non agiscono forze dissipative, dunque si conserva l'energia meccanica. D'altra parte, non ci sono neppure variazioni di energia potenziale (non ci sono campi conservativi di forze esterne che facciano lavoro), dunque si conserva l'energia cinetica totale del sistema. La quantità di moto palesemente **non** si conserva: se si conservasse, il disco dovrebbe acquistare una velocità di traslazione. La non conservazione è infatti dovuta alla presenza del perno, il quale è in grado di trasferire forze al disco e quindi al sistema. Queste forze esercitate dal perno hanno momento nullo rispetto al perno stesso. Pertanto, pur essendoci forze esterne che rendono il sistema non isolato, il sistema è isolato rispetto ai momenti delle forze (considerando il polo O e limitandosi alle componenti assiali dei momenti), per cui si conserva il momento angolare totale del sistema-

b) Quanto vale la velocità angolare ω acquistata dal disco nell'istante in cui il proiettile raggiunge e lascia l'estremo B della guida?

ω = …………………………………… = ……….. rad/s $v_0/(2R)$ = 9.0 rad/s [per la conservazione dell'energia, deve essere $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2+(I/2)\omega^2$, essendo v il modulo della velocità del proiettile nell'istante considerato e I il momento di inerzia del disco ($I = (M/2)R^2$ come per un disco omogeneo, dato che la presenza del rilievo non modifica la simmetria). Usando la relazione tra le masse riportata nel testo e semplificando opportunamente l'espressione, si trova: $v_0^2 = v^2 + 3\omega^2R^2$. La conservazione del momento angolare assiale rispetto a O implica:

$mv_0R = mvR+I\omega$, dove abbiamo sfruttato il fatto che, nell'istante in cui il proiettile raggiunge l'estremo B della guida, la sua velocità è orientata in direzione tangenziale e quindi il "braccio" della quantità di moto è semplicemente R come all'inizio. Anche qui, con le debite semplificazioni e manipolazioni, si ottiene: $v_0 = v + 3\omega R$. Combinando le due equazioni e risolvendo per ω si ottiene la risposta, dove si è scartata la soluzione banale ω = 0, possibile matematicamente ma fisicamente priva di senso (il proiettile non incide sulla guida)]

4. Una quantità n = 0.200 moli di elio, un gas monoatomico che si può considerare perfetto, compie un ciclo termico consistente della seguente successione di quattro trasformazioni **reversibili**: espansione isoterma A→B, espansione adiabatica B→C, compressione isobara C→D, compressione adiabatica D→A a chiudere il ciclo. Nel punto A del ciclo il gas ha pressione $P_A = 8.31\times10^5$ Pa e volume $V_A = 2.00\times10^{-3}$ m^3. Si sa inoltre che $V_B = 2V_A$ e che $V_C = 16V_A$. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]
   a) In quale punto del ciclo il gas raggiunge la temperatura minore e quanto vale questa temperatura T_{MIN}? [Può farvi comodo notare che $2^{2/5} \sim 1.32$]
   T_{MIN} = ... = ... K $T_D = T_A/(4\ 2^{2/5}) \sim 189$ K [iniziamo con il notare che dalla legge dei gas perfetti è possibile determinare $T_A = P_AV_A/(nR) = 1.00\times10^3$ K. La trasformazione A→B è isoterma reversibile, dunque $T_B = T_A$, mentre $P_B = P_AV_A/V_B = P_A/2$. La trasformazione B→C è un'adiabatica reversibile, per cui $T_C = T_B(V_B/V_C)^{\gamma-1} = T_A(2V_A/(16V_A))^{2/3} = T_A/4$, dove abbiamo ricordato che $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ per un gas perfetto monoatomico. Inoltre è anche $P_C = P_B(V_B/V_C)^\gamma = (P_A/2)(2V_A/(16V_A))^{5/3} = P_A/64$. La trasformazione C→D è un'isobara, per cui $T_D = T_CV_D/V_C = (T_A/4)V_D/(16V_A) = (T_A/64)V_D/V_A$ e $P_D = P_C = P_A/64$. D'altra parte la D→A è un'adiabatica reversibile, per cui $V_D = V_A(P_A/P_D)^{1/\gamma} = V_A(P_A/(P_A/64))^{3/5} = 64^{3/5}V_A$. Dunque deve essere $T_D = (T_A/64)64^{3/5} = T_A\ 64^{3/5-1} = T_A/64^{2/5} = T_A/(32^{2/5}\ 2^{2/5}) = T_A/(4\ 2^{2/5})$, che è dunque la minima temperatura raggiunta dal gas nel ciclo]
   b) Quanto vale l'efficienza η della macchina termica che funziona con questo ciclo? [Può farvi comodo ricordare che $ln2 \sim 0.693$]
   η = ... ~ .... $1+5(1/2^{2/5}-1)/(8ln2) \sim 0.782$ [dalla definizione, si ha $\eta = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}$. Nelle due adiabatiche non c'è scambio di calore e dunque restano da esaminare l'espansione isoterma e la compressione isobara. Per l'isoterma si ha $Q_{AB} = L_{AB} = nRT_Aln(V_B/V_A) = nRT_Aln2$, che è positivo, e dunque questo calore viene assorbito dal gas. Nell'isobara si ha $Q_{CD} = nc_P(T_D-T_C)$, che, sulla base di quanto discusso nella soluzione al quesito precedente, è negativo, essendo $T_D = T_A/(4\ 2^{2/5}) < T_C = T_A/4$. Quindi, tenendo conto che $c_P = 5R/2$, è $\eta = 1 +(nc_P(T_D-T_C))/(nRT_Aln2) = 1 + ((5/2)nR(T_A/(4\ 2^{2/5})-T_A/4))/(nRT_Aln2)$, da cui, sostituendo i vari risultati e rimaneggiando, si ottiene la risposta]
   c) Supponendo che la trasformazione isoterma A→B sia compiuta mantenendo il gas a contatto termico con una quantità m = 100 kg di un metallo con alto punto di fusione che si trova alla temperatura T_A , quanto vale la variazione di temperatura ΔT_M che il metallo subisce in seguito alla trasformazione a cui è sottoposto il gas? [Usate $c = 1.00\times10^3$ J/kg per il calore specifico del metallo; notate che la variazione di temperatura richiesta dovrebbe venirvi molto piccola, praticamente trascurabile. Tuttavia esprimetene il valore!]
   ΔT_M= .... = ...K $P_AV_Aln2/(mc) = 16.6\times10^{-3}$ K [durante il processo, il metallo fornisce al gas una quantità di calore pari a $Q_{AB} = nRT_Aln2 = P_AV_Aln2$, come calcolato sopra. Scrivendo il primo principio per il metallo, un solido che subisce una espansione termica trascurabile, si ha $mc\Delta T_M = Q_{AB}$, da cui la soluzione. La variazione di temperatura è sicuramente trascurabile rispetto a T_A, cosa che vi permette di considerare il metallo come un termostato e dunque di ritenere davvero isoterma la trasformazione!]

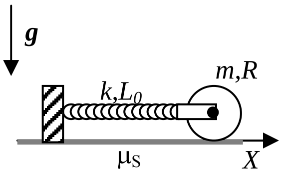
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 20/04/2010 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 20/4/2010

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cilindro pieno e **omogeneo** di massa m = 3.0 kg e raggio R = 20 cm è attaccato, tramite un giogo di massa trascurabile, all'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 60 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m. L'altra estremità della molla è vincolata a un muretto rigido verticale, come rappresentato in figura: l'asse della molla mantiene una direzione orizzontale. Il cilindro si trova su un piano orizzontale scabro che presenta un coefficiente di **attrito statico** μ_S = 0.50; ogni altra forma di attrito nel problema è **trascurabile**. Eseguite su questo sistema un esperimento, consistente nell'elongare di un certo tratto Δ la molla e nel lasciar andare il cilindro con velocità iniziale nulla. [Si ricorda che l'elongazione di una molla è la differenza tra la sua lunghezza attuale e la lunghezza di riposo]



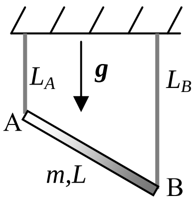
a) Nell'esperimento si osserva che il cilindro si muove di **rotolamento puro** (senza strisciare) solo se l'elongazione è minore di un certo valore Δ_{MAX}. Quanto vale Δ_{MAX}?

Δ_{MAX} = …………………………………… = …….. m $3mg\mu_S/k = 0.735$ m [nella condizione di rotolamento puro si hanno le seguenti equazioni del moto traslazionale e rotazionale (il moto traslazionale è scritto lungo l'asse X di figura): $a_{CM} = -k\Delta/m + F_A/m$; $\alpha = F_AR/I$, con F_A forza di attrito, $I = (m/2)R^2$ momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo e $\alpha = -a_{CM}/R$ per il rotolamento puro (si noti il segno negativo messo nella relazione tra accelerazione angolare e del centro di massa, dovuto al fatto che, nel riferimento considerato, il movimento e dunque l'accelerazione va nel verso negativo e che l'accelerazione angolare è positiva per un moto del centro di massa nel verso positivo). Risolvendo il sistema e dunque supponendo rotolamento puro, si ha $F_A = k\Delta/3$. Vista la geometria, si ha $F_{A,MAX} = \mu_S mg$, da cui la soluzione, che si riferisce proprio alle condizioni in cui l'attrito statico raggiunge il suo massimo valore]

b) Quanto vale il periodo di oscillazione T del centro di massa del cilindro nelle condizioni di cui al quesito precedente (rotolamento puro, elongazione iniziale Δ_{MAX})?

T = …………………………………… ~ …….. s $2\pi(3m/(2k))^{1/2} \sim 1.7$ s [risolvendo il sistema scritto nella soluzione del quesito precedente per a_{CM} si ha $a_{CM} = -(2k/(3m))\Delta$, che è l'equazione del moto di un moto armonico con pulsazione $\Omega = (2k/(2m))^{1/2}$, da cui, ricordando la relazione tra periodo e la pulsazione, la soluzione]

2. Una sottile trave di lunghezza L = 3.0 m, sezione di area S = 20 cm^2 e massa m = 9.0 kg è realizzata con un materiale la cui densità di massa ρ_M è **disomogenea**, e aumenta **linearmente** con la distanza da un estremo (l'estremo A di figura). La trave è in equilibrio nella configurazione di figura, essendo sospesa a un solaio rigido e indeformabile tramite due funi, inestensibili e di massa trascurabile, che hanno lunghezza rispettivamente L_A = 5.0 m e $L_B = L_A + L/2$ = 6.5 m e che hanno direzione verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'acc. di gravità]



a) A quale distanza L_{CM} dall'estremo A si trova il centro di massa della trave? [Spiegate per bene in brutta il procedimento usato]

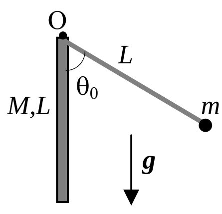
L_{CM} = ……………………………..=.......... m $2L/3 = 2.0$ m [supponiamo di disporre un asse X parallelo alla trave, centrandolo nell'estremo A. L'andamento lineare con la distanza fa sì che la densità di massa sia una funzione della distanza x del tipo: $\rho_M(x) = \rho_0 x/L$, dove ρ_0 è un parametro incognito che ha le dimensioni di una densità di massa. La simmetria del problema è evidentemente piana, dato che la densità di massa dipende solo da una coordinata cartesiana (la x). Dunque l'elemento di volume con cui suddividere la trave si esprime come $dV = Sdx$. Poiché la massa complessiva è m (nota), deve essere $m = \int_{MASSA}\rho_M dV = \rho_0(S/L)\int_0^L x dx = \rho_0 SL/2$, da cui $\rho_0 = 2m/(SL)$. Per la scelta del riferimento che abbiamo fatto e tenendo conto della definizione di posizione del centro di massa, è chiaro che la distanza L_{CM} richiesta è: $L_{CM} = \int_{MASSA}\rho_M dV /m = (\rho_0(S/L)\int_0^L x^2 dx)/m = (\rho_0 SL^3/3) / (\rho_0 SL/2)$, da cui la soluzione. Per quanto riguarda la posizione del centro di massa nelle due dirzioni trasversali, notate che, essendo il sistema a simmetria piana, il centro di massa è collocato sull'asse geometrico della trave. In ogni caso, visto che la trave è molto sottile (le dimensioni trasversali sono trascurabili rispetto alla lunghezza), essa può essere approssimata a un segmento]

b) Quanto valgono, in modulo, le tensioni T_A e T_B delle due funi?

T_A = ……………………………..= .... N. $mg(1-L_{CM}/L) = mg/3 = 29$ N [la trave, che è un corpo rigido, è in equilibrio sia traslazionale che rotazionale. Per i moduli, l'equilibrio traslazionale implica $mg = T_A+T_B$. Per l'equilibrio rotazionale, che scriviamo ad esempio rispetto al polo A, deve essere $mgL_{CM}\cos\theta = T_BL\cos\theta$, dove θ è l'angolo formato dalla trave rispetto all'orizzontale. Tale angolo può essere calcolato dalla trigonometria: infatti, essendo L_B-L_A = $L/2$ si vede facilmente che $\theta = \pi/6$. Tuttavia, essendo verticali le due forze che fanno momento, e dunque comparendo il termine $\cos\theta$ a moltiplicare entrambi i bracci, la sua valutazione è inutile. Risolvendo il sistema delle due equazioni di equilibrio, e usando L_{CM} determinato sopra, si ottiene la soluzione.]

T_B = ……………………………..= .... N. $mgL_{CM}/L = 2mg/3 = 59$ N [vedi sopra]

3. Considerate un sistema costituito da un pendolo e da una sottile sbarra **omogenea**, come rappresentato in figura. Il pendolo è realizzato con una massa puntiforme m = 0.50 kg legata alla fine di un filo inestensibile e di massa trascurabile, che ha lunghezza L = 1.0 m, inchiodato nel punto O e tale da consentire al pendolo di muoversi su un piano verticale. La sbarra, che ha anch'essa lunghezza L = 1.0 m e massa $M = 6m$ = 3.0 kg, .è imperniata ad un suo estremo nello stesso punto O. Tutti i movimenti avvengono con **attrito trascurabile**. Inizialmente la sbarra è nella sua posizione di equilibrio, e la massa puntiforme parte da ferma da una posizione iniziale tale che l'angolo del suo filo rispetto alla verticale, rappresentato in figura, vale $\theta_0 = \pi/3$. Nel suo movimento, la massa puntiforme urta la sbarra in modo **elastico** e di conseguenza la sbarra inizia a ruotare. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\cos(\pi/3) = ½$ e $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Discutete per benino, in brutta, quali tra queste grandezze del sistema (massa puntiforme+sbarra), quantità di moto e momento angolare assiale, si conservano nel processo e perché.

Discussione: …………………………………… La quantità di moto palesemente **non** si conserva: se si conservasse, la sbarra dovrebbe acquistare una velocità di traslazione, mentre invece, come specificato nel testo, essa inizia a ruotare attorno al perno O. La non conservazione è infatti dovuta alla presenza del perno, il quale è in grado di trasferire forze impulsive alla sbarra e quindi al sistema. Queste forze esercitate dal perno hanno momento nullo rispetto al perno stesso. Pertanto, pur essendoci forze esterne che rendono il sistema non isolato, il sistema è isolato rispetto ai momenti delle forze (considerando il polo O e limitandosi alle componenti assiali dei momenti), per cui si conserva il momento angolare totale del sistema.

b) Quanto vale, **subito dopo l'urto**, la velocità angolare ω della sbarra?

ω = ... ~ .... rad/s $v_0/(2L)= (gL)^{1/2}/(2L) = (g/(4L))^{1/2}$ ~ 1.6 rad/s [la massa puntiforme nella sua discesa dalla posizione iniziale fino a quella dell'urto con la sbarra acquista una velocità di modulo v_0 che può essere facilmente determinata con la conservazione dell'energia meccanica: $0 = (m/2)v_0^2-mg\Delta h = (m/2)v_0^2-mgL(1-\cos\theta_0)$, da cui $v_0^2 = gL$ (usando il valore di $\cos\theta_0$). La conservazione dell'energia cinetica totale nell'urto, che scriviamo sapendo che l'urto è elastico, recita: $(m/2)v_0^2 = (I/2)\omega^2 + (m/2)v^2$, essendo $I = ML^2/3$ il momento di inerzia della sbarra sottile omogenea imperniata a un suo estremo e v la velocità della massa puntiforme subito dopo l'urto. Usando le relazioni tra le masse indicate nel testo e semplificando si trova: $v_0^2 = v^2 + 3\omega^2L^2$. La conservazione del momento angolare assiale rispetto al polo O si scrive invece: $mv_0L = I\omega + mvL$, dove abbiamo usato l'ovvia circostanza che, subito dopo l'urto, la massa puntiforme si muoverà nella stessa direzione in cui si muove prima dell'urto, che è quella orizzontale, e dunque il braccio della quantità di moto resta pari a L. Usando anche qui la relazione tra le masse e semplificando, si ottiene $v_0 = v + 3\omega L$. Risolvendo il sistema delle due equazioni rispetto a ω e scartando la soluzione ω = 0, matematicamente possibile ma fisicamente priva di senso per l'esercizio dato, si ottiene la risposta]

4. Una quantità n = 1.00 moli di elio, un gas monoatomico che si può considerare perfetto, compie un ciclo termico consistente della seguente successione di quattro trasformazioni **reversibili**: espansione adiabatica A→B, espansione isoterma B→C, trasformazione isocora (a volume costante) C→D, compressione adiabatica D→A a chiudere il ciclo. Nel punto A del ciclo il gas ha pressione P_A = 8.31x10^5 Pa e temperatura T_A = 500 K. Si sa inoltre che $V_B = 8V_A$ e che $V_C = 16V_A$; inoltre si sa che $P_D < P_C$. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) In quale punto del ciclo il gas raggiunge la temperatura minore e quanto vale questa temperatura T_{MIN}? [Può esservi utile notare che $2^{2/3} \sim 1.59$]

T_{MIN} = ... ~ .... K $T_D = T_A/(4\ 2^{2/3})$ ~ 78.7 K [iniziamo con il notare che dalla legge dei gas perfetti è possibile determinare $V_A = nRT_A/P_A$ = 5.00x10^{-3} m^3. La trasformazione A→B è adiabatica reversibile, dunque $T_B = T_A(V_A/V_B)^{\gamma-1} = T_A/8^{2/3} = T_A/4$, dove abbiamo ricordato che $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ per un gas perfetto monoatomico, mentre $P_B = P_A(V_A/V_B)^\gamma = P_A/8^{5/3} = P_A/32$. La trasformazione B→C è un'isoterma reversibile, per cui $T_C = T_B = T_A/4$. Inoltre è anche $P_C = P_B(V_B/V_C) = (P_A/32)(8V_A/(16V_A)) = P_A/64$. La trasformazione C→D è un'isocora, per cui $T_D = T_CP_D/P_C = (T_A/4)P_D/(P_A/64) = 16\ T_AP_D/P_A$ e $V_D = V_C = 16V_A$. D'altra parte la D→A è un'adiabatica reversibile, per cui $P_D = P_A(V_A/V_D)^\gamma = P_A(V_A/(16V_A))^{5/3} = P_A/16^{5/3}$. Dunque deve essere $T_D = 16\ T_A/16^{5/3} = T_A / 16^{2/3} = T_A/(8^{2/3}\ 2^{2/3}) = T_A/(4\ 2^{2/3})$, che è dunque la minima temperatura raggiunta dal gas nel ciclo]

b) Quanto vale l'efficienza η della macchina termica che funziona con questo ciclo? [Può farvi comodo ricordare che $\ln 2$ ~ 0.693]

η = ... ~ .... $1+(3/(2\ln 2))(1/2^{2/3}-1)$ ~ 0.199 [dalla definizione, si ha $\eta = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}$. Nelle due adiabatiche non c'è scambio di calore e dunque restano da esaminare l'espansione isoterma e la trasformazione isocora. Per l'isoterma si ha $Q_{BC} = L_{BC} = nRT_B\ln(V_C/V_B) = nRT_B\ln 2 = nR(T_A/4)\ln 2$, che è positivo, e dunque questo calore viene assorbito dal gas. Nell'isocora si ha $Q_{CD} = nc_V(T_D-T_C)$, che, sulla base di quanto discusso nella soluzione al quesito precedente, è negativo, essendo $T_D = T_A/(4\ 2^{2/3}) < T_C = T_A/4$. Quindi, tenendo conto che $c_V = 3R/2$, è $\eta = 1 +(nc_V(T_D-T_C))/(nRT_B\ln 2) = 1 + ((3/2)nR(T_A/(4\ 2^{2/3}) -T_A/4))/(nR(T_A/4)\ln 2)$, da cui, sostituendo i vari risultati e rimaneggiando, si ottiene la risposta]

c) Supponendo che la trasformazione isoterma B→C sia compiuta mantenendo il gas a contatto termico con una quantità m = 100 kg di un metallo con alto punto di fusione che si trova alla temperatura T_B , quanto vale la variazione di temperatura ΔT_M che il metallo subisce in seguito alla trasformazione a cui è sottoposto il gas? [Usate c = 1.00x10^3 J/kg per il calore specifico del metallo; notate che la variazione di temperatura richiesta dovrebbe venirvi molto piccola, praticamente trascurabile. Tuttavia esprimetene il valore!]

ΔT_M = ... = ...K $nR(T_A/4)\ln 2/(mc)$ = 7.20x10^{-3} K [durante il processo, il metallo fornisce al gas una quantità di calore pari a $Q_{BC} = nRT_B\ln 2 = nR(T_A/4)\ln 2$, come calcolato sopra. Scrivendo il primo principio per il metallo, un solido che subisce una espansione termica trascurabile, si ha $mc\Delta T_M = Q_{BC}$, da cui la soluzione. La variazione di temperatura è sicuramente trascurabile rispetto a T_A, cosa che vi permette di considerare il metallo come un termostato e dunque di ritenere davvero isoterma la trasformazione!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/04/2010 Firma: