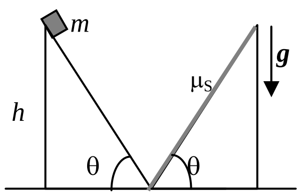
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1/RECUPERO - 22/12/2010

Nome e cognome: …………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

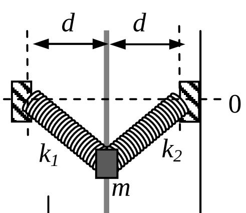
1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R = 10 cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante t_0 = 0 il punto passa per la posizione θ_0 = 0 con velocità angolare ω_0 = 2.0 rad/s e si sa che il punto si arresta dopo aver compiuto due giri completi.
   a) In quale istante t' il punto si arresta?
   t' = …………………………………… = ……… s $8\pi/\omega_0 = 12$ s   [il moto angolare è uniformemente accelerato (decelerato, in realtà, per cui dovrà essere $\alpha<0$), dunque la legge oraria del moto è $\theta(t) = \omega_0 t+\alpha t^2/2$ e quella della velocità angolare è $\omega(t) = \omega_0+ \alpha t$. Due giri vengono compiuti nell'istante t' tale che $4\pi=\omega_0 t'+\alpha t'^2/2$; d'altra parte allo stesso istante deve essere $\omega(t')=0= \omega_0+ \alpha t'$, da cui $\alpha = -\omega_0/ t'$. Sostituendo si ottiene $4\pi=\omega_0 t'-(\omega_0/t')t'^2/2= \omega_0/(2t')$, da cui la soluzione]
   b) Quanto valgono il modulo e la direzione del **vettore** accelerazione $\boldsymbol{a_0}$ nell'istante t_0 = 0? [Esprimete la direzione indicando la tangente dell'angolo ψ_0 che il vettore forma rispetto all'asse X di un riferimento cartesiano costruito "come di consueto"]
   a_0 = …………………………………… ~ ……… m/s^2 $(R\omega_0^2/(4\pi))\ (16\ \pi^2+1)^{1/2} \sim 0.40$ m/s^2 [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_C(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$. Le due direzioni sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_0 = ((a_C(t=t_0))^2+ a_t^2)^{1/2}$. All'istante t_0 la velocità angolare è ω_0 ; inoltre l'accelerazione angolare è dichiaratamente costante e uniforme e il suo valore, tenendo conto di quanto svolto al punto precedente, è $\alpha = -\omega_0^2/(4\pi)$, da cui la soluzione]
   $tg(\psi_0)$ = …………………………………… = ……… $(\alpha R/(-\omega_0^2 R)=-\alpha/\omega_0^2 = 1/(8\pi) = 0.040$ [per determinare l'angolo richiesto si sfrutta la circostanza che $tg(\psi_0)=a_y/a_x$. All'istante t_0=0 la direzione tangenziale coincide con quella dell'asse Y mentre la direzione radiale coincide con l'asse X. Dunque la tangente dell'angolo si può determinare facendo il rapporto tra componente tangenziale e radiale dell'accelerazione (notando, per questa componente, che l'accelerazione centripeta è orientata nel verso negativo della direzione radiale). Da qui la risposta al quesito] il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_C(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$. Le due direzioni sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_0 = ((a_C(t=t_0))^2+ a_t^2)^{1/2}$. All'istante t_0 la velocità angolare è ω_0 ; inoltre l'accelerazione angolare è dichiaratamente costante e uniforme e il suo valore, tenendo conto di quanto svolto al punto precedente, è $\alpha = -\omega_0^2/(4\pi)$, da cui la soluzione]

2. Una piccola cassa (da considerare **puntiforme**!) di massa m = 2.0 kg si trova ferma all'inizio di un "percorso" costituito dalla successione di due piani inclinati fissi e rigidi che formano entrambi un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale e che hanno entrambi un'altezza h = 4.0 m. Il primo piano è perfettamente lucidato e presenta un attrito trascurabile; il secondo ha una superficie scabra e presenta coefficienti di attrito statico μ_S = 0.80 e dinamico μ_D = 0.50. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) A un dato istante, la cassa viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla, scende lungo il primo piano inclinato (quello liscio) e risale per il secondo (quello scabro). Fino a quale altezza h' arriverà? [Misurate tale altezza dal piano orizzontale di appoggio dei piani inclinati lungo la direzione verticale: è un'**altezza**!]
   h' = …………………………………… ~ .... m $2ghsin\theta/(2g(sin\theta+\mu_D cos\theta))=hsin\theta/(sin\theta+\mu_D cos\theta)=h/(1+\mu_D tg\theta) \sim$ 2.1 m   [come si può facilmente dimostrare, la cassa arriva al fondo del primo piano inclinato dotata di una velocità di modulo $v' = (2gh)^{1/2}$ Sul piano scabro la cassa subisce l'attrito dinamico, di modulo $F_{AD} = \mu_D N = \mu_D mgcos\theta$. Dunque la sua equazione del moto, scritta rispetto a un riferimento X orientato verso la sommità del piano inclinato e parallelo a questo, è $a = -g(sin\theta+\mu_D cos\theta)$ e la legge oraria del moto è $x(t) = v't+at^2/2$, mentre la legge oraria della velocità recita $v(t)=v'+at$ (abbiamo posto t_0=0 all'istante in cui la cassa inizia il suo moto di risalita sul secondo piano). L'istante di arresto vale $t_{STOP}=-v'/a$ e lo spazio percorso sul secondo piano vale $x_{STOP} = v't_{STOP}+at_{STOP}^2/2= -v'^2/a+v'^2/(2a)=-v'^2/(2a)$. L'altezza massima si ottiene da considerazioni trigonometriche: $h'=x_{STOP}sin\theta$ e da qui, facendo le debite sostituzioni, si trova la soluzione]
   b) Discutete per benino, in brutta, cosa succede alla cassa dopo che ha raggiunto l'altezza h' di cui sopra, in particolare se essa ridiscende o rimane ferma nella posizione raggiunta.
   Discussione: ……………………………………   nell'istante in cui la cassa si ferma, l'attrito statico diventa il meccanismo rilevante (il nostro modello prevede infatti di distinguere fra attrito statico e dinamico, e quest'ultimo agisce solo finché c'è movimento). La forza di attrito statico vale, al massimo, $F_{AS,MAX}=\mu_S N=\mu_S mgcos\theta$. Affinché la cassa resti ferma, cioè rimanga in equilibrio all'altezza h' dove si è arrestata, occorre che sulla cassa agisca una forza di attrito che si oppone alla componente attiva della forza peso, cioè, in modulo, $F_{AS} = mgsin\theta$. Nelle condizioni del problema, si vede che $F_{AS}/F_{AS,MAX} = tg\theta/\mu_s > 1$, dunque l'attrito statico **non** è sufficiente a mantenere in equilibrio la cassa e questa subito dopo essersi fermata comincia a ridiscendere lungo il piano inclinato scabro.

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle, denominate 1 e 2, che hanno lunghezza di riposo **nulla** (strano, ma vero!) e costanti elastiche rispettivamente k_1 = 10 N/m e k_2 = 22 N/m. Le due molle sono disposte



come in figura: i loro estremi sono agganciati a due pareti verticali, alla stessa altezza tra loro. La distanza (misurata lungo l'orizzontale) tra pareti e guida rigida è d = 1.0 m per entrambi le molle. Inoltre il problema richiede di usare come riferimento l'asse Y di figura, verticale, orientato verso il basso e centrato all'altezza in cui le molle sono agganciate alle pareti (spero che la figura chiarisca, altrimenti chiedete!). [Notate che la figura rappresenta una situazione "generica" e che la coordinata y esprime la posizione generica del manicotto (puntiforme!) lungo la direzione verticale]

a) Come si scrive l'equazione del moto $a(y)$ del manicotto? [Dovete scrivere una funzione della coordinata y e **non** dovete usare valori numerici: indicate i parametri rilevanti del problema con i simboli letterali riportati nel testo!]
   $a(y)$ = …………………………………… $-(k_1+k_2)y/m+g$ [il moto può avvenire solo in direzione Y e le forze che agiscono in questa direzione sul manicotto sono solo quelle dovute alle due molle (le loro componenti verticali) e la forza peso. Dette L_1 e L_2 le lunghezze delle due molle (esse sono in ogni caso sempre estese, essendo praticamente nulla la loro lunghezza di riposo), le due forze elastiche hanno **modulo** rispettivamente k_1L_1 e k_2L_2. Queste forze sono dirette lungo l'asse delle molle e orientate "verso l'alto" e dunque, per determinarne la componente lungo l'asse Y , occorre proiettare lungo l'asse Y. Tale proiezione, che equivale a moltiplicare per il coseno dell'angolo compreso tra asse Y e asse delle molle, con segno negativo per tenere conto del verso, equivale a moltiplicare il modulo della forza per $-y/L_i$ (con $i=1,2$ a seconda della molla considerata). Questo passaggio è reso possibile dalla trigonometria, la quale stabilisce che il coseno dell'angolo che si sta cercando è pari al rapporto tra il cateto y e l'ipotenusa L_i del triangolo i cui vertici sono i punti di aggancio delle molle, il manicotto e l'origine dell'asse. Da qui si ricava la soluzione]

b) Qual è la coordinata y_{EQ} di equilibrio? [Dovete esprimerla rispetto al riferimento dato!]
   y_{EQ} = …………………………………… = ……… m $mg/(k_1+k_2)$ = 0.61 m [all'equilibrio l'accelerazione si annulla e, annullando l'espressione dell'equazione del moto determinata sopra, si trova il valore richiesto]

c) Quanto vale, **all'equilibrio**, il **modulo** della reazione vincolare N che la guida esercita sul manicotto?
   N = …………………………………… = …….. N $|k_2-k_1|d$ = 12 N [il vincolo esercitato dalla guida serve per garantire che il moto del manicotto avvenga lungo la sola direzione verticale. Dunque la guida eserciterà sul manicotto una forza diretta orizzontalmente tale da annullare gli effetti nella stessa direzione delle altre forze, che sono solo quelle elastiche. Scegliendo un asse orizzontale diretto verso la destra della figura, e notando che la proiezione delle forze elastiche in direzione orizzontale implica la moltiplicazione per d/L_i (con il segno opportuno) si ha: $0=N+k_2d-k_1d$, da cui la soluzione]

d) Supponete ora di prendere con la manina il manicotto e di portarlo alla posizione y_0 = 0 (rispetto all'asse indicato!). Quindi all'istante t_0=0 lasciate il manicotto libero di muoversi senza impartirgli alcuna velocità iniziale. A quale coordinata y' si troverà e che velocità v' avrà il manicotto all'istante t' = 0.196 s?
   y' = …………………………………… ~ …….. m $-y_{EQ}\cos(\omega t')+y_{EQ} = y_{EQ}(1-\cos(\omega t'))$~ 0.18 m [a causa della forma dell'equazione del moto determinata prima, il manicotto si muove di moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$. Quindi le leggi orarie di posizione e velocità hanno le forme (generali) $y(t)= A\cos(\omega t+\Phi)+y_{EQ}$ e $v(t)=-A\omega\sin(\omega t+\Phi)$. I valori delle costanti A e Φ si determinano dalle condizioni iniziali che portano facilmente a Φ = 0 e $A = (y_0-y_{EQ})=-y_{EQ}$. Da qui la soluzione]
   v' = …………………………………… ~ …….. m/s $y_{EQ}\omega\sin(\omega t')$ ~ 1.7 m/s [vedi sopra. Notate anche che $\omega t'$~$\pi/4$ per la particolare scelta di t'. Dunque il manicotto sta scendendo (per la prima volta) lungo la guida (il moto è a un ottavo del periodo)]

e) Immaginate a questo punto che **non** sia vero che le molle abbiano una lunghezza di riposo nulla, ma che invece essa valga L_0 (per tutte e due le molle). Riscrivete in brutta l'equazione del moto in queste condizioni e discutete per benino, in brutta, se, e in quali condizioni, il moto può essere considerato armonico.
   Discussione: ………………………… L'equazione del moto si scrive ora: $a(y) = g-((k_1+k_2)/m)y(L-L_0)/L$, dove $L = (y^2+d^2)^{1/2}$ è la lunghezza delle molle (essa è comune alle due molle vista la geometria del sistema). Il moto è ancora perfettamente armonico solo se il termine $(L-L_0)/L$ può essere approssimato con una costante. Infatti L contiene nella sua definizione y e questo crea dei termini chiaramente non armonici nell'equazione del moto. Osserviamo che il termine "incriminato" può essere riscritto come $1-L_0/L$, che è quasi costante se $L_0<<L$, cioè se la lunghezza di riposo delle molle è trascurabile, affermazione che già potevamo immaginare tenendo conto dello svolgimento della prima parte dell'esercizio (in cui L_0 si approssimava a zero). Può però esserci un'altra possibilità: se supponiamo che il manicotto compia solo delle **piccole** oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (che stavolta ha un'espressione diversa rispetto a prima, provate a determinarla), allora possiamo aspettarci che L sia approssimabile (al primo ordine) con L_{EQ}: dunque il termine incriminato tenderebbe a $(1-L_0/L_{EQ})$, che è una costante, e si avrebbe ancora un moto armonico con pulsazione ω ~ $(((k_1+k_2)/m)(1-L_0/L_{EQ}))^{1/2}$. Ovviamente questa affermazione dovrebbe essere trovata in modo più rigoroso, usando appropriatamente lo strumento dello sviluppo in serie di Taylor, che conoscerete al prossimo anno, credo!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 22/12/2010 Firma: