

# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 17/12/2010

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio  $R = 50$  cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante  $t_0 = 0$  il punto si trova fermo nella posizione  $\theta_0 = 0$  e si sa che all'istante  $t_1 = 2.0$  s il punto ha percorso metà giro.

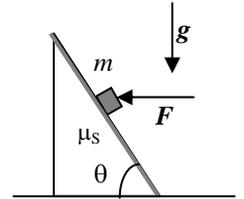
- a) Quanto vale l'istante  $t_2$  al quale il punto avrà percorso un giro completo?

$t_2 = \dots \sim \dots$  s  $2^{1/2} t_1 \sim 2.8$  s [il moto angolare è uniformemente accelerato con partenza da fermo, dunque la legge oraria del moto è  $\theta(t) = \alpha t^2/2$ . Dai dati del problema si ha  $\Delta\theta_1 = \pi = \alpha t_1^2/2$ , da cui si ricava  $\alpha = 2\pi/t_1^2$ . D'altra parte deve anche essere  $\Delta\theta_2 = 2\pi = \alpha t_2^2/2$ , da cui la soluzione]

- b) Quanto vale il **modulo**  $a_2$  dell'accelerazione all'istante  $t_2$ ?

$a_2 = \dots \sim \dots$  m/s<sup>2</sup>  $(2\pi R/t_1^2)(16\pi^2+1)^{1/2} \sim 9.9$  m/s<sup>2</sup> [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo  $a_c(t) = \omega^2(t)R$  che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale  $a_t = \alpha R$ . Le due direzioni sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da  $a_2 = ((a_c(t=t_2))^2 + a_t^2)^{1/2} = R\alpha(\alpha^2 t_2^4 + 1)^{1/2}$ . Sostituendo si ottiene la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa  $m = 2.0$  kg è appoggiata su un piano inclinato che forma un angolo  $\theta = \pi/3$  rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). Sulla cassa agisce una forza esterna  $F$  applicata in direzione orizzontale, come in figura, di modulo  $F = 10$  N. Il piano inclinato è scabro e presenta un coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0.80$ . [Usate il valore  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che  $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ , con  $3^{1/2} \sim 1.7$  e  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ]



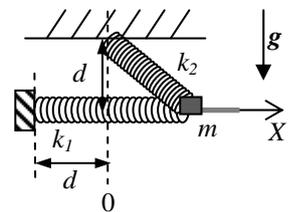
- a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte la cassa rimanga in equilibrio. Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito  $F_A$  in tali condizioni?

$F_A = \dots \sim \dots$  N  $[mg\sin\theta - F\cos\theta] \sim 12$  N [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. Usando un riferimento orientato verso il basso, in questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso (verso il basso), la componente attiva della forza esterna (verso l'alto, dunque comparirà con segno negativo), e la forza di attrito. Tenendo conto delle proiezioni e notando che il problema richiede di determinare il **modulo** della forza di attrito (non ci interessa determinarne il verso), si ottiene il risultato]

- b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alle condizioni di equilibrio di cui al punto precedente.

Discussione: ..... occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza:  $F_A \leq \mu_s N = \mu_s (mg\cos\theta + F\sin\theta)$ , dove abbiamo esplicitato il modulo della reazione vincolare esercitata dal piano (deve bilanciare le componenti del peso e della forza esterna in direzione ortogonale al piano inclinato). Usando i valori numerici dati nel testo (il valore massimo della forza di attrito risulta oltre 14 N) si vede che la disuguaglianza è verificata e dunque l'equilibrio può effettivamente realizzarsi]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m = 2.0$  kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale (asse X). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle, denominate 1 e 2, che hanno lunghezza di riposo **trascurabile** e costanti elastiche  $k_1 = 10$  N/m e  $k_2 = 2k_1 = 20$  N/m. Le due molle sono disposte come in figura: la molla 1 ha il proprio asse in direzione X ed è vincolata a un muretto fisso e indeformabile che si trova a distanza  $d = 1.0$  m dall'origine dell'asse (vedi figura); la molla 2 è invece vincolata a un solaio rigido e indeformabile a una distanza pari a  $d = 1.0$  m rispetto all'asse X. Inoltre la verticale del punto di vincolo della molla 2 cade esattamente sull'origine dell'asse (spero che la figura chiarisca il tutto, altrimenti chiedete!). [Notate che la figura rappresenta una situazione "generica", **non di equilibrio** e che la coordinata  $x$  esprime la posizione generica del manicotto (puntiforme!)]



- a) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto  $x_{EQ}$ , se esiste? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento indicato in figura]

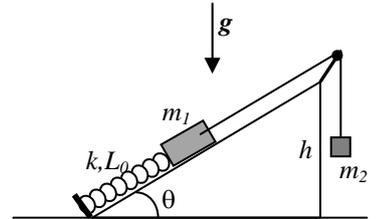
$x_{EQ} = \dots = \dots$  m  $-dk_1/(k_1+k_2) = -0.33$  m [il moto può avvenire solo in direzione X e le forze che agiscono in questa direzione sul manicotto sono solo quelle dovute alle due molle. La molla 1 esercita una forza  $F_1 = -k_1(x+d)$ , avendo osservato che la lunghezza di questa molla è pari proprio a  $x+d$  ( $d$  è positivo e dunque va considerato come un modulo!) e il verso deve necessariamente essere negativo (la molla è sempre estesa, essendo la sua lunghezza di riposo trascurabile). La molla 2 esercita una forza elastica il cui **modulo** è  $k_2 L$ , indicando con  $L = (x^2+d^2)^{1/2}$  la lunghezza della molla (teorema di Pitagora!). Tale forza è diretta lungo l'asse della

molla e dunque la sua componente nella direzione ( $X$ ) di interesse si può calcolare moltiplicando per  $-x/L$  (si tratta del coseno dell'angolo compreso tra l'asse orizzontale e l'asse della molla, e il segno "torna" come potete facilmente verificare, notando che anche in questo caso la molla è sempre estesa). Dunque l'equazione del moto si scrive  $a(x) = (-k_1(x+d)-k_2Lx/L)/m = -(k_1+k_2)/m)x - (k_1/m)d$ . La posizione di equilibrio si trova imponendo  $a(x=x_{EQ})=0$

b) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto (ovviamente se viene perturbato dalla posizione di equilibrio) e in particolare, se si tratta di moto armonico, indicate il valore della pulsazione  $\omega$ .

Discussione: ..... esaminando l'equazione del moto si verifica facilmente che essa ha la forma di un moto armonico. Dunque il manicotto compie oscillazioni armoniche attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione  $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2} \sim 3.9 \text{ rad/s}$

4. Due masse (puntiformi!) di massa rispettivamente  $m_1 = 8.0 \text{ kg}$  e  $m_2 = m_1/2 = 4.0 \text{ kg}$  sono legate fra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile. Come rappresentato in figura (che ovviamente è non in scala), la massa  $m_1$  può muoversi con attrito trascurabile lungo un piano inclinato di altezza  $h = 5.0 \text{ m}$  che forma un angolo  $\theta = \pi/6$  rispetto all'orizzontale mentre la massa  $m_2$  è libera di muoversi in direzione verticale. La massa  $m_1$  è inoltre attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k = 48 \text{ N/m}$  e lunghezza di riposo  $L_0 = 50 \text{ cm}$ , il cui altro estremo è vincolato al "fondo" del piano inclinato (c'è un opportuno muretto costruito a questo scopo). Come mostrato in figura, la fune può scorrere con attrito trascurabile attorno a un perno fisso e la configurazione geometrica è tale che l'asse della molla e il tratto di fune tra massa  $m_1$  e perno sono paralleli al piano inclinato. [Usate il valore  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che  $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ , con  $\sqrt{3} \sim 1.7$  e  $\sin(\pi/6) = 1/2$ ]



a) Il sistema viene perturbato in qualche modo e si osserva che, all'istante  $t_0 = 0$ , la massa  $m_1$  passa per la propria **posizione di equilibrio** avendo una velocità di modulo  $v_0 = 20 \text{ cm/s}$  diretta verso la sommità del piano inclinato. In quale istante  $t'$  la massa  $m_1$  **si ferma** (per la prima volta)? [Cercate di usare un procedimento "svelto" e spiegate bene in brutta!]

$t' = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots \text{ s} \quad T/4 = \pi/(2(k/(m_1+m_2))^{1/2}) = 0.79 \text{ s}$  [per rispondere alla

domanda occorre osservare attentamente che tipo di moto compiono le masse. A questo scopo occorre scrivere le equazioni del moto delle due masse: usando un sistema di riferimento orientato verso l'alto lungo il piano e verso il basso in direzione verticale (questa scelta è la più conveniente dal punto di vista algebrico, ma, ovviamente, è possibile anche usare riferimenti con altre orientazioni), si ha, con ovvio significato dei termini,  $a_1 = -(k/m_1)(L-L_0)-g\sin\theta+T_1$  e  $a_2 = g-T_2$ . Inoltre per come sono stati scelti i riferimenti si ha  $a_1 = a_2$  e, indicando con  $T_1$  e  $T_2$  i moduli della tensione della fune ai due estremi, si ha  $T_1 = T_2$ . Lavorando di algebra, si trova facilmente  $a_1 = a_2 = -(k/(m_1+m_2))L + C$ , dove  $C$  è un coacervo di costanti, tutte sommate tra loro. Quindi occorre notare che la lunghezza della molla  $L$  è legata alle coordinate delle masse, chiamiamole  $x_1$  e  $x_2$  attraverso una somma con termini costanti (lunghezza della fune, ad esempio). In particolare, se si sceglie l'origine del riferimento in corrispondenza della base del piano inclinato si ha  $L=x_1$  (supponendo che  $m_1$  sia puntiforme e che l'intera lunghezza della molla si comporti da elemento elastico, altrimenti ci sarebbero ancora delle costanti). Sia che ci siano o non ci siano delle costanti di mezzo,  $L$  varia assieme a  $x$  e quindi l'equazione del moto indica che esso è di tipo armonico; la pulsazione di questo moto è  $\omega = (k/(m_1+m_2))^{1/2}$ . Alla domanda si risponde facilmente notando che in un qualsiasi moto armonico l'intervallo di tempo necessario da quando si passa per la posizione di equilibrio a quando il sistema si arresta (per la prima volta, il moto è periodico!) è pari a  $T/4$  da cui, ricordando il legame tra pulsazione e periodo, la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, lo spostamento  $\Delta'$  della massa  $m_1$  nell'istante  $t'$  determinato sopra? [Vi si chiede in pratica di individuare la semi-ampiezza dell'oscillazione]

$\Delta' = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots \text{ m} \quad v_0 / ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = 0.10 \text{ m}$  [anche qui non è necessario svolgere i conti dei dettagli dato che basta ricordarsi (se non lo ricordate si può facilmente dimostrare) che in un moto armonico come quello esaminato, che ha soluzione, cioè legge oraria del moto (scritta ad esempio per  $m_1$ , ma per  $m_2$  la scrittura sarebbe la stessa a causa della presenza di una fune inestensibile) del tipo  $x_1(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_{1EQ}$ , le condizioni iniziali del problema impongono, come si può facilmente dimostrare,  $\Phi = \pi/2$  e  $A = -v_0/\omega$ . Questo valore di  $A$ , che è la semi-ampiezza dell'oscillazione, rappresenta proprio la soluzione al quesito]

**Nota:** acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).  
Pisa, 17/12/2010

Firma:

**Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 17/12/2010**

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio  $R = 50$  cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante  $t_0 = 0$  il punto si trova fermo nella posizione  $\theta_0 = 0$ ; si sa che il primo giro viene compiuto all'istante  $t_1 = 1.0$  s.

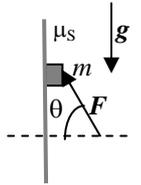
a) Quanto vale, in modulo, la velocità  $v'$  del punto quando esso passa per la posizione  $\theta' = \pi$ ?

$v' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  m/s  $2\pi R(2^{1/2}/t_1) \sim 4.4$  m/s [il moto angolare è uniformemente accelerato con partenza da fermo, dunque la legge oraria del moto è  $\theta(t) = \alpha t^2/2$ . Dai dati del problema si ha  $\Delta\theta_1 = 2\pi = \alpha t_1^2/2$ , da cui si ricava  $\alpha = 4\pi/t_1^2$ . La posizione  $\theta' = \pi$  viene raggiunta all'istante  $t'$  tale che  $\theta' = \pi = \alpha t'^2/2 = 2\pi t'^2/t_1^2$ , cioè  $t' = t_1/2^{1/2}$ . In tale istante la velocità angolare è  $\omega' = \alpha t' = (4\pi/t_1^2)(t_1/2^{1/2}) = 2\sqrt{2}\pi/t_1$ , da cui, ricordando il legame tra modulo della velocità (solo tangenziale, essendo il moto circolare) e velocità angolare, la soluzione]

b) Quanto vale il **modulo**  $a'$  dell'accelerazione che si misura nello stesso istante (quando il punto passa per  $\theta' = \pi$ )?

$a' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  m/s<sup>2</sup>  $(4\pi R/t_1^2)(4\pi^2+1)^{1/2} \sim 40$  m/s<sup>2</sup> [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo  $a_c(t) = \omega^2(t)R$  che ha direzione radiale. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale  $a_t = \alpha R$ . Le due direzioni sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da  $a' = ((a_c(t'))^2 + a_t^2)^{1/2} = R\alpha(\alpha^2 t'^4 + 1)^{1/2}$ . Sostituendo si ottiene la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa  $m = 2.0$  kg è a contatto di una parete verticale rigida e indeformabile che ha una superficie scabra e presenta un coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0.50$ . Sulla cassa agisce una forza esterna  $F$  di modulo  $F = 20$  N, la cui direzione forma un angolo  $\theta = \pi/3$  rispetto all'orizzontale con orientazione "verso l'alto" (vedi figura). [Usate il valore  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che  $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ , con  $3^{1/2} \sim 1.7$  e  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ]



a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte la cassa rimanga in equilibrio. Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito  $F_A$ ?

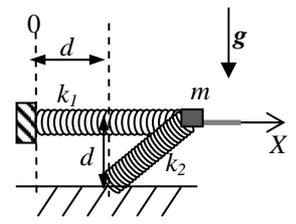
$F_A = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$  N  $|mg - F\sin\theta| \sim 2.3$  N [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella verticale) deve essere nulla. In tale direzione agiscono la forza peso, verso il basso, e la componente verticale della forza esterna, verso l'alto. Tenendo conto delle proiezioni e notando che il problema richiede di determinare il **modulo** della forza di attrito (non ci interessa determinarne il verso, ragione per cui usiamo il valore assoluto della differenza tra le componenti delle forze), si ottiene il risultato]

b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alle condizioni di equilibrio di cui al punto precedente.

Discussione: .....

occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza:  $F_A \leq \mu_s N$ . La reazione vincolare esercitata dalla parete sulla cassa è tale da impedirne il moto in direzione orizzontale, cioè essa è uguale, in modulo, alla somma delle componenti orizzontali delle forze applicate. La sola forza  $F$  ha componente orizzontale  $F\cos\theta$ , per cui la relazione diventa  $F_A \leq \mu_s F\cos\theta$ . Usando i valori numerici dati nel testo (il valore massimo della forza di attrito risulta 5 N) si vede che la disuguaglianza è verificata e dunque l'equilibrio può effettivamente realizzarsi]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m = 2.0$  kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale (asse X). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle, denominate 1 e 2, che hanno lunghezza di riposo **trascurabile** e costanti elastiche  $k_1 = 10$  N/m e  $k_2 = 4k_1 = 40$  N/m. Le due molle sono disposte come in figura: la molla 1 ha il proprio asse in direzione X ed è vincolata a un muretto fisso e indeformabile che si trova all'origine dell'asse di riferimento; come indicato in figura, la molla 2 è invece vincolata a un pavimento rigido e indeformabile a una distanza pari a  $d = 1.0$  m rispetto all'asse X (misurata lungo la verticale) e pari a  $d = 1.0$  m rispetto all'origine (misurata lungo l'orizzontale; spero che la figura chiarisca il tutto, altrimenti chiedetelo!). [Notate che la figura rappresenta una situazione "generica", **non di equilibrio** e che la coordinata  $x$  esprime la posizione generica del manicotto (puntiforme!)]



a) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto  $x_{EQ}$ , se esiste? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento indicato in figura, osservando bene dove è stata posta l'origine 0]

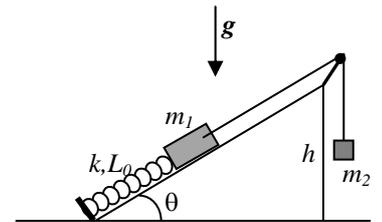
$x_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$  m  $d(k_2)/(k_1+k_2) = 0.80$  m [il moto può avvenire solo in direzione X e le forze che agiscono in questa direzione sul manicotto sono solo quelle dovute alle due molle. La molla 1 esercita una forza  $F_1 = -k_1x$ ,

avendo osservato che la lunghezza di questa molla è pari proprio a  $x$  (nel riferimento indicato) e il verso deve necessariamente essere negativo (la molla è sempre estesa, essendo la sua lunghezza di riposo trascurabile). La molla 2 esercita una forza elastica il cui **modulo** è  $k_2L$ , indicando con  $L$  la lunghezza della molla; tale lunghezza può essere dedotta osservando che essa è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti pari a  $d$  (in verticale) e a  $(x-d)$  (in orizzontale). Applicando Pitagora si ha allora  $L = (d^2 + (x-d)^2)^{1/2}$ . Tale forza è diretta lungo l'asse della molla e dunque la sua componente nella direzione ( $X$ ) di interesse si può calcolare moltiplicando per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse orizzontale e l'asse della molla che, secondo la trigonometria, vale  $(x-d)/L$ . Occorre poi preoccuparsi del segno che deve essere negativo per  $x > d$  e positivo per  $x < d$ . Pertanto la componente orizzontale della forza elastica della molla 2 si scrive, facendo le opportune semplificazioni:  $-k_2(x-d)$ . Dunque l'equazione del moto si scrive  $a(x) = (-k_1x - k_2(x-d))/m = -((k_1+k_2)/m)x + (k_2/m)d$ . La posizione di equilibrio si trova imponendo  $a(x=x_{EQ})=0$

b) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto (ovviamente se viene perturbato dalla posizione di equilibrio) e in particolare, se si tratta di moto armonico, indicate il valore della pulsazione  $\omega$ .

Discussione: ..... esaminando l'equazione del moto si verifica facilmente che essa ha la forma di un moto armonico. Dunque il manicotto compie oscillazioni armoniche attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione  $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = 5.0 \text{ rad/s}$

4. Due masse (puntiformi!) di massa rispettivamente  $m_1 = 8.0 \text{ kg}$  e  $m_2 = m_1/2 = 4.0 \text{ kg}$  sono legate fra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile. Come rappresentato in figura (che ovviamente è non in scala), la massa  $m_1$  può muoversi con attrito trascurabile lungo un piano inclinato di altezza  $h = 5.0 \text{ m}$  che forma un angolo  $\theta = \pi/6$  rispetto all'orizzontale mentre la massa  $m_2$  è libera di muoversi in direzione verticale. La massa  $m_1$  è inoltre attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k = 48 \text{ N/m}$  e lunghezza di riposo  $L_0 = 50 \text{ cm}$ , il cui altro estremo è vincolato al "fondo" del piano inclinato (c'è un opportuno muretto costruito a questo scopo). Come mostrato in figura, la fune può scorrere con attrito trascurabile attorno a un perno fisso e la configurazione geometrica è tale che l'asse della molla e il tratto di fune tra massa  $m_1$  e perno sono paralleli al piano inclinato. [Usate il valore  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che  $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ , con  $3^{1/2} \sim 1.7$  e  $\sin(\pi/6) = 1/2$ ]



a) Il sistema viene perturbato in qualche modo e si osserva che, all'istante  $t_0 = 0$ , la massa  $m_1$  passa per la propria **posizione di equilibrio** avendo una velocità di modulo  $v_0 = 20 \text{ cm/s}$  diretta verso la sommità del piano inclinato. In quale istante  $t'$  la massa  $m_1$  **si ferma** (per la prima volta)? [Cercate di usare un procedimento "svelto" e spiegate bene in brutta!]

$t' \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ s} \quad T/4 = \pi/(2(k/(m_1+m_2))^{1/2}) = 0.79 \text{ s} \quad$  [per rispondere alla

domanda occorre osservare attentamente che tipo di moto compiono le masse. A questo scopo occorre scrivere le equazioni del moto delle due masse: usando un sistema di riferimento orientato verso l'alto lungo il piano e verso il basso in direzione verticale (questa scelta è la più conveniente dal punto di vista algebrico, ma, ovviamente, è possibile anche usare riferimenti con altre orientazioni), si ha, con ovvio significato dei termini,  $a_1 = -(k/m_1)(L-L_0) - g\sin\theta + T_1$  e  $a_2 = g - T_2$ . Inoltre per come sono stati scelti i riferimenti si ha  $a_1 = a_2$  e, indicando con  $T_1$  e  $T_2$  i moduli della tensione della fune ai due estremi, si ha  $T_1 = T_2$ . Lavorando di algebra, si trova facilmente  $a_1 = a_2 = -(k/(m_1+m_2))L + C$ , dove  $C$  è un coacervo di costanti, tutte sommate tra loro. Quindi occorre notare che la lunghezza della molla  $L$  è legata alle coordinate delle masse, chiamiamole  $x_1$  e  $x_2$  attraverso una somma con termini costanti (lunghezza della fune, ad esempio). In particolare, se si sceglie l'origine del riferimento in corrispondenza della base del piano inclinato si ha  $L = x_1$  (supponendo che  $m_1$  sia puntiforme e che l'intera lunghezza della molla si comporti da elemento elastico, altrimenti ci sarebbero ancora delle costanti). Sia che ci siano o non ci siano delle costanti di mezzo,  $L$  varia assieme a  $x$  e quindi l'equazione del moto indica che esso è di tipo armonico; la pulsazione di questo moto è  $\omega = (k/(m_1+m_2))^{1/2}$ . Alla domanda si risponde facilmente notando che in un qualsiasi moto armonico l'intervallo di tempo necessario da quando si passa per la posizione di equilibrio a quando il sistema si arresta (per la prima volta, il moto è periodico!) è pari a  $T/4$  da cui, ricordando il legame tra pulsazione e periodo, la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, lo spostamento  $\Delta'$  della massa  $m_1$  nell'istante  $t'$  determinato sopra? [Vi si chiede in pratica di individuare la semi-ampiezza dell'oscillazione]

$\Delta' = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m} \quad v_0 / ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = 0.10 \text{ m} \quad$  [anche qui non è necessario svolgere i conti dei dettagli dato che basta ricordarsi (se non lo ricordate si può facilmente dimostrare) che in un moto armonico come quello esaminato, che ha soluzione, cioè legge oraria del moto (scritta ad esempio per  $m_1$ , ma per  $m_2$  la scrittura sarebbe la stessa a causa della presenza di una fune inestensibile) del tipo  $x_1(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_{1EQ}$ , le condizioni iniziali del problema impongono, come si può facilmente dimostrare,  $\Phi = \pi/2$  e  $A = -v_0/\omega$ . Questo valore di  $A$ , che è la semi-ampiezza dell'oscillazione, rappresenta proprio la soluzione al quesito]

**Nota:** acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).  
Pisa, 17/12/2010 Firma: