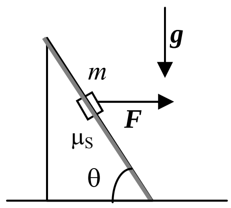
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 24/11/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

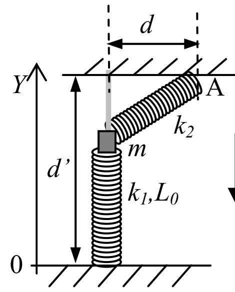
1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R = 50 cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** α (**incognita**). All'istante t_0 = 0 il punto **passa** per la posizione θ_0 = 0 e si sa che all'istante t_1 = 1.0 s il punto ha percorso il primo quarto di giro e all'istante $t_2 = 4t_1$ = 4.0 s ha percorso metà giro.
   a) Quanto vale l'accelerazione angolare α?
   α = ……………………………………… ~ ………. rad/s^2 $-\pi/(6t_1^2)$ ~-0.52 rad/s^2 [il moto angolare è uniformemente accelerato con velocità angolare iniziale evidentemente non nulla, dunque la legge oraria del moto è $\theta(t) = \omega_0 t + \alpha t^2/2$. Dai dati del problema si ha $\theta_1 = \pi/2 = \omega_0 t_1 + \alpha t_1^2/2$ e $\theta_2 = \pi = \omega_0 t_2 + \alpha t_2^2/2$. Le due equazioni costituiscono un sistema con due incognite. Risolvendo per α si ottiene la soluzione]
   b) Quanto vale il **modulo** a_2 dell'accelerazione all'istante t_2?
   a_2 = ……………………………………… ~ ………. m/s^2 $(a_{C,2}^2+a_{T,2}^2)^{1/2} = R((\omega_0+\alpha t_2)^4 + \alpha^2)^{1/2}$ ~ 0.26 m/s^2
   [poiché la traiettoria è circolare, il punto risente di accelerazione in direzione radiale (l'accelerazione centripeta), $a_C=\omega^2 R$, e tangenziale $a_T = \alpha R$. Dato che le due componenti sono ortogonali tra loro, il modulo dell'accelerazione si ottiene applicando il teorema di Pitagora, cioè $a_2 = (a_{C,2}^2 + a_{T,2}^2)^{1/2} = R(\omega_2^4 + \alpha^2)^{1/2}$, dove abbiamo notato che l'unica cosa che cambia nel tempo è la velocità angolare (l'accelerazione angolare è costante). La legge oraria della velocità angolare recita: $\omega(t) = \omega_0+\alpha t$. La velocità angolare iniziale (all'istante t_0=0) si ottiene risolvendo il sistema scritto alla soluzione del punto precedente per l'incognita ω_0: si ottiene $\omega_0 = 7\pi/(12t_1)$. Inoltre l'espressione di α è già stata determinata al punto precedente: mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione. Notate che nella soluzione numerica si vede come, a causa delle basse velocità raggiunte, l'accelerazione sia dominata dalla componente tangenziale]

2. Un tondino rigido, fisso e indeformabile è montato in modo che il suo asse formi un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Sul tondino può scorrere un manicotto (puntiforme!) di massa m = 400 g; fra manicotto e tondino si sviluppa un **attrito** con coefficiente di attrito statico μ_S = 0.50. Sul manicotto è applicata una forza esterna $\boldsymbol{F}$ che ha direzione orizzontale, verso come in figura, e modulo F = 0.20 N. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $cos(\pi/3)$ = ½; attenzione: in questo esercizio vanno fatti, alla fine, i conti con i numerini!]



   a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte il manicotto sia in **equilibrio**. Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito F_A in tali condizioni?
   F_A = ……………………………………… ~ .... N $mg sin\theta + F cos\theta$ ~ 3.5 N   [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. Usando un riferimento orientato verso il basso, in questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso (verso il basso), la componente attiva della forza esterna (anche verso il basso), e la forza di attrito. Tenendo conto delle proiezioni si ottiene il risultato]
   b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alla situazione di equilibrio di cui al punto precedente.
   Discussione: ………………………………………   occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza: $mg sin\theta+F cos\theta = F_A \le \mu_S N = \mu_S\, |mg cos\theta - F sin\theta|$, dove abbiamo esplicitato il modulo della reazione vincolare esercitata dal piano (deve bilanciare le componenti del peso e della forza esterna in direzione ortogonale al piano inclinato, che hanno rispettivamente segni opposti per la geometria del problema). Affinché ci sia equilibrio è quindi necessario che sia $\mu_S \ge (mg sin\theta+F cos\theta)/|mg cos\theta-F sin\theta|$. Usando i valori numerici dati nel testo si ottiene che sarebbe necessario $\mu_S \ge 2$, cosa che non è, per cui l'equilibrio **non** è possibile nelle condizioni del problema]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 3.0 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle, denominate 1 e 2, che hanno costanti elastiche k_1 = 9.0 N/m e $k_2 = 2\,k_1$ = 18 N/m. Le due molle sono disposte come in figura: la molla 1, che ha lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, ha il proprio asse in direzione Y ed è vincolata a un pavimento fisso e indeformabile; la molla 2, che ha lunghezza di riposo **trascurabile**, è vincolata a un soffitto fisso e indeformabile nel punto A, che si trova a distanza $d = L_0$ = 50 cm dal tondino (misurata in direzione orizzontale, vedi figura) e a distanza $d' = 2d = 2L_0$ = 1.0 m dal pavimento (misurata in direzione verticale, vedi figura). Per la soluzione **dovete** usare il riferimento che è disegnato in figura, cioè l'asse Y **orientato verso l'alto**, con origine nel pavimento. [Notate che la figura rappresenta una situazione "generica", **non di equilibrio** e che la coordinata y esprime la posizione



generica del manicotto (puntiforme!); usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Scrivete l'equazione del moto del manicotto, cioè la **funzione** che esprime l'accelerazione $a(y)$ per una posizione **generica** y del manicotto, e discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto. [Ovviamente nell'equazione del moto, che di fatto è una funzione, non dovete usare alcun valore numerico, ma dovete riferirvi ai dati noti del problema attraverso i simboli usati nel testo]

$a(y)$ =…………………………………… $-((k_1+k_2)/m)y + (k_1/m)L_0 + (k_2/m)d' - g = -(3k_1/m)y + (5k_1/m)L_0 - g$ [il moto può avvenire solo in direzione Y a causa del vincolo imposto dal tondino. L'equazione del moto deve dunque contenere tutte le forze che hanno direzione Y, cioè la forza peso, che è costante e vale $-mg$ (si noti l'orientazione dell'asse), la forza elastica della molla 1, che si esprime come $-k_1(y-L_0)$ – i segni sono giusti come si può facilmente verificare, notate che y rappresenta anche la lunghezza della molla, essendo il manicotto puntiforme, e la **componente verticale** della forza elastica della molla 2. Poiché la molla 2 è sempre estesa rispetto alla propria lunghezza di riposo (trascurabile per ipotesi), tale componente si esprime come $kL_2cos\theta$, essendo L_2 la lunghezza (generica) della molla e θ l'angolo che si forma tra asse Y e asse della molla. Tale angolo è ovviamente funzione di y: dalla trigonometria (e geometria) di trova infatti $cos\theta = (d'-y)/L_2$. Mettendo tutto insieme si determina la soluzione, che è "significativa" in quanto espressa in funzione della coordinata y e valida per qualsiasi valore di y. Notate che nell'ultimo passaggio si sono usate le relazioni numeriche tra le varie grandezze date nel testo per rendere più semplice l'espressione]

Discussione: …………………………………… il moto è chiaramente armonico, dato che l'equazione del moto è della forma tipica per il moto armonico [$a(y)=-\omega^2 y$ + *costanti*]. La pulsazione deve essere $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = (3k_1/m)^{1/2}$. L'oscillazione armonica avviene attorno a una data posizione di equilibrio (calcolata nel punto successivo).

b) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto y_{EQ}, se esiste? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento indicato in figura]

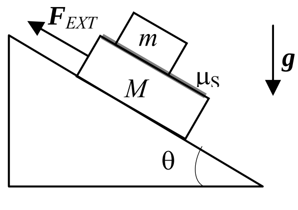
y_{EQ} = …………………………………… = ……… m $-mg/(3k_1)+5L_0/3$ =- 0.26 m [la posizione di equilibrio è quella che comporta $a(y_{EQ}) = 0$. Usando l'equazione del moto di cui al punto a) si ottiene la soluzione. NOTATE CHE, CON I DATI NUMERICI ERRONEAMENTE DATI NEL TESTO, QUESTA POSIZIONE DI EQUILIBRIO NON ESISTE, DATO CHE PRESUPPONE CHE IL MANICOTTO SCENDA AL DI SOTTO DEL PAVIMENTO…SE NE TIENE DEBITO CONTO NELLA VALUTAZIONE DEGLI ELABORATI]

c) Supponete ora che il manicotto sia messo in movimento a causa di una qualche perturbazione esterna applicata in precedenza (una forza che è stata poi rimossa, un colpo, etc. – non vi interessa saperlo). Si osserva che all'istante t_0 = 0 il manicotto passa per la posizione $y_0 = y_{EQ}$ avendo una velocità v_0 = -0.30 m/s (il segno negativo indica che tale velocità è diretta nel verso negativo dell'asse, cioè verso il basso di figura). In quale posizione y' e in quale istante t' il manicotto si ferma (per la prima volta)?

y' = …………………………………… = ……… m $-(v_0/\omega)+y_{EQ}$ = -0.33 m [la legge oraria del moto armonico "generico" è $y(t) = A cos(\omega t+\Phi)+y_{EQ}$, mentre la legge oraria della velocità per lo stesso moto è $v(t) = -\omega A sin(\omega t+\Phi)$. Le condizioni iniziali proposte dal problema portano a determinare $\Phi = \pi/2$ e $A = v_0/\omega$, cioè le leggi orarie specifiche per il problema considerato sono $y(t)=-(v_0/\omega)sin(\omega t)+y_{EQ}$ e $v(t)=-v_0 cos(\omega t)$ – notate che abbiamo usato le note relazioni fra grandezze trigonometriche di angoli complementari. All'arresto $v(t')=0$ cioè $\omega t' = \pi/2$; in tale istante si ha $sin(\omega t') = 1$, da cui la soluzione. Notate che analoga soluzione sarebbe stata trovata usando per Φ altri valori, modulo π, che annullano la funzione coseno VEDI SOPRA PER LE CONSIDERAZIONI SUL VALORE NUMERICO DEL DATO!]

t' = …………………………………… = ……… s $\pi/(2\omega)$ = 0.52 s [da quanto appena affermato si ha $t' = \pi/(2\omega)$. Notate che il tempo t' poteva anche essere trovato ragionando sul fatto che esso deve necessariamente essere pari a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo del moto armonico considerato]

4. Un blocco di massa M = 8.0 kg può muoversi con attrito trascurabile su un piano **inclinato** che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Sulla superficie superiore del blocco, che è **scabra** e presenta un coefficiente di attrito statico μ_S = 0.80, è appoggiato un blocchetto di massa $m = M/8$ = 1.0 kg. Inizialmente i due oggetti si trovano entrambi fermi per un qualche "motivo" (manina, gancetto, etc.); quindi il "motivo" viene rimosso e contemporaneamente una forza esterna di modulo F_{EXT} = 36 N, diretta come il piano inclinato e orientata verso la sommità del piano stesso (vedi figura), viene applicata al blocco di massa M. [Per questo esercizio è davvero importante che, in brutta, spieghiate **bene** cosa state facendo! Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = 1/2$]

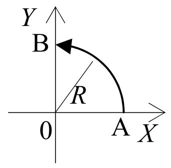


a) Supponete che, sotto l'azione della forza esterna $\boldsymbol{F_{EXT}}$, i due blocchi risalgano lungo il piano inclinato muovendosi "allo stesso modo", cioè **senza strisciamento** del blocchettino sul blocco. Quanto vale, in queste condizioni, la forza di attrito F_A? [Esprimete il modulo della forza di attrito statico che deve esistere al contatto tra i due oggetti]

F_A = …………………………………… = ……… N $F_{EXT}(m/(m+M)) = F_{EXT}/9$ = 4.0 N [poiché la velocità iniziale dei due oggetti è nulla, la condizione di non scivolamento implica che siano uguali le accelerazioni A e a dei due corpi, ovvero che sia nulla l'accelerazione relativa. Occorre scriversi le equazioni del moto rispetto alla direzione del piano inclinato (prendiamo un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso la sommità del piano stesso), che è quella lungo la quale può avvenire il moto. Sul blocchettino le forze che hanno tale direzione sono la componente della forza peso $-mgsin\theta$ (il segno negativo è coerente con la scelta dell'asse) e la forza di attrito (statico, visto che si richiede non ci sia scivolamento) esercitato dalla superficie di contatto, che, opponendosi al moto incipiente (il blocchettino si sposterebbe verso il basso se non ci fosse l'attrito), è orientato nel verso positivo dell'asse. Si ha quindi $a = |F_A|/m - gsin\theta$. Sul blocco di massa M agisce la forza esterna F_{EXT}, che compare con un segno positivo essendo orientata verso la sommità del piano, la componente attiva della forza peso $-Mgsin\theta$ (vedi sopra per il segno) e la forza di attrito che il blocchettino esercita sul blocco. Tale forza è uguale in modulo e opposta in verso a quella risentita dal blocchettino. Si ha quindi: $A = F_{EXT}/M - |F_A|/M - g\sin\theta$. La condizione di non scivolamento $a=A$ implica: $|F_A|(1/m+1/M) = F_{EXT}/M$, cioè $|F_A| = F_{EXT}(m/(m+M))$, da cui la soluzione, dove abbiamo anche sfruttato la relazione numerica tra le varie masse. Notate che tale soluzione è la stessa che si avrebbe nel caso di moto su un piano orizzontale e non inclinato, dato che la presenza del piano inclinato implica di considerare una forza, la componente attiva della forza peso, che produce la stessa accelerazione per i due oggetti]

b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni sopra esposte sono realmente realizzabili considerando i dati numerici del problema.
Discussione: …………………………………… occorre ovviamente verificare se la forza di attrito richiesta per evitare lo scivolamento relativo dei blocchi può effettivamente essere prodotta dal contatto considerato. Infatti per definizione la forza di attrito statico è $|F_A| \le \mu_S N$, con N modulo della reazione vincolare che si esercita al contatto. Tale reazione vincolare serve per impedire che il blocchettino cada dentro al blocco, cioè è $N = mg\cos\theta$. Usando i valori dell'esercizio, si ha $F_{A,MAX} = 6.8$ N, valore che soddisfa la richiesta. Pertanto non c'è scivolamento del blocchettino sul blocco

5. In un certo esperimento si fa uso di una forza **disomogenea** (conservativa) che agisce sul piano XY e ha componenti espresse dalle funzioni $F_X = K_1 x$ e $F_Y = K_2$, con x coordinata spaziale (rispetto a un dato sistema di riferimento) e K_1 e K_2 costanti opportunamente dimensionate.



a) Come si scrive il lavoro L compiuto da questa forza per uno spostamento lungo l'arco di circonferenza di raggio R disegnato in figura? [L'arco in questione corrisponde a un quarto della circonferenza di raggio R centrata sull'origine del riferimento; il punto iniziale e finale dello spostamento sono indicati con A e B in figura e la freccia indica il verso dello spostamento]
L = ………………………………… $-K_1R^2/2 + K_1R$ [la definizione di lavoro è $L = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$, con $d\mathbf{l}$ spostamento infinitesimo lungo lo spostamento considerato. Usando le coordinate cartesiane, si ha $d\mathbf{l} \equiv (dx,dy)$, per cui, ricordando l'espressione del prodotto scalare, $L = \int_A^B (F_X dx+F_y dy)= \int_{x_A}^{x_B} F_X dx+\int_{y_A}^{y_B} F_Y dy = K_1(x_B^2-x_A^2)/2+K_2(y_B-y_A)$, dove abbiamo usato semplici regole di integrazione note a tutti. A questo punto dal disegno è evidente che $x_A = R$, $x_B = 0$ e $y_A = 0$, $y_B = R$, da cui la soluzione. Notate che la lunghezza dello spostamento è $\Delta l = R\pi/2$, per cui si vede come il lavoro **non** è il prodotto del modulo della forza (calcolato dove? La forza non è neppure omogenea!) per lo spostamento!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 24/11/2011 Firma:

B

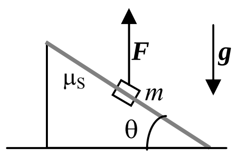
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 24/11/2011

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

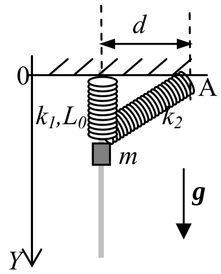
1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R = 50 cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante t_0 = 0 il punto **parte da fermo** dalla posizione θ_0 = 0 e si sa che all'istante t_1 = 2.0 s il punto ha percorso un intero giro.
   a) A quale istante t_2 il punto avrà percorso due giri?
   t_2 = …………………………………… ~ ………. s $2^{1/2}\, t_1 \sim 2.8$ s [il moto angolare è uniformemente accelerato, dunque la legge oraria del moto è $\theta(t) = \alpha t^2/2$, dove abbiamo tenuto in debito conto il fatto che all'istante $t_0=0$ il punto è fermo nella posizione $\theta_0 = 0$. Dai dati del problema si ha $\alpha = 2\theta_1 / t_1^2 = 4\pi/t_1^2$. Si ha poi $t_2^2=2\theta_2/\alpha = 8\pi/\alpha = 8\pi/(4\pi/t_1^2)=2t_1^2$, da cui la soluzione (presa con il segno positivo perché l'eventi che cerchiamo si verifica a tempi maggiori di zero)]
   b) Come si scrive la **funzione** $a(\theta)$ che rappresenta il **modulo** a dell'accelerazione del punto in funzione della posizione angolare (generica) θ? [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici ma riferitevi alle grandezze note del problema chiamandole con i loro simboli]
   $a(\theta)$ = …………………………………… $(2\theta_1 R/t_1^2)(4\theta^2+1)^{1/2} = (4\pi R/t_1^2)(4\theta^2+1)^{1/2}$ [poiché la traiettoria è circolare, il punto risente di accelerazione in direzione radiale (l'accelerazione centripeta), $a_C=\omega^2 R$, e tangenziale $a_T = \alpha R$. Dato che le due componenti sono ortogonali tra loro, il modulo dell'accelerazione si ottiene applicando il teorema di Pitagora, cioè $a = (a_C^2 + a_T^2)^{1/2} = R(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}$. In questa equazione l'accelerazione angolare rimane costantemente al valore $\alpha = 2\theta_1/t_1^2=4\pi/t_1^2$, mentre la velocità angolare cambia (con il tempo) secondo la legge oraria $\omega(t)=\alpha t$. D'altra parte la legge oraria del moto stabilisce che $\theta(t) = \alpha t^2/2$, cioè, invertendo, $t = (2\theta/\alpha)^{1/2} = (\theta/\theta_1)^{1/2} t_1 = (\theta/(2\pi))^{1/2} t_1$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

2. Un tondino rigido, fisso e indeformabile è montato in modo che il suo asse formi un angolo θ = π/6 rispetto all'orizzontale. Sul tondino può scorrere un manicotto (puntiforme!) di massa m = 0.50 kg; fra manicotto e tondino si sviluppa un attrito con coefficiente di attrito statico μ_S = 0.50. Sul manicotto è applicata una forza esterna $\boldsymbol{F}$ che ha direzione verticale, verso come in figura (verso l'alto), e modulo F = 4.9 N. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6)$ = ½; attenzione: in questo esercizio vanno fatti i conti con i numerini!]]



   a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte il manicotto sia in **equilibrio**. Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito F_A in tali condizioni?
   F_A = …………………………………… = ... N $|mg sin\theta - F sin\theta| = 0$ [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. Usando un riferimento orientato verso il basso, in questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso (verso il basso, quindi positiva), e la componente attiva della forza esterna (verso l'alto), e la forza di attrito. Si vede subito che della forza di attrito non c'è bisogno, dato che la forza esterna bilancia completamente la forza peso! Di conseguenza la forza di attrito è nulla]
   b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono realmente condurre alla situazione di equilibrio di cui al punto precedente.
   Discussione: …………………………………… dato che la forza di attrito deve essere nulla, tale valore è sicuramente compatibile con il coefficiente di attrito statico dato dal testo. Infatti si ha $F_A = 0 \leq \mu_S N$. Notate che nelle condizioni del problema anche la reazione vincolare è nulla; tuttavia si può ritenere che la condizione richiesta sia soddisfatta, per cui la situazione è di equilibrio

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 3.0 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle, denominate 1 e 2, che hanno costanti elastiche k_1 = 18 N/m e $k_2 = k_1/2$ = 9.0 N/m. Le due molle sono disposte come in figura: la molla 1, che ha lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, ha il proprio asse in direzione Y ed è vincolata a un soffitto fisso e indeformabile; la molla 2, che ha lunghezza di riposo **trascurabile**, è vincolata allo stesso soffitto nel punto A che si trova a distanza $d = L_0$ = 50 cm dal tondino. Per la soluzione dovete usare il riferimento che è disegnato in figura, cioè l'asse Y **orientato verso il basso**, con origine nel soffitto. [Notate che la figura rappresenta una situazione "generica", **non di equilibrio** e che la coordinata y esprime la posizione generica del manicotto (puntiforme!)]



   a) Scrivete l'equazione del moto del manicotto, cioè la **funzione** che esprime l'accelerazione $a(y)$ in funzione della posizione **generica** y del manicotto, e discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto. [Ovviamente nell'equazione del moto, che di fatto è una funzione, non dovete usare alcun valore numerico, ma dovete riferirvi ai dati noti del problema attraverso i simboli usati nel testo; inoltre **dovete** usare il sistema di riferimento specificato in figura]

$a(y)$ =...................................... $-((k_1+k_2)/m)y + (k_1/m)L_0 + g$ [il moto può avvenire solo in direzione Y a causa del vincolo imposto dal tondino. L'equazione del moto deve dunque contenere tutte le forze che hanno direzione Y, cioè la forza peso, che è costante e vale mg (si noti l'orientazione dell'asse), la forza elastica della molla 1, che si esprime come $-k_1(y-L_0)$ – i segni sono giusti come si può facilmente verificare, notate che y rappresenta anche la lunghezza della molla, essendo il manicotto puntiforme), e la **componente verticale** della forza elastica della molla 2. Poiché la molla 2 è sempre estesa rispetto alla propria lunghezza di riposo (trascurabile per ipotesi), tale componente si esprime come $-kL_2\cos\theta$, essendo L_2 la lunghezza (generica) della molla e θ l'angolo che si forma tra asse Y e asse della molla. Tale angolo è ovviamente funzione di y: dalla trigonometria si trova infatti $\cos\theta = y/L_2$. Mettendo tutto insieme si determina la soluzione, che è "significativa" in quanto espressa in funzione della coordinata y e valida per qualsiasi valore di y]

Discussione: .... il moto è chiaramente armonico, dato che l'equazione del moto è della forma tipica per il moto armonico. La pulsazione deve essere $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2} = (3k_2/m)^{1/2}$. L'oscillazione armonica avviene attorno a una data posizione di equilibrio (calcolata nel punto successivo).

b) Qual è la posizione di equilibrio del manicotto y_{EQ}, se esiste? [Esprimete questa posizione rispetto al riferimento indicato in figura]

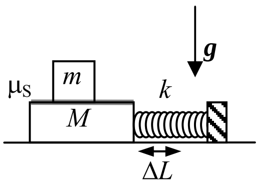
y_{EQ} = ... = ... m $(k_1L_0 + mg)/(k_1+k_2)=(2/3)L_0+mg/(3k_2) = 1.42$ m [la posizione di equilibrio è quella che comporta $a(y_{EQ}) = 0$. Usando l'equazione del moto di cui al punto a) si ottiene la soluzione, dove, per semplificare le espressioni, si è anche tenuto conto delle relazioni numeriche tra le varie grandezze]

c) Supponete ora che il manicotto sia messo in movimento a causa di una qualche perturbazione esterna applicata in precedenza (una forza applicata e poi rimossa, un colpo, etc. – non vi interessa saperlo). Si osserva che all'istante $t_0 = 0$ il manicotto si trova **fermo** nella posizione $y_0 = y_{EQ}/2$ (con y_{EQ} determinato al punto precedente). Quanto vale la velocità v' con cui il manicotto ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio? In quale istante t' si verifica questo passaggio per la posizione di equilibrio?

v' = ... = ... m/s $y_{EQ}\omega/2 = 2.1$ m/s [la legge oraria del moto armonico "generico" è $y(t) = A\cos(\omega t+\Phi)+y_{EQ}$, mentre la legge oraria della velocità per lo stesso moto è $v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\Phi)$. Le condizioni iniziali proposte dal problema portano a determinare $\Phi = 0$ e $A = -y_{EQ}/2$, cioè le leggi orarie specifiche per il problema considerato sono $y(t)=-(y_{EQ}/2)\cos(\omega t)+y_{EQ}$ e $v(t)=(y_{EQ}/2)\omega\sin(\omega t)$. Il manicotto passa per la posizione di equilibrio all'istante t' tale che $y(t')=y_{EQ}=-(y_{EQ}/2)\cos(\omega t')+y_{EQ}$, da cui $\omega t' = \pi/2$; in tale istante si ha $\sin(\omega t') = 1$, da cui la soluzione]

t' = ... = ... s $\pi/(2\omega) = 0.52$ s [da quanto appena affermato si ha $t' = \pi/(2\omega)$. Notate che il tempo t' poteva anche essere trovato ragionando sul fatto che esso deve necessariamente essere pari a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo del moto armonico considerato]

4. Un blocco di massa M = 50 kg può muoversi con attrito trascurabile su un piano **orizzontale**. Sulla superficie superiore del blocco, che è **scabra** e presenta un coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.50$, è appoggiato un blocchetto di massa $m = M/5 = 10$ kg. Il blocco di massa M è attaccato all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 6.0\times10^2$ N/m, il cui altro estremo è vincolato a un muretto rigido e indeformabile. Come rappresentato in figura, la molla si mantiene sempre con il suo asse in direzione orizzontale. Si esegue un esperimento che consiste nello spostare (con una manina) il blocco di massa M (su cui si mantiene appoggiato il blocchetto di massa m) in modo che la molla venga allungata di un certo tratto ΔL. Quindi la manina viene tolta e il sistema di blocchi lasciato libero di muoversi (con velocità iniziale nulla per entrambi i blocchi). Si osserva che per $\Delta L \leq \Delta L_{MAX}$ il blocchetto **non scivola mai** sulla superficie del blocco nel corso del processo conseguente al rilascio della manina. [Per questo esercizio è davvero importante che, in brutta, spieghiate bene cosa state facendo!]



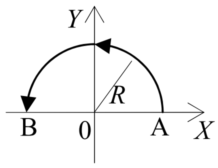
a) Quanto vale ΔL_{MAX}?

ΔL_{MAX} = ... = ... m $\mu_S g(m+M)/k = \mu_S g6m/k = 0.49$ m [poiché la velocità iniziale dei componenti è nulla, la condizione di non scivolamento implica che siano uguali le accelerazioni A e a dei due corpi, ovvero che sia nulla l'accelerazione relativa. Occorre scriversi le equazioni del moto rispetto all'asse orizzontale (prendiamolo orientato verso la destra di figura). Sul blocchettino l'unica forza che ha direzione orizzontale è l'attrito (statico, visto che si richiede non ci sia scivolamento) esercitato dalla superficie di contatto. La forza di attrito, opponendosi al moto incipiente, è orientata nel verso positivo dell'asse. Si ha quindi $a = |F_A|/m$. Sul blocco di massa M agisce la forza elastica della molla, che, all'istante considerato, vale $k\Delta L$ (notate il segno positivo, a causa del fatto che tale forza traina verso la destra di figura) e la forza di attrito che il blocchettino esercita sul blocco. Tale forza è uguale in modulo e opposta in verso a quella risentita dal blocchettino. Si ha quindi: $A = k\Delta L/M - |F_A|/M$. La condizione di non scivolamento $a=A$ implica: $|F_A|(1/m+1/M) = k\Delta L/M$, cioè $|F_A| = k\Delta L(m/(m+M))$. Per l'attrito statico deve essere $|F_A| \leq \mu_S N = \mu_S mg$, dove abbiamo identificato con mg il modulo della reazione vincolare esercitata dal contatto. Per il non scivolamento risulta allora che deve verificarsi $\Delta L \leq \mu_S mg((m+M)/m)/k = \mu_S g(m+M)/k$; evidentemente il valore ΔL_{MAX} è proprio il massimo valore che questa grandezza può assumere sulla base dell'espressione trovata, da cui la soluzione. Infine, è importante notare che, nell'evoluzione successiva del sistema, la forza elastica non supera mai il valore che ha inizialmente e che abbiamo considerato. Dunque la forza di attrito richiesta per evitare lo scivolamento è minore di quella valutata all'inizio, e quindi lo scivolamento non c'è mai]

b) Supponete ora che la molla venga allungata per un tratto $\Delta L = \Delta L_{MAX}/2$ (con ΔL_{MAX} determinato sopra): in tali condizioni, in cui non si verifica scivolamento, quanto vale la forza di attrito F_A? [Esprimete il modulo della forza; naturalmente dovete considerare il valore di questa forza subito dopo che la manina viene rimossa, cioè all'istante iniziale del processo]

F_A =................................ = ... N $\mu_S g(m+M)/k = \mu_S gm/2 = 24.5$ N [non c'è scivolamento, dunque valgono le considerazioni svolte nella soluzione del punto precedente. In particolare è $|F_A| = k\Delta L m/(m+M) = k\Delta L_{MAX} m/(2(m+M))$. Sostituendo l'espressione di ΔL_{MAX} determinata sopra si ottiene la soluzione]

5. In un certo esperimento si fa uso di una forza **disomogenea** (conservativa) che agisce sul piano XY e ha componenti espresse dalle funzioni $F_X = K_1 x$ e $F_Y = K_2 y^3$, con x coordinata spaziale (rispetto a un dato sistema di riferimento) e K_1 e K_2 costanti opportunamente dimensionate.



   a) Come si scrive il lavoro L compiuto da questa forza per uno spostamento lungo la semicirconferenza di raggio R disegnata in figura? [La semicirconferenza in questione è centrata sull'origine del riferimento; il punto iniziale e finale dello spostamento sono indicati con A e B in figura e le frecce indicano il verso dello spostamento. Potrebbe farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, con $n \neq -1$]

   L = ... 0 [la definizione di lavoro è $L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$, con $\mathbf{dl}$ spostamento infinitesimo lungo lo spostamento considerato. Usando le coordinate cartesiane, si ha $\mathbf{dl} \equiv (dx,dy)$, per cui, ricordando l'espressione del prodotto scalare, $L = \int_A^B (F_X dx + F_y dy) = \int_{x_A}^{x_B} F_X dx + \int_{y_A}^{y_B} F_Y dy$. Dal disegno è evidente che $x_A = R$, $x_B = -R$ e $y_A = 0$, $y_B = 0$, per cui il secondo integrale (quello rispetto a Y) fa zero dato che nullo è lo spostamento lungo Y. Inoltre anche il primo integrale fa zero, dato che si ha $K_1(x_B^2/2 - x_A^2/2) = K_1(R^2 - R^2)$, in conseguenza del fatto che la forza considerata è dispari e lo spostamento lungo X è simmetrico rispetto all'origine (pensateci!)]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 24/11/2011 Firma: