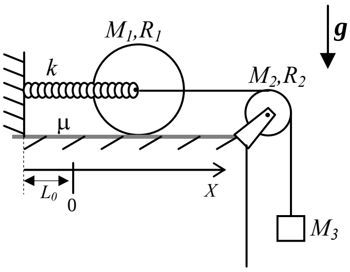
Corso di Laurea Ing. E-A – PROVA DI VERIFICA n. 2 – 29/3/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piano inclinato di caratteristiche geometriche incognite (si intende inclinato rispetto all'orizzontale!) è fissato su un carrellino che si muove con **attrito trascurabile** lungo una direzione orizzontale (asse X). La massa complessiva del piano inclinato e del carrellino è $M = 2.0$ kg. Un oggetto puntiforme di massa $m = M/4 = 0.50$ kg può scorrere con attrito trascurabile sul piano inclinato. A un dato istante il carrellino (e dunque il piano inclinato) si muove con una velocità di modulo $V_0 = 5.0$ m/s, mentre l'oggetto puntiforme si trova **fermo alla base** del piano inclinato (si intende fermo rispetto alla strada su cui si muove il carrellino!). Nell'evoluzione successiva si osserva che l'oggetto puntiforme risale sul piano inclinato fino a raggiungere una certa altezza h (si intende che questa altezza è misurata in direzione verticale a partire dalla quota inizialmente occupata dall'oggetto, cioè a partire dalla base del piano inclinato). [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Discutete **per benino**,in brutta, quali grandezze meccaniche complessive del sistema si conservano nel processo considerato, e spiegate perché. [Il processo da considerare è ovviamente quello in cui l'oggetto risale lungo il piano inclinato]
   Discussione e spiegazione: …………………………………… Poiché non ci sono attriti che compiono lavoro, si conserva l'energia meccanica complessiva del sistema. Inoltre, poiché il sistema è isolato **in direzione orizzontale** (le forze esterne, cioè peso e reazione vincolare della strada, sono tutte verticali), si conserva la quantità di moto complessiva **in questa direzione**.
   b) Quanto vale la quota massima h raggiunta dall'oggetto puntiforme?
   h = ……………………………………= ……… m $2V_0^2/(5g)$ = 1.0 m [quando raggiunge la quota massima,, evidentemente l'oggetto puntiforme è istantaneamente fermo **rispetto al carrello**. Infatti la sua velocità non deve avere componenti verticali (altrimenti la quota non sarebbe la massima), ma allo stesso tempo l'oggetto deve rimanere a contatto con il piano, e dunque la sua velocità orizzontale deve essere $v_X = V$, con V velocità del carrello (si omette l'indice X perché si sa che il carrello si muove solo in direzione orizzontale). Dunque l'equazione di conservazione dell'energia meccanica si scrive : $0 = \Delta E_K+U_G = ((m+M)/2)V^2-(M/2)V_0^2+mgh$, dove abbiamo notato che inizialmente solo il carrello è in movimento e che la variazione di energia potenziale è dovuta alla variazione di quota dell'oggetto. Per la conservazione della quantità di moto lungo X si ha poi : $MV_0 = mv_X +MV = (m+M)V$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le condizioni specificate prima. Dunque $V = (M/(m+M))V_0 = 4V_0/5$, dove abbiamo sfruttato la relazione tra le masse data nel testo. Inserendo questa espressione della velocità nella conservazione dell'energia meccanica si ottiene la soluzione]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa $M_1 = m = 1.0$ kg e raggio $R_1 = 2r = 50$ cm si trova su una superficie scabra, dotata di coefficiente di attrito $\mu = 0.50$. Il cilindro può ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse geometrico. Su questo asse agiscono, grazie a un opportuno sistema (un "giogo di massa trascurabile"!), le forze prodotte da una fune inestensibile di massa trascurabile e da una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 98$ N/m il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida. Come mostrato in figura, la molla ha il suo asse in direzione orizzontale e la fune, che nel primo tratto è anche orizzontale, passa per la gola di una puleggia **massiccia** e termina con una massa puntiforme $M_3 = 2m = 2.0$ kg libera di muoversi con attrito trascurabile in direzione verticale. La puleggia è costituita da un cilindro pieno e omogeneo di massa $M_2 = m/2 = 0.50$ kg e raggio $R_2 = r = 25$ cm che è libero di ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse geometrico. Si suppone che la fune non slitti sulla gola della puleggia. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

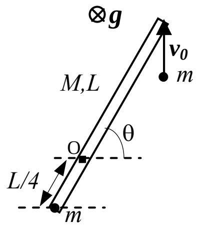


   a) Il sistema viene posto in condizioni di equilibrio (tutto è fermo!). Quanto valgono, in queste condizioni di equilibrio, il modulo della forza di attrito F_{AEQ} e l'elongazione della molla ΔL_{EQ}? [Si intende che la forza di attrito da determinare è quella che agisce sulla generatrice del cilindro a contatto con la superficie scabra]
   F_{AEQ} = …………………………………… = ……… N 0 [all'equilibrio tutto è fermo, cioè il cilindro non ruota. L'accelerazione angolare del cilindro deve dunque essere nulla. Dato che l'unica forza che agisce sul cilindro che può produrre un momento è la forza di attrito, che ha braccio R_1, cioè $\alpha = F_{AEQ}R_1/I_1 = 0$, la forza di attrito deve essere nulla. Questa condizione è ovviamente compatibile con il contatto scabro considerato (sicuramente è $F_{AEQ}<\mu N$)]
   ΔL_{EQ} = …………………………………… = ……… m $M_3g/k = 2mg/k$ = 0.20 m [dato che la forza di attrito è nulla, per garantire l'equilibrio del cilindro, e quindi l'equlibrio di tutti gli elementi del sistema, è necessario che la forza elastica eguagli in modulo la tensione della fune ceh agisce sul cilindro stesso. All'equilibrio, questa deve anche essere pari alla forza peso che agisce sulla massa M_3, da cui la soluzione]
   b) Supponete ora che una qualche causa esterna (una o più manine) prepari il sistema in modo tale che inizialmente la molla si trovi elongata per un tratto $\Delta L_0 = \Delta L_{EQ}/2$, con ΔL_{EQ} determinato sopra. Queste condizioni non sono più di equilibrio e il sistema si mette in movimento (supponete che tutti i suoi elementi vengano fatti partire con velocità iniziale nulla, sia di tipo traslazionale che rotazionale): in particolare, il cilindro comincerà a traslare verso la destra della figura. Come si scrivono l'equazione del moto $a_{CM1}(x)$ del centro di massa del cilindro e l'espressione $F_A(x)$ che stabilisce il modulo della forza di attrito in funzione della posizione del cilindro stesso **supponendo che questo si muova di rotolamento puro**? [Si intende che la forza d'attrito da esprimere è quella tra generatrice del cilindro e superficie scabra. Per esprimere la posizione generica x del centro di massa del cilindro vi conviene usare un asse orizzontale con origine nella lunghezza di riposo della molla. Dato che dovete scrivere delle funzioni, **non dovete** utilizzare alcun dato numerico, ma dovete scrivere delle espressioni che contengono solo le espressioni letterali dei dati **noti** del problema]
   $a_{CM1}(x)$ = …………………………………… $-(4k/(15m))x+8g/15$ [nel sistema ci sono diversi elementi che hanno movimento: il cilindro, che ruota e trasla (il suo centro di massa trasla), la puleggia, che ruota, la massa, che trasla. Le equazioni del moto, con ovvia scelta dei simboli, si scrivono: $a_{CM1}(x) = -(k/M_1)\Delta L - F_A/M_1 + T_1/M_1 = -(k/m)x - F_A/m - T_1/m$, dove abbiamo notato che con la nostra scelta del riferimento l'elongazione (generica) della molla si scrive $\Delta L = x$, abbiamo scritto la massa $M_1 = m$ e abbiamo indicato con T_1 il modulo della tensione della fune che agisce sul cilindro. Notate che il segno della forza di attrito è corretto, dato che, se lasciato andare liberamente (con velocità iniziale nulla), il cilindro tenderà a muoversi verso la destra della figura essendo l'elongazione iniziale minore di quella di equilibrio. L'equazione del moto rotazionale del cilindro si scrive (usando come polo il centro di massa): $\alpha = F_AR_1/I_1 = F_A/(mr)$, dove abbiamo usato l'espressione del momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo che ruota attorno al suo asse geometrico e notato che, come già osservato, solo la forza di attrito ha braccio, e quindi momento, non nullo. Nella scrittura utilizzata il segno positivo della rotazione è quello orario (in figura), coerentemente con il segno positivo della traslazione. L'equazione del moto rotazionale della puleggia si scrive $\alpha_2 = (T_2R_2-T_1R_1)/I_2 = 4(T_2-T_1)/(mr)$, dove abbiamo scelto come positivo il verso di rotazione orario, coerentemente con il resto. L'equazione del moto traslazionale della massa si scrive $a_2 = g-T_2/M_2 = g-T_2/(2m)$, dove abbiamo scelto come positivo lo spostamento verso il basso, coerentemente con il resto. Inoltre l'inestensibilità della fune impone $a_{CM1}=a_2$, mentre la condizione di non slittamento della fune sulla puleggia impone $\alpha_2 = a_2/R_2 = a_2/r$. La condizione di rotolamento puro, che è supposta vera sulla base del testo, stabilisce $a_{CM1} = \alpha_1R_1 = 2\alpha_1r$. Notate che, per quanto scritto sopra, le varie condizioni imposte conducono anche a $\alpha_2 = 2\alpha_1$, cioè il cilindro e la puleggia non hanno la stessa accelerazione angolare. Se si mette tutto insieme, cioè si considera il sistema delle varie equazioni e si risolve, si ottiene la soluzione]
   $F_A(x)$ = …………………………………… $ma_{CM1}(x)/2 = -(2k/15)x+4mg/15$ [esce dalla soluzione del sistema determinato sopra, in particolare dall'equazione del moto rotazionale del cilindro]
   c) Discutete **per bene**, in brutta, che tipo di moto compie il centro di massa del cilindro nelle condizioni del problema e stabilite quanto vale il minimo intervallo di tempo Δt necessario perché il cilindro si trovi a passare per la posizione nella quale la molla si trova all'elongazione di equilibrio ΔL_{EQ} determinata al punto a) di questo problema.

Discussione: …………………………………… Occorre innanzitutto verificare se il moto che abbiamo supposto di rotolamento puro possa effettivamente essere compiuto dal cilindro. Affinché questo si verifichi, occorre che $F_A \le F_{AMAX} = \mu N = \mu mg$, dove abbiamo notato che la reazione vincolare esercitata dal piano (la strada) è pari in modulo alla forza peso che agisce sul cilindro. L'espressione della forza di attrito necessaria per il rotolamento puro che abbiamo trovato sopra è funzione della coordinata x. Nello spostamento considerato, tale coordinata aumenta (infatti l'elongazione della molla passa dal valore $\Delta L_{EQ}/2$ al valore ΔL_{EQ}) e quindi il massimo valore della forza di attrito si ha nell'istante iniziale del moto, quando $x = \Delta L_0 = \Delta L_{EQ}/2 = mg/k$. In queste condizioni si ha $F_A = 2mg/15$. Questo valore è sicuramente minore di $F_{AMAX} = \mu mg$, dato che $\mu > 2/15$. Pertanto il moto è effettivamente di rotolamento puro e l'equazione del moto scritta in precedenza è corretta. Si vede subito che questa equazione del moto dà luogo a oscillazioni armoniche attorno alla posizione di equilibrio $x_{EQ} = \Delta L_{EQ}$ e pulsazione $\omega = (4k/(15m))^{1/2}$.

Δt = …………………………………… ~ ……… s $(\pi/2)(15m/(4k))^{1/2} \sim 0.31$ s [il tempo richiesto è quello necessario all'oscillatore armonico per percorrere il tratto da un punto estremo (massimo allontanamento dalla posizione di equilibrio) alla posizione di equilibrio, che vale $T/4$, da cui, ricordando il legame tra periodo e pulsazione, $T = 2\pi/\omega$, la soluzione]

3. Due gemellini (puntiformi) di massa m = 20 kg giocano con una specie di giostra fatta in questo modo: una trave sottile e indeformabile, di massa $M = 6m = 1.2\times10^2$ kg e lunghezza L = 4.0 m, imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano orizzontale attorno a un asse passante per un punto (indicato con O) che dista $L/4$ = 1.0 m da una estremità della trave. Inizialmente la giostra è ferma e un gemellino è seduto a una sua estremità, come mostrato in figura (vista dall'alto – notate che questo gemellino si trova a distanza $L/4$ da O); a un dato istante l'altro gemellino "monta" (cioè arriva) sull'altra estremità della trave, avendo una velocità di modulo v_0 = 0.50 m/s diretta **orizzontalmente** come rappresentato in figura (l'angolo indicato vale $\theta = \pi/3$). Si intende che dopo essere montato sull'estremità della trave il gemellino ci rimane a sedere (fermo rispetto alla trave). [Ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $cos(\pi/3) = ½$]



a) Discutete **per bene**,in brutta, quali grandezze meccaniche complessive del sistema si conservano nel processo descritto sopra, e spiegate perché.

Discussione e spiegazione: …………………………………… Il processo somiglia a un urto anelastico: infatti inizialmente si hanno due oggetti materiali (giostra+gemellino e gemellino) che poi diventano uno solo. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa per permettere al gemellino di "aderire" alla trave. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Infatti è facile dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, tutto il sistema assumerebbe una velocità di traslazione (rigida) nella stessa direzione di $\mathbf{v_0}$. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nullo (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale.

b) Quanto vale la velocità angolare ω del sistema trave+gemellini subito dopo che il gemellino ci è montato sopra? [Potrebbe esservi utile ricordare il "teorema degli assi paralleli", il cui enunciato recita, con ovvio significato dei termini: $I' = I_{CM}+Md^2$]

ω = …………………………………… = ………. rad/s $v_0 cos\theta/(2L) = 3.1\times10^{-2}$ rad/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima dell'"urto" esso è dovuto al movimento del gemellino, e si esprime $mv_0(3L/4)cos\theta$, dove abbiamo notato che il "braccio" della quantità di moto vale proprio $(3L/4)cos\theta$. Dopo l'"urto" esso è dovuto alla rotazione dell'intero sistema, e si esprime $I_{TOT}\omega$. Il momento di inerzia I_{TOT} si riferisce all'intero sistema, e dunque è somma dei momenti di inerzia della trave (sottile!) che ruota attorno al polo O, I_{TO} , e dei due gemellini. Questi ultimi contribuiscono in modo diverso, dato che la distanza dal polo è diversa. In particolare il gemellino che era seduto fin dall'inizio dà un contributo $m(L/4)^2$, quello che è montato dà un contributo $m(3L/4)^2$. La somma dà $5mL^2/8$. Per quanto riguarda la trave conviene fare uso del teorema degli assi paralleli: $I_{TO} = I_{CM} + Md^2 = ML^2/12+M(L/4)^2 = 7ML^2/48 = 42mL^2/48$. Sommando tutti i momenti di inerzia (il momento di inerzia è una caratteristica additiva dei sistemi) si ha $I_{TOT} = 72mL^2/48 = 3mL^2/2$, da cui la soluzione – UPDATED 12/4/2012]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 29/3/2012 Firma:

Corso di Laurea Ing. E-A – PROVA DI VERIFICA n. 2bis – 4/4/2012

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due masse puntiformi, rispettivamente $m_1 = m = 0.10$ kg e $m_2 = 2m = 0.20$ kg, si muovono con **attrito trascurabile** lungo una direzione orizzontale (asse X). Esse sono collegate da una molla di massa trascurabile, che ha (sempre) il proprio asse in direzione orizzontale, costante elastica $k = 5.0$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 50$ cm. All'istante $t_0 = 0$ si fa una "fotografia" del sistema e si osserva che la massa m_1 è istantaneamente ferma e la massa m_2 si muove con velocità orizzontale, nel verso positivo dell'asse X e di modulo $v_0 = 2.0$ m/s. Inoltre la distanza fra le due masse è, in questo istante, pari a L_0. Nell'evoluzione successiva entrambe le masse si muovono e la molla si allunga fino a raggiungere l'elongazione massima ΔL_{MAX}.

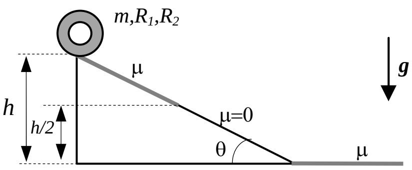
   a) Quanto vale ΔL_{MAX}?

   ΔL_{MAX} = ………………………………… ~ ……….. m $(2mv_0^2/(3k))^{1/2} \sim 0.23$ m [il sistema è isolato lungo la direzione X , dove non agiscono forze esterne, Di conseguenza si conserva la quantità di moto totale del sistema in questa direzione, per cui in ogni istante si ha $m_2v_0 = m_1v_1+m_2v_2$, cioè, sfruttando la relazione tra le masse stabilite nel testo: $2v_0 = v_1+2v_2$. Inoltre, non essendoci attriti, si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè: $(m_2/2)v_0^2 = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2+(k/2)(\Delta L)^2$, ovvero, usando la relazione tra le masse: $2v_0^2 = v_1^2+2v_2^2+(k/m)(\Delta L)^2$, dove abbiamo notato che l'energia elastica iniziale, cioè all'istante $t_0 = 0$, è nulla nulla essendo l'elongazione o compressione della molla (la sua lunghezza è pari alla lunghezza di riposo). Nell'istante in cui la lunghezza raggiunge il suo valore massimo coincide ovviamente con l'istante in cui le due masse si trovano alla maggiore distanza (relativa). In questo istante le due masse **devono avere la stessa velocità**, ovvero la velocità **relativa** deve essere nulla. Quindi deve essere $v_1'=v_2'=v'$ da cui, usando la conservazione della quantità di moto, $v' = 2v_0/3$. La soluzione si ottiene mettendo questa espressione nella conservazione dell'energia meccanica: $2v_0^2=3v'^2+(k/m)(\Delta L)^2=4v_0^2/3+(k/m)(\Delta L)^2$, da cui la soluzione – UPDATED 12/4/2012]

   b) Quanto vale, al minimo, lo spostamento Δx_{CM} che il centro di massa del sistema compie nel tempo impiegato perché la molla si estenda fino alla massima elongazione?

   Δx_{CM} = ……………………………………~ ……… m $(2v_0/3)\pi(m/(6k))^{1/2} \sim 0.24$ m [poichè il sistema è isolato (lungo la direzione X) il centro di massa ha accelerazione nulla, per cui si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante v_{CM}. Tale velocità può essere facilmente calcolata a partire dai dati iniziali del problema : $v_{CM} = m_2v_0/(m_1+m_2) = 2v_0/3$. Essa è ovviamente analoga alla v' determinata prima, dato che nell'istante in cui le due masse hanno la stessa velocità, questa deve coincidere con la velocità del centro di massa. Detto t' il tempo necessario perché la molla raggiunga la massima elongazione, si ha quindi $\Delta x_{CM} = v_{CM}t' = 2v_0t'/3$. Il tempo t' può essere determinato esaminando il moto relativo delle due masse, che è legato agli effetti della molla. Infatti l'equazione del moto relativo si scrive : $a_{REL} =-(k/\mu)(x_{REL}-L_0)$, con μ massa ridotta del sistema, tale che $1/\mu = 1/m_1+1/m_2$. La soluzione è un moto armonico con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2} = (k(1/m_1+1/m_2))^{1/2} = (3k/(2m))^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega$. Il tempo necessario perché la molla, partendo dalla sua lunghezza di riposo (che è la posizione di equilibrio dell'oscillatore) arrivi alla massima lunghezza è pari a $T/4$, come si può facilmente dimostrare. Da qui la soluzione – UPDATED 12/4/2012]

2. Un cilindro **cavo** omogeneo, di massa $m = 1.0$ kg, raggio interno $R_1 = r = 10$ cm e raggio esterno $R_2 = 2r = 20$ cm, si trova sulla sommità di un piano inclinato di altezza totale $h = 2.0$ m che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato presenta una superficie che **per la prima metà** della sua lunghezza è **scabra**, con coefficiente di attrito $\mu = 0.50$, e **per la seconda metà** è **liscia**, con attrito praticamente trascurabile. La base del piano inclinato è raccordata con un tratto orizzontale, anch'esso **scabro** con coefficiente di attrito $\mu = 0.50$. A un dato istante il cilindro cavo, originariamente fermo, viene lasciato libero di scendere lungo il piano inclinato con velocità iniziale nulla (sia traslazionale che rotazionale!). [Notate che i coefficienti di attrito dati valgono sia nel caso di attrito statico che nel caso di attrito dinamico. Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $sin(\pi/6) = ½$]



Disegno ovviamente non in scala!!

   a) Discutete per bene, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro cavo nel **primo** tratto del piano inclinato, quello **scabro**, e spiegate il perché; inoltre calcolate il modulo dell'accelerazione del centro di massa a_{CM} in tale tratto.

   Discussione e spiegazione: …………………………………… Data la presenza della forza di attrito, è necessario verificare la possibilità che il moto sia di rotolamento puro. Ciò dipende dal valore massimo della forza di attrito che il contatto può sviluppare, cioè, in definitiva, dal coefficiente di attrito μ. Supponiamo allora che il moto sia di rotolamento puro. Scegliendo un asse parallelo al piano e orientato verso il basso, l'equazione del moto del centro di massa si scrive: $a_{CM} = gsin\theta - F_A/m$, e l'equazione del moto rotazionale $\alpha = F_AR_2/I = 2F_Ar/I$, dove abbiamo notato che l'unica forza che ha braccio, e quindi momento, non nullo rispetto a un polo che sta sull'asse del cilindro (dove sta anche il centro di massa) è la forza di attrito. Osservate che il segno scelto per la rotazione è tale che il verso orario è positivo, in accordo con il segno dell'accelerazione del centro di massa. Inoltre il momento di inerzia per il cilindro cavo omogeneo vale, come si può facilmente verificare, $I = m(R_1^2+R_2^2)/2 = 5mr^2/2$, per cui è $\alpha = 4F_A/(5mr)$. Se si suppone per questo tratto rotolamento puro, si ha la relazione geometrica $\alpha = a_{CM}/R_2 = a_{CM}/(2r)$. Mettendo insieme le tre equazioni scritte e risolvendo il sistema così ottenuto rispetto a F_A si ottiene $F_A = 5mgsin\theta/13$. Ora occorre confrontare questo valore con il massimo valore dell'attrito, che è $F_{A,MAX} = \mu N = \mu mgcos\theta$, dove abbiamo notato che la reazione vincolare si oppone alla penetrazione dell'oggetto nel piano inclinato. Rimaneggiando, si vede che il rotolamento puro si ha se $\mu \geq 5tg\theta/13$. Questa relazione è numericamente ben verificata, per cui il moto è effettivamente di rotolamento puro.

   a_{CM} = …………………………………… = ……… m/s^2 $8gsin\theta/13 = 3.0$ m/s^2 [si ottiene facilmente risolvendo il sistema di cui alla risposta precedente per l'"incognita" a_{CM}. Notate che l'accelerazione ottenuta, che ovviamente è una frazione di quella che si avrebbe in mancanza di attrito, è costante e uniforme – UPDATED 12/4/2012]

   b) Quanto valgono in modulo le velocità v'_{CM} e ω' rispettivamente del centro di massa del cilindro cavo e angolare dello stesso cilindro cavo nell'istante in cui esso giunge alla fine **dell'intero** piano inclinato? [In sostanza, il cilindro cavo ha percorso **entrambi** i tratti di cui è costituito il piano inclinato, quello scabro e quello liscio]

   v'_{CM} = ………………………………… ~ ……… m/s $(21gh/13)^{1/2} \sim 5.6$ m/s [nel primo tratto il moto è di rotolamento puro, per cui la velocità può essere calcolata usando la conservazione dell'energia meccanica (la forza di attrito è statica e non compie lavoro) e tenendo conto della relazione $\omega = v_{CM}/R_2 = v_{CM}/(2r)$ dovuta al legame geometrico tra variabili traslazionali e rotazionali tipico del rotolamento puro. Si ha quindi: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2+mg\Delta z = (v_{CM}^2/2)(m+(5mr^2/2)(1/(4r^2)))-mgh/2 = (m/2)(v_{CM}^2(1+5/8)-gh) = (m/2)(13v_{CM}^2/8-gh)$, da cui $v_{CM} = (8gh/13)^{1/2}$. Notate che nel calcolo abbiamo debitamente considerato che, nel primo tratto, la variazione di quota vale $\Delta z = -mgh/2$ (si tratta di metà del piano inclinato alto h). Nel secondo tratto la forza di attrito non c'è più, per cui non c'è alcun momento di forze che possa produrre un'accelerazione angolare in grado di modificare la velocità angolare, che pertanto rimane **costante** al valore $\omega = v_{CM}/(2r) = (2gh/(13r^2))^{1/2}$. Anche in questo tratto si conserva l'energia meccanica, dato che non ci sono forze di attrito, ma nel computo dell'energia cinetica va considerata la velocità "iniziale" v_{CM} del centro di massa e non vanno considerati i termini rotazionali, che restano costanti (in pratica $\Delta E_{K,ROT} = 0$). Si ha quindi: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v'_{CM}{}^2-(m/2)v_{CM}^2-mgh/2 = (m/2)v'_{CM}{}^2-(m/2)(8gh/13)-mgh =(m/2)(v'_{CM}{}^2-21gh/13)$, dove abbiamo usato il valore v_{CM} trovato prima. Da qui la soluzione – UPDATED 12/4/2012]

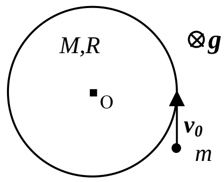
   ω' = …………………………………… ~ ……….. rad/s $(2gh/(13r^2))^{1/2} \sim 17$ rad/s [vedi sopra – UPDATED 12/4/2012]

   c) Discutete **per bene**, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro nel tratto piano e determinate la velocità v''_{CM} del centro di massa del cilindro cavo quando questo ha percorso un tratto orizzontale **"molto lungo"** . [Cercate di ricordare cosa significa rotolamento puro e considerate che il tratto orizzontale sufficientemente lungo da poter dare una risposta al quesito. Ovviamente tutti gli attriti diversi da quello di contatto con la superficie vanno considerati trascurabili!]

Discussione: …………………………………… Il moto di rotolamento puro si verifica quando la generatrice di contatto tra cilindro cavo è istante per istante ferma rispetto alla superficie della "strada". Come conseguenza si ha la relazione geometrica, già citata, $v_{CM} = \omega R_2 = 2r\omega$ Questa relazione **non** è verificata subito all'inizio del tratto orizzontale, dove le velocità sono quelle determinate al punto precedente: chiaramente il centro di massa trasla troppo velocemente rispetto alla rotazione per avere rotolamento puro, e quindi almeno inizialmente il cilindro ruota **strisciando** sulla superficie di contatto. In conseguenza di questo, la forza di attrito è **dinamica** e il suo modulo vale $F_{AD} = \mu N = \mu mg$ (siamo sul piano!). Le equazioni del moto in questo tratto sono: $a_{CM} = -F_{AD}/m = -\mu g$ e $\alpha = F_{AD}R_2/I = 4\mu g/(5r)$, dove potete notare che, coerentemente con la scelta dei segni fatta in precedenza, il centro di massa rallenta e la rotazione accelera. Inoltre, dato che queste accelerazioni sono costanti e uniformi (finché c'è strisciamento!), le leggi orarie della velocità del centro di massa e della velocità angolare, scritte supponendo che l'istante $t=0$ sia quello in cui il cilindro cavo inizia a percorrere il tratto orizzontale, diventano, tenendo in debito conto le condizioni iniziali: $v_{CM}(t) = v'_{CM} - \mu gt$ e $\omega(t) = \omega' + 4\mu gt/(5r)$ (si tratta infatti di moti uniformemente accelerati!). Se il tratto è sufficientemente lungo da far trascorrere abbastanza tempo, esisterà un istante $t=\tau$ in cui $v_{CM}(\tau) = \omega(\tau)R_2 = 2r\omega(\tau)$. In questo istante si verificano di nuovo le condizioni di rotolamento puro e, da questo istante in poi, non essendoci più dissipazione di energia, le velocità restano costanti (notate che questo implica che, da questo istante in poi, $F_A = 0$, condizione ovviamente compatibile con il coefficiente di attrito dato!).

v''_{CM} = …………………………………… ~ ……… m/s $(8v'_{CM} + 5v_{CM})/13 = (4gh/13)^{1/2}(4\times 21^{1/2}+5\times 2^{1/2})/13 \sim 4.8$ m/s [come discusso in precedenza, questa è la velocità che il centro di massa assume dall'istante τ in poi. Il suo valore si ottiene ricavando l'istante τ dall'uguaglianza $v_{CM}(\tau) = \omega(\tau)R_2$ e quindi infilando la sua espressione nella legge oraria della velocità. Nella soluzione sopra scritta i termini v'_{CM} e v_{CM} si riferiscono ai valori trovati alla risposta al punto b) e nella discussione della risposta al punto a) – UPDATED 12/4/2012]

3. In un luna park si trova una giostra realizzata con una piattaforma costituita da un disco pieno e omogeneo di raggio R = 5.0 m e massa $M = 2.0\times 10^2$ kg che può ruotare con attrito trascurabile su **un piano orizzontale** attorno a un perno fisso e rigido che passa per il suo asse geometrico (punto O di figura). Inizialmente la giostra è ferma; a un dato istante un omino puntiforme di massa $m = M/4$ = 50 kg ci sale sopra avendo una velocità diretta orizzontalmente di modulo v_0 = 1.0 m/s. Come rappresentato in figura, la velocità è tangente al disco; ovviamente, subito dopo essere salito sulla piattaforma, l'omino rimane fermo (rispetto alla piattaforma!) grazie all'attrito esercitato dalle sue scarpe sul pavimento della giostra.

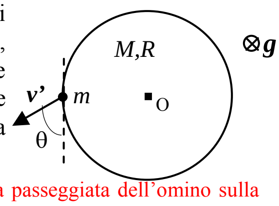


a) Discutete **per bene**,in brutta, quali grandezze meccaniche complessive del sistema si conservano nel processo descritto sopra, e spiegate perché. Inoltre determinate la velocità angolare ω del sistema piattaforma+omino subito dopo che questo ci è salito sopra.

Discussione e spiegazione: …………………………………… Il processo somiglia a un urto anelastico: infatti inizialmente si hanno due oggetti materiali (giostra+omino) che poi diventano uno solo. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa per permettere all'omino di fermarsi sulla piattaforma. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Infatti è facile dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, tutto il sistema assumerebbe una velocità di traslazione (rigida) nella stessa direzione di $\boldsymbol{v_0}$. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nullo (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale rispetto a tale polo.

ω = …………………………………… = ………. rad/s $v_0/(3R) = 6.7\times 10^{-2}$ rad/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima dell'"urto" esso è dovuto al movimento dell'omino, e si esprime come mv_0R, dove abbiamo notato che il "braccio" della quantità di moto vale proprio R (la velocità è tangente alla piattaforma e l'"impatto" avviene sulla periferia). Dopo l'"urto" esso è dovuto alla rotazione dell'intero sistema, e si esprime $I_{TOT}\omega$. Il momento di inerzia I_{TOT} è somma dei momenti di inerzia della piattaforma, $I_{PIATT} = MR^2/2$, e dell'omino, $I_{OMI} = mR^2$. Usando la relazione tra le masse data nel testo si ha $I_{TOT} = 3mR^2$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che, dopo esserci salito, l'omino si faccia una passeggiata sulla giostra, seguendo un percorso qualsiasi fino ad arrivare al bordo della piattaforma. Da qui egli "salta" fuori dalla piattaforma stessa: subito dopo il salto, l'omino ha la velocità $\boldsymbol{v'}$ disegnata in figura (l'angolo indicato vale $\theta = \pi/3$), il cui modulo è $v' = v_0$ = 1.0 m/s. Tale velocità appartiene al piano orizzontale e si intende misurata **rispetto al suolo** (non rispetto alla giostra). Quanto vale la velocità angolare ω' della piattaforma subito dopo che l'omino ne è saltato via? [Anche qui state attenti a individuare cosa si conserva, e perché. Ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $cos(\pi/3) = ½$]



ω' = ………………………………… = ………. rad/s $v_0(1-\cos\theta)/(2R) = v_0/(4R) = 5.0\times 10^{-2}$ rad/s [durante la passeggiata dell'omino sulla piattaforma, il momento angolare (assiale) continua a conservarsi. Infatti le forze esterne che agiscono sul perno (qui non più impulsive, visto che il processo è presumibilmente lento) hanno braccio nullo. Inoltre la forza peso che agisce sull'omino, che non ha braccio nullo, fornisce un momento di forze che è diretto orizzontalmente, e dunque non è in grado di modificare il momento angolare assiale (a tale momento risponde il momento di qualche altra forza esterna che agisce sul perno e che ha componenti orizzontali – questa forza è necessaria per mantenere la piattaforma sul piano orizzontale!). Poiché nell'istante considerato l'omino si trova alla periferia della giostra come si trovava subito dopo esserci salito sopra, il momento di inerzia è sempre I_{TOT} calcolato prima e la velocità angolare subito prima del salto dell'omino è sempre la ω determinata sopra. Anche nel processo di salto si conserva il momento angolare complessivo: infatti questo processo somiglia molto a una frammentazione, che può essere interpretata come "l'inverso" dell'urto anelastico. La conservazione del momento angolare impone: $I_{TOT}\omega = I_{PIATT}\omega' + mv'R\cos\theta$, dove abbiamo notato che subito dopo il salto sia la piattaforma, che ruota a velocità ω', che l'omino, che si muove a velocità $\boldsymbol{v'}$, contribuiscono al momento angolare complessivo. Dalla geometria del salto si vede come il "braccio" della quantità di moto dell'omino, inteso come distanza tra il polo (il centro del disco) e la retta a cui appartiene il vettore $\boldsymbol{v'}$, vale $R\cos\theta$. Poiché quella che abbiamo scritto è una relazione tra le componenti, occorre fare attenzione ai segni, in particolare verificare se i momenti angolari (assiali) di piattaforma e omino subito dopo il salto sono concordi o meno. Si vede che il verso con cui si muove l'omino è lo stesso verso che l'omino aveva quando era sulla piattaforma (e contribuiva al momento angolare complessivo, che avevamo posto positivo), dunque il segno positivo va bene. Ricapitolando e usando tutte le espressioni via via determinate, si ha:$3mR^2\omega = 2mR^2\omega' + mv_0R\cos\theta$. Dato che questo momento angolare è anche uguale al momento angolare inizialmente posseduto dall'omino (quando stava salendo sulla giostra), cioè mv_0R, si ha la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 4/4/2012 Firma: