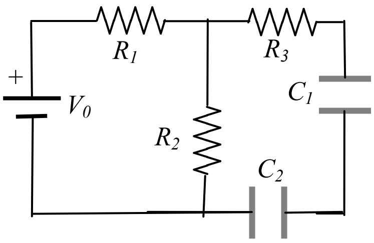
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 – 24/5/2012

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

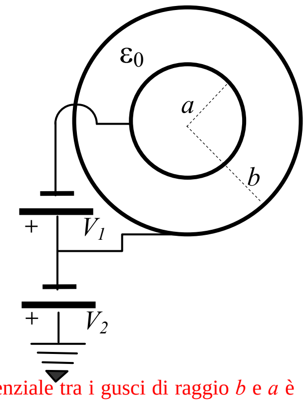
1. Il circuito elettrico di figura è costituito da tre resistori (R_1 = 4.0 kohm, R_2 = 1.0 kohm, R_3 = 0.50 kohm) e due condensatori (C_1 = 4.0 μF, C_2 = 6.0 μF) collegati come da schema ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 20 V.



a) Quanto vale, **in condizioni stazionarie**, la potenza P erogata dal generatore?
P = …………………………………… = ... W $V_0^2/(R_1+R_2)$ = 8.0x10^{-2} W [in condizioni stazionarie la potenza del generatore serve per bilanciare la potenza spesa per effetto Joule a causa del passaggio della corrente nei resistori. In condizioni stazionarie non passa corrente attraverso la serie dei condensatori C_1 e C_2, e quindi non passa corrente attraverso la resistenza R_3. Di conseguenza solo la serie di resistenze R_1 e R_2 è coinvolta nell'effetto Joule. Ricordando l'espressione della potenza per effetto Joule, $P = \Delta V^2/R$, si ottiene la soluzione]

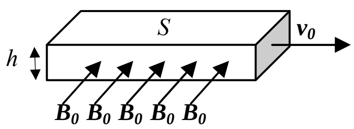
b) Quanto vale la carica Q_1 che si trova accumulata sul condensatore di capacità C_1 **in condizioni stazionarie**?
Q_1 = …………………………………… = ……… C $V_0R_2(C_1C_2)/((R_1+R_2)(C_1+C_2))$ = 9.6x10^{-6} C [per definizione di capacità, si ha $Q_1 = C_1\Delta V_{C1}$ con ΔV_{C1} differenza di potenziale ai capi del condensatore C_1. Tale differenza di potenziale può essere determinata osservando che, in condizioni stazionarie, non passa corrente attraverso la serie dei condensatori e dunque neppure attraverso la resistenza R_3. Di conseguenza ai capi di tale resistenza non c'è caduta di tensione. Quindi ai capi della serie dei due condensatori si trova la stessa differenza di potenziale che esiste ai capi della resistenza R_2, che vale $\Delta V_2 = R_2I = R_2V_0/(R_1+R_2)$. Poiché tale differenza di potenziale è applicata alla serie dei due condensatori, si ha $\Delta V_2 = \Delta V_{C1}+\Delta V_{C2} = Q_1/C_1+Q_2/C_2$. Dato che i due condensatori sono in serie, è anche $Q_2 = Q_1$, da cui, rimettendo tutto insieme, la soluzione]

2. Due gusci sferici sottili (in pratica due superfici sferiche), realizzati con materiale ottimo conduttore, sono montati in modo concentrico e hanno raggi rispettivamente pari ad a = 1..0 cm e b = 2.0 cm. Questi gusci sono collegati a due generatori ideali di differenza di potenziale V_1 = 1.0x10^3 V e V_2 = 2.0x10^3 V secondo lo schema di figura: in particolare, il generatore V_1 è collegato tra guscio "interno" e guscio "esterno" (polo positivo collegato al guscio "esterno"), mentre il generatore V_2 è collegato tra guscio "esterno" e la terra (polo positivo collegato a terra). Lo spazio tra i gusci è vuoto (vuoto è anche lo spazio dentro il guscio interno e fuori a tutto il sistema), si assume che il sistema abbia raggiunto **condizioni stazionarie** e che esso rispetti le condizioni della "simmetria sferica". [Supponete anche che "inizialmente", cioè quando il sistema è stato creato, i gusci fossero neutri. Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]



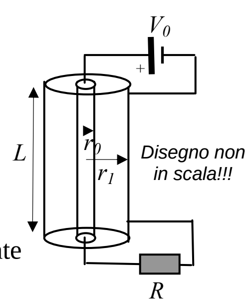
a) Quanto valgono le cariche elettriche Q_a e Q_b chesi accumulano, in condizioni stazionarie, sui gusci di raggio rispettivamente pari a a e b? [Esprimete anche il segno e fate in modo che si capisca davvero bene, in brutta, come le calcolate!]
Q_a = …………………………….= …….. C $4\pi\varepsilon_0V_1/(1/b-1/a)$ = -2.2x10^{-9} C [la differenza di potenziale tra i gusci di raggio b e a è $\Delta V_{ba} = V_b-V_a = V_1$. Nella regione $a<r<b$ il teorema di Gauss, debitamente applicato a una scatola sferica concentrica con i gusci, stabilisce che il campo, che è radiale, ha modulo $E = Q_a/(4\pi\varepsilon_0r^2)$. Ricordando che $\Delta V = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$, dove gli estremi di integrazione sono le posizioni (i valori della coordinata radiale, in questo problema a simmetria sferica) rispetto a cui si conosce la differenza di potenziale, e tenendo conto che il campo è radiale, si ha; $\Delta V_{ba} = V_1 = -\int_a^b (Q_a/(4\pi\varepsilon_0r^2))dr = (Q_a/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/a)$, da cui la risposta]
Q_b = …………………………….= …….. C $-4\pi\varepsilon_0V_2/(1/b)-Q_a = -4\pi\varepsilon_0b(V_2+V_1a/(b-a))$ =- 6.6x10^{-9} C [nella regione $r>b$ il teorema di Gauss conduce all'espressione del campo elettrico $E = (Q_a+Q_b)/(4\pi\varepsilon_0r^2)$. Tenendo conto che un punto posto a grande (infinita, ovvero tendente all'infinito) distanza dai gusci ha lo stesso potenziale, convenzionalmente nullo, della terra, si ha $\Delta V_{\infty b} = V_\infty - V_b = V_2 = -\int_b^\infty ((Q_a+ Q_b)/(4\pi\varepsilon_0r^2))dr = -(Q_a+Q_b)/(4\pi\varepsilon_0))(1/b)$, dove abbiamo tenuto conto che dividere per un valore "infinitamente grande" porta al limite a zero e che il guscio di raggio b , per come è collegato il generatore V_2, si trova a potenziale più basso (cioè negativo) rispetto a terra. Da qui la soluzione, dove abbiamo anche usato il valore di Q_a determinato in precedenza. Notate che i segni delle cariche "tornano", cioè sono coerenti con considerazioni banali sulle polarità dei generatori]

3. Una sottile lastra piena e omogenea di materiale conduttore (globalmente neutro) è posta in movimento in direzione orizzontale da un operatore esterno, che le impartisce una velocità **costante** e uniforme di modulo v_0 e verso come in figura (verso la destra della figura). Nella regione di spazio considerata insiste un campo magnetico esterno, costante e **uniforme**, di modulo B_0, direzione ortogonale rispetto al foglio della figura e verso come in figura.



a) Quanto vale, in **condizioni stazionarie** (di equilibrio) la carica elettrica Q che si viene a trovare sulla faccia **inferiore** della lastra? [Indicate con S l'area delle facce inferiore e superiore della lastra, e con h il suo spessore. Usate il simbolo ε_0 per la costante dielettrica del vuoto, che circonda la lastra, e supponete di poter "trascurare gli effetti ai bordi". Ovviamente, non essendoci valori numerici in questo esercizio, dovete limitarvi a scrivere un'espressione "letterale", indicando però il **segno**]
Q = ………………………….. $-\varepsilon_0v_0B_0S$ [sulle cariche positive e negative (in ugual numero, essendo la lastra scarica) che sono nella lastra agisce la forza di Lorentz $\boldsymbol{F_M} = q\boldsymbol{v_0}\mathrm{x}\boldsymbol{B_0}$. Tale forza ha modulo qv_0B_0 , direzione verticale (in figura) e verso dipendente dal segno delle cariche (verso il basso di figura per le cariche negative). All'equilibrio tale forza deve essere bilanciata dalla forza elettrica, di modulo qE^*, dovuta al campo elettrico impresso. Tale campo è generato dalla separazione di cariche prodotta dalla forza di Lorentz, cioè dalle cariche Q e $-Q$ che si vengono a trovare sulle facce inferiore e superiore della lastra. Si noti che, come suggerito dal testo (si possono trascurare gli effetti ai bordi), la distribuzione di queste cariche è omogenea sulle superfici delle due facce e che il campo creato è uniforme e formalmente simile a quello che si ha dentro un condensatore ad armature piane e parallele. Il modulo del campo impresso è allora $E^* = v_0B_0$ e la carica si determina con Gauss, usando una scatola di scarpe che ha un tappo fuori e uno dentro alla lastra ("teorema di Coulomb"). Osservando che il campo esterno è nullo per l'analogia con il condensatore, e tenendo conto in modo opportuno dei segni si ottiene la risposta]

4. Un sistema di conduttori, noto come "cavo coassiale", è costituito da un cilindro pieno di materiale ottimo conduttore, di raggio r_0 = 1.0 mm e lunghezza L = 1.0 m, a cui è coassiale un sottile guscio cilindrico di materiale ottimo conduttore, di spessore trascurabile, raggio r_1 = 1.0 cm e lunghezza pari a L. Un'"estremità" del cavo coassiale è collegata a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 23 V come mostrato in figura (il polo positivo è collegato al conduttore centrale), mentre l'altra "estremità" è chiusa su un resistore R = 46 ohm. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica e $\mu_0 = 4\pi$x10^{-7} T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto e trascurate gli "effetti ai bordi", cioè supponete che la simmetria del cavo coassiale sia effettivamente cilindrica]



a) Quanto vale la carica elettrica Q che si accumula in **condizioni stazionarie** sul conduttore centrale? [Spiegate bene in brutta il procedimento usato! Può farvi comodo ricordare che $ln(10) \sim 2.3$]

Q = ………………………………… ~ ...…. C $2\pi\varepsilon_0 L V_0/ln(r_1/r_0)$ ~ 5.5x10^{-10} C   [in condizioni stazionarie, il sistema si comporta dal punto di vista elettrostatico come un condensatore cilindrico, le cui armature sono i due conduttori. La differenza di potenziale tra le armature (essendo i materiali ottimi conduttori non c'è caduta di tensione muovendosi lungo la lunghezza del cavo coassiale) è $\Delta V = -V_0$ (il segno negativo dipende dal fatto che il conduttore esterno si trova a potenziale minore di quello interno per come è collegato il generatore). D'altra parte per definizione è $\Delta V = -\int_{r1}^{r2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r1}^{r2} E dr$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo scelto un sistema di riferimento cilindrico concentrico al cavo coassiale e notato che, per la simmetria del problema, il campo deve essere radiale. Il campo elettrico nella regione di spazio tra i conduttori non è uniforme e il suo modulo dipende dalla distanza r dall'asse del sistema. Per trovare la dipendenza $E(r)$ conviene usare il teorema di Gauss: $Q/\varepsilon_0 = \Phi_S(E)$.Scegliendo per il calcolo del teorema di Gauss un "barattolo" cilindrico di raggio generico r compreso tra i due conduttori, asse parallelo all'asse del cavo coassiale e lunghezza pari a quella del cavo coassiale si ha, tenendo conto del già citato carattere radiale del campo (il flusso passa solo attraverso la superficie laterale del barattolo), $\Phi_S(E) = 2\pi r L E(r)$. Si ottiene quindi: $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 L r)$. A questo punto, tale espressione funzionale del campo elettrico può essere introdotta nell'integrale scritto in precedenza, che dunque recita: $\Delta V = -V_0 = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L)) \int_{r1}^{r2}(1/r)dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))ln(r_2/r_1)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo risolto l'integrale. Da qui, esplicitando Q, si ottiene la soluzione]

b) Come si esprime (in modulo), e che direzione e verso possiede il vettore $\mathbf{S} = \mathbf{E}x\mathbf{B}/\mu_0$ che risulta dal prodotto vettoriale tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo magnetico $\mathbf{B}$ che si determinano all'interno del cavo coassiale, cioè nella regione di raggio $r_0<r<r_1$? [Per il modulo mi aspetto che scriviate una funzione della coordinata radiale r , senza usare valori numerici ma impiegando tutte le espressioni letterali delle varie grandezze note del problema. Evidentemente per rispondere al quesito dovete determinare separatamente campo elettrico e campo magnetico e farne il prodotto vettoriale. Spiegate bene in brutta il procedimento seguito!]

Direzione e verso: ……………………….. per la simmetria del sistema, il campo magnetico ha direzione tangenziale, cioè le linee di campo formano delle circonferenze concentriche all'asse del cavo coassiale. Il verso si deduce con la regola della mano destra (versione "ciao ciao"), tenendo conto del verso della corrente che scorre nel conduttore centrale, l'unica concatenata con una linea di circuitazione di raggio minore di r_2. D'altra parte il campo elettrico, che è stato già in pratica trattato nella soluzione del quesito precedente, ha direzione radiale uscente. A questo punto applicando la regola della mano destra per il prodotto vettoriale si ha che il vettore $\mathbf{S}$ ha direzione assiale ed è orientato verso il basso della figura]

S = ………………………………… $(V_0^2/(2R))(1/ln(r_1/r_0))(1/(\pi r^2))$ [dato che campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali fra loro, il modulo S si ottiene dal prodotto dei moduli dei campi. Il campo elettrico è già stato determinato prima e vale $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 L r) = V_0/(ln(r_1/r_0)r)$, dove abbiamo usato l'espressione di Q determinata sopra. Per il modulo del campo magnetico, avendo stabilito per ragioni di simmetria qual è la direzione del campo (tangenziale), conviene servirsi del teorema di Ampere. Usando come linea (chiusa) di circuitazione una circonferenza concentrica al cavo e di raggio r generico e notando che l'intensità del campo magnetico nella simmetria considerata può dipendere solo dal raggio, e dunque è costante su questa circonferenza, si ha che la circuitazione del campo vale $2\pi r B$. D'altra parte la corrente concatenata a questa circuitazione è tutta e solo la corrente che passa nel conduttore centrale, la cui intensità può essere facilmente determinata con la legge di Ohm come $I = V_0/R$. Da qui, mettendo tutto assieme, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale il flusso $\Phi(\mathbf{S})$ del vettore $\mathbf{S}$ sopra determinato calcolato su una sezione del cavo, ovvero su una corona circolare di raggio interno r_0 e raggio esterno r_1 che giace su un piano ortogonale all'asse del cavo? [La risposta a questa domanda richiede un po' di creatività di calcolo, per cui, se non ve la sentite, lasciatela per ultima. Nella risposta, da discutere ampiamente in brutta, dovreste anche individuare l'unità di misura acconcia]

$\Phi(\mathbf{S})$ = ………………………………… = ………. …… V_0^2/R = 11.5 W [il vettore di cui calcolare il flusso è ortogonale alla sezione considerata ed è funzione di r secondo la legge $1/r^2$. Per l'integrazione conviene suddividere la sezione in tante coroncine circolari di raggio r generico e "spessore" dr: infatti in tali coroncine il vettore $\mathbf{S}$ mantiene uniforme il suo modulo (e anche verso e direzione!). l'elemento di superficie determinato dalle coroncine è $dA = 2\pi r dr$ (qualcuno ci riconoscerà qualcosa!) e l'integrale di superficie diventa un integrale sulla variabile r: $\Phi(\mathbf{S}) = (V_0^2/(2R))(1/ln(r_1/r_0)) \int_{r1}^{r2} (1/(\pi r^2))2\pi r dr = (V_0^2/R)(1/ln(r_1/r_0)) \int_{r1}^{r2} (1/r)\, dr$, da cui la soluzione. Si noti che questa espressione è quella della potenza erogata dal generatore e "trasferita" al resistore per esservi "dissipata" per effetto Joule, come si conviene al flusso del "vettore di Poynting" $\mathbf{S}$, e quindi di misura in W]

d) Supponete che all'istante $t_0 = 0$ il generatore venga scollegato dalle armature. Come si scrive l'andamento temporale della carica $Q(t)$ che si trova sul conduttore centrale? [Dovete scrivere una funzione del tempo senza usare valori numerici ma impiegando le espressioni letterali delle varie grandezze del problema]

$Q(t)$ = ………………………………… $Q\, exp(-t ln(r_1/r_0)/(R 2\pi\varepsilon_0 L))$ [come già affermato, dal punto di vista elettrostatico il cavo coassiale si comporta come un condensatore cilindrico che, a partire dall'istante $t_0 = 0$, si viene a "scaricare" attraverso la resistenza R. Come si può facilmente dimostrare, l'andamento della carica accumulata su un'armatura segue un andamento esponenziale decrescente, del tipo $Q(t) = Q exp(-t/\tau)$, con Q valore della carica in condizioni stazionarie determinato sopra. Detta C la capacità del condensatore, il tempo caratteristico di scarica si esprime come $\tau = RC$. D'altra parte la capacità è stata in pratica determinata nella risposta al quesito a), poiché per definizione essa vale $C = |Q/\Delta V| = 2\pi L\varepsilon_0/ln(r_2/r_1)$. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 24/5/2012   Firma: