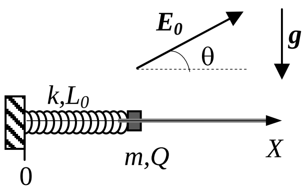
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

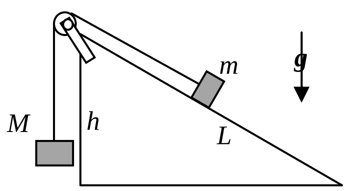
1. Un oggetto puntiforme si muove di moto **circolare uniformemente accelerato** su una circonferenza di raggio (costante) R = 50 cm centrata sull'origine di un riferimento cartesiano XY. All'istante t_0 = 0 l'oggetto si trova a passare per la posizione di coordinate cartesiane $x_0 = R$, $y_0 = 0$ con velocità di componenti cartesiane $v_{0X} = 0$ e $v_{0Y} = v_0$ = 2.0 m/s; si sa che il punto ripassa (per la "prima volta") per la posizione iniziale all'istante t' = 500 ms.
   a) Quanto vale la componente a_{0X} dell'accelerazione lungo l'asse X che l'oggetto possiede all'istante iniziale t_0?
   a_{0X} = ………………………………… = ……… m/s^2 $-v_0^2/R$ = -8.0 m/s^2 [l'accelerazione ha una componente radiale pari all'accelerazione centripeta, $a_C = v_0^2/R$, e una componente tangenziale $a_T = \alpha R$. All'istante considerato la direzione radiale coincide con l'asse X, per cui la componente richiesta è pari all'accelerazione centripeta (con il segno negativo per esprimere il carattere centripeto!)]
   b) Quanto vale il **modulo** della velocità ***v'*** dell'oggetto all'istante t'?
   v' = ………………………………… = ……… m/s $v_0 +\alpha Rt' = v_0 + 4\pi R/t' - 2v_0 = 4\pi R/t' - v_0$ = 10.6 m/s [la velocità è solo tangenziale (il moto è circolare!) e vale $\omega' R$, con $\omega' = \omega_0 + \alpha t'$ e $\omega_0 = v_0/R$. Il valore dell'accelerazione angolare α si trova dalla legge del moto: $2\pi = \omega_0 t' + (\alpha/2)t'^2$, da cui $\alpha = 4\pi/t'^2 - v_0/(Rt')$]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto possiede una carica elettrica $Q > 0$ ed è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, il cui altro estremo è inchiodato all'estremo sinistro della guida (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X orizzontale, come l'asse della molla, orientato verso la destra. In tutta la regione di spazio di interesse per l'esperimento insiste un campo elettrico **esterno uniforme e costante** di modulo E_0. Come rappresentato in figura, la direzione di tale campo forma un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale e il verso è "verso destra". [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiano le espressioni "letterali" dei dati noti del problema]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto nel sistema di riferimento dato? [Dovete scrivere una **funzione** di x, posizione generica del manicotto nel riferimento dato]
   $a(x)$ = ………………………………… $-(k/m)x+(k/m)L_0+(QE_0/m)\cos\theta$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo la direzione della guida, dunque l'accelerazione si considera lungo tale direzione (nella direzione ortogonale alla guida essa è nulla a causa del vincolo!). Sul manicotto agisce la componente della forza elettrica $QE_0\cos\theta$ orientata verso destra (la carica è positiva!) e la forza elastica $-k(x-L_0)$, da cui la soluzione]
   b) Supponete ora che il manicotto venga spostato da una qualche causa esterna (una manina) nella posizione $x_0 = L_0$ e che da qui esso venga lasciato libero di muoversi senza impartirgli alcuna velocità iniziale. Determinate la coordinata x' alla quale il manicotto si ferma (istantaneamente e "per la prima volta"). Discutete anche se esistono delle condizioni sui valori numerici delle grandezze che permettono o impediscono di ottenere quanto ipotizzato in questa domanda.
   x' = ………………………………… $L_0+2QE_0\cos\theta/k$ [dato che non ci sono forze dissipative si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo e la condizione "finale" dell'esercizio richiede che esso sia di nuovo fermo, si ha $\Delta E_K = 0$. La variazione di energia potenziale contiene due termini, uno dovuto alla forza elettrica e l'altro alla forza elastica: $\Delta U = \Delta U_{ELE}+\Delta U_{ELA}$. Notando che la forza elettrica è costante e uniforme, e che la sua proiezione nella direzione del moto è $QE_0\cos\theta$, si ha $\Delta U_{ELE} = -QE_0\cos\theta\Delta x$, con $\Delta x = x'-x_0 = x'-L_0$, Notando che inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, nella quale l'energia elastica è nulla, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)(x'-L_0)^2$. Si ottiene allora l'equazione algebrica di secondo grado: $-QE_0\cos\theta(x' - L_0) + (k/2)(x'- L_0)^2 = 0$. Questa equazione ha due soluzioni: $x' = L_0$ e $(x'-L_0)=2QE_0\cos\theta/k$, da cui la risposta]
   Discussione: ……………………………. La soluzione dell'equazione di secondo grado che abbiamo scartato indica il ritorno del manicotto nella posizione iniziale. Quella che è stata mantenuta e indicata in risposta è invece la posizione in cui avviene il primo arresto del manicotto. Se la forza elettrica è orientata verso la destra, come per i dati del problema, questa posizione è oltre la posizione di equilibrio (che si trova annullando l'accelerazione determinata prima). Non ci sono dunque condizioni da imporre.

3. Una (piccola) cassa di massa m = 6.0 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e lunghezza L = 4.0 m. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 8.0 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come



rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

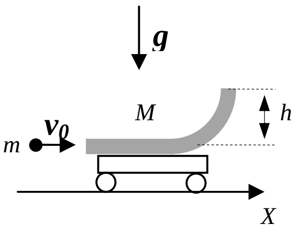
a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

a = …………………………………… = ……….. m/s^2 $g(M\text{-}mh/L)/(M+m)$ = 3.5 m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g\text{-}T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m$, con $\sin\theta = h/L$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che inizialmente la cassa si trovi ferma alla base del piano inclinato (cioè al suo punto più basso) e che la fune sia tesa, quanto vale in modulo la velocità v' con cui la cassa raggiunge la sommità del piano stesso? [Considerate, ovviamente, che non ci siano "ostacoli" di tipo geometrico, ad esempio lunghezza e/o altezza del piano inclinato, che impediscano questo processo e ricordate che le masse sono puntiformi]

v' = …………………………………… ~ ………… m/s $(2(MgL\text{-}mgh)/(m+M))^{1/2}$ ~ 5.3 m/s [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Poiché all'inizio tutto è fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2$, dove $V'^2=v'^2$ per l'inestensibilità della fune. Inoltre nel processo la cassa sale di un tratto h mentre la massa scende di un tratto L (sempre per l'inestensibilità!), per cui $\Delta U_G = mgh\text{-}MgL$. Da qui la soluzione]

4. Un **sottile** tubo cavo è piegato in modo da formare una specie di manico d'ombrello: esso, infatti, può essere immaginato come composto da un tratto rettilineo (asse in direzione orizzontale) seguito da un tratto piegato a formare un quarto di circonferenza. Il tubo è montato sopra un carrello che si può muovere con **attrito trascurabile** su una strada orizzontale (vedi figura): la massa complessiva del sistema è M ed inizialmente carrello+tubo sono fermi. Un proiettile puntiforme, di massa $m = M/5$, si infila nel tubo avendo una velocità di modulo v_0 diretta orizzontalmente nel verso di figura. Il diametro del tubo è tale che il proiettile ci può scorrere dentro con **attrito trascurabile**. L'"altezza" del tratto di tubo curvilineo (vedi figura) è h. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni "letterali" dei vari parametri. Usate il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Discutete per bene, in brutta, quali grandezze del sistema si conservano e spiegate con chiarezza il perché.

Discussione: …………………………………… Nel processo considerato non agiscono forze dissipative, dunque si conserva l'energia meccanica del sistema, e non ci sono forze esterne dirette orizzontalmente, e dunque si conserva la quantità di moto totale del sistema **in questa direzione.**

b) Come si esprimono, **in modulo**, le velocità V e v che il carrello e il proiettile possiedono nell'istante in cui il proiettile esce dal tubo?

V = …………………………………… $mv_0/(m+M)=v_0/6$ [la conservazione della componente X della quantità di moto totale del sistema conduce a: $mv_0 = mv_X+MV$, dove abbiamo notato che il carrello+tubo si può muovere solo in direzione orizzontale (cioè $|V_X| = |V|$) e che inizialmente la quantità di moto è solo diretta lungo X , essendo questa la direzione del moto del proiettile. Nell'istante in cui il proiettile fuoriesce dal tubo esso possiede, rispetto al carrello, solo velocità in direzione verticale; quindi deve essere $v_X=V$, da cui la soluzione, per la quale è stata anche considerata la relazione tra le masse indicata nel testo]

v = …………………………………… $(v_0^2 - (M/m)V^2\text{-}2gh)^{1/2} = (31v_0^2/36\text{-}2gh)^{1/2}$ [la conservazione dell'energia meccanica del sistema si scrive: $0=(m/2)v^2+(M/2)V^2\text{-}(m/2)v_0^2+mgh$ (notate che nell'energia va considerato il modulo della velocità del proiettile, e non solo qualche sua componente!). Sostituendo l'espressione di V trovata sopra ed usando la relazione tra le masse indicata nel testo si ottiene la soluzione]

c) Come si esprime la velocità del centro di massa del sistema, v_{CM}, nell'istante in cui il proiettile esce dal tubo?

v_{CM} = …………………………………… $(41v_0^2/36\text{-}2gh)^{1/2}/6$ [a questa domanda occorre rispondere esprimendo il **modulo** della velocità, cioè $v_{CM} = (v_{CMX}^2+v_{CMY}^2)^{1/2}$. La componente lungo X rimane costante nel processo e ha il valore $v_{CMX} = v_0(m/(m+M)) = v_0/6$. La componente Y è invece $mv_Y/(m+M) = v_Y/6$, come si ottiene facilmente notando che il carrello **non** possiede mai velocità in direzione orizzontale. Pertanto è $v_{CM} = ((v_0/6)^2+(v_Y/6)^2)^{1/2} = (v_0^2+v_Y^2)^{1/2}/6$. Si ha poi: $v^2 = v_Y^2+v_X^2 = v_Y^2+V^2$, da cui $v_Y^2=v^2\text{-}V^2 = (31v_0^2/36\text{-}2gh)\text{-}v_0^2/36 = 5v_0^2/36\text{-}2gh$. Da qui la soluzione. Notate che in tutto questo esercizio si è (tacitamente) supposto che i parametri del problema, in particolare il valore di v_0 , fossero tali da consentire al proiettile di fuoriuscire dal tubo!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/12/2012 Firma:

B

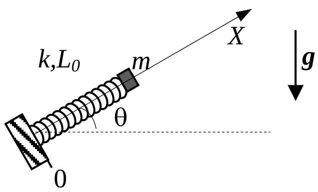
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

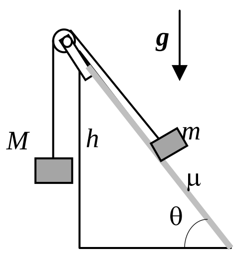
1. Un oggetto puntiforme si muove su una circonferenza di raggio R = 10 cm con accelerazione angolare **costante ed uniforme** α (incognita). All'istante t_0 = 0 l'oggetto **parte da fermo** dalla posizione angolare (misurata rispetto ad un riferimento polare) $\theta_0 = \pi/4$; si sa che esso ripassa (per la "prima volta") nella questa stessa posizione angolare all'istante t' = 500 ms.
   a) Quanto vale il **modulo** dell'accelerazione ***a'*** che l'oggetto possiede all'istante t'?
   a' = …………………………….. ~ .... m/s^2 $((\omega'^2R)^2+(\alpha R)^2)^{1/2} = (((\alpha\ t')^2R)^2+(\alpha R)^2)^{1/2} = \alpha R(\alpha^2t'^4+1)^{1/2} = (4\pi/t'^2)R(16\pi^2+1)^{1/2}$ ~ 63 m/s^2 [essendo il moto circolare, l'accelerazione ha componente radiale pari all'accelerazione centripeta, in modulo ω'^2R, e componente tangenziale pari a αR. Il moto è circolare uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \theta_0 + (\alpha/2)t^2$. Per la condizione del problema deve essere $\theta(t') = \theta_0+2\pi = \theta_0+(\alpha/2)t'^2$, da cui si ricava il valore di $\alpha = (4\pi/t'^2)$. La velocità angolare all'istante considerato è poi $\omega' = \alpha\ t'$ (l'oggetto parte da fermo!), da cui la soluzione]
   b) Quanto vale il **modulo** della velocità ***v'*** dell'oggetto all'istante t'?
   v' = …………………………………… = ……… m/s $(4\pi/t'^2)t'R = 4\pi R/t' = (16\pi^2+1)^{1/2}$ = 2.5 m/s [essendo il moto circolare la velocità ha solo componente tangenziale: $v' = \omega'R = \alpha t'R$, da cui, inserendo l'espressione di α determinata sopra, la soluzione]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo una direzione che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 1.0x10^2 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 2.0 m, il cui altro estremo è inchiodato alla base della guida (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X parallelo alla guida (e all'asse della molla) orientato verso l'alto. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.73]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto nel sistema di riferimento dato? [Dovete scrivere una **funzione** di x, posizione generica del manicotto nel riferimento dato. Per questa risposta **non** usate valori numerici ma riferitevi alle grandezze note del problema attraverso le espressioni "letterali" riportate nel testo]
   $a(x)$ = ………………………………… $-(k/m)x+(k/m)L_0-gsin\theta$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo la direzione, inclinata, della guida, dunque l'accelerazione si considera lungo tale direzione (nella direzione ortogonale alla guida essa è nulla a causa del vincolo!). Sul manicotto agisce la componente della forza peso $-mgsin\theta$, dove il segno tiene conto dell'orientazione dell'asse, e la forza elastica $-k(x-L_0)$, da cui la soluzione]
   Quanto vale la posizione di equilibrio x_{EQ} del manicotto e che tipo di moto compie il manicotto? [Spiegate bene in brutta le motivazioni delle vostre affermazioni]
   x_{EQ} = …………………………………… = ……….. m $L_0-mgsin\theta/k$ = 1.9 m [la posizione di equilibrio è quella che annulla l'accelerazione di cui sopra, cioè si ha $a(x=x_{EQ})$ = 0, da cui la risposta; il moto è armonico, dato che l'equazione del moto ha la forma del moto armonico. La pulsazione vale $\omega = (k/m)^{1/2}$]
   b) Supponete ora che il manicotto venga spostato da una qualche causa esterna (una manina) nella posizione $x_0 = L_0/2$ e che da qui esso venga lasciato libero di muoversi senza impartirgli alcuna velocità iniziale. Quanto vale, in modulo, la sua velocità v' nell'istante in cui passa, se ci passa, per la "prima volta", nella posizione $x'=L_0$?
   v' = …………………………………… ~ ………… m/s $(kL_0^2/(4m)-gL_0sin\theta)^{1/2}$~ 3.9 m/s [dato che non ci sono forze dissipative si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale contiene due termini, uno dovuto alla forza peso e l'altro alla forza elastica: $\Delta U = \Delta U_G+\Delta U_{ELA}$. Si ha $\Delta U_G = mg\Delta h$. Nel processo il manicotto modifica la sua quota di un tratto $\Delta h = (x'-x_0)sin\theta = L_0sin\theta/2$, per cui $\Delta U_G = mgL_0sin\theta/2$. Inoltre, dato che alla "fine" del processo considerato la molla si trova alla sua lunghezza di riposo e dunque la sua energia elastica è nulla, si ha $\Delta U_{ELA} = -(k/2)((x'-L_0)^2 = -(k/8)L_0^2$. Mettendo tutto insieme si trova la soluzione]

3. Una (piccola) cassa di massa m = 6.0 kg può scorrere lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e inclinazione $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è scabro e presenta un coefficiente di attrito (dinamico) μ = 0.50. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 14 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato e che si osserva che la massa M si muove verso il basso. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

a = …………………………………… ~ ……….. m/s^2 $g(M-m(\sin\theta+\mu\cos\theta))/(M+m)$ ~ 3.6 m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. Se non ci fosse attrito, è evidente che la massa scenderebbe verso il basso e la cassa si muoverebbe verso l'alto del piano inclinato, per cui l'attrito deve essere diretto verso il basso. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m-F_A/m$, dove $F_A = \mu N = \mu mg\cos\theta$ è il modulo della forza di attrito, Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale il lavoro della forza di attrito L_A quando la cassa percorre per intero il piano inclinato (partendo dal basso e arrivando sulla sommità)?

L_A = …………………………………… ~ ………… J $-\mu mgh/tg\theta$ ~ -34 J [la forza di attrito è costante e uniforme, e sempre diretta in verso opposto allo spostamento, che vale $h/\sin\theta$ per semplici ragioni geometriche. Quindi $L_A = -F_A h/\sin\theta = -\mu mgh/tg\theta$. Da qui la soluzione]

4. Un trenino è composto da due carrellini uguali, entrambi di massa m = 1.0 kg, collegati da una molla di costante elastica k = 2.0 N/m e massa trascurabile. Il trenino si muove **con attrito trascurabile** lungo una direzione orizzontale (asse X). Inizialmente i due carrelli si muovono entrambi con la stessa velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s e la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 10 cm ; la compressione della molla è mantenuta da una fune che, all'istante t_0 = 0, viene improvvisamente tagliata. Si osserva allora che la molla comincia a distendersi fino a raggiungere un'estensione massima il cui valore assoluto è Δ_{MAX}. [Notate che le estremità della molla rimangono sempre agganciate ai due carrellini; supponete inoltre che l'asse della molla rimanga sempre parallelo all'asse X]

a) Quanto vale Δ_{MAX}? [Spiegate per bene in brutta il procedimento adottato!]

Δ_{MAX} = …………………………….. ~ .... m Δ_0 = 0.10 m [sul sistema non agisce attrito, dunque l'energia meccanica si conserva, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Dette v_1 e v_2 le velocità dei due carrellini all'istante di massima estensione della molla, si ha $\Delta E_K = (m/2)(v_1^2+v_2^2) - (m/2)(2v_0^2)$. L'unica forza conservativa che fa lavoro è la forza elastica, per cui $\Delta U = \Delta U_{ELA} = (k/2)(\Delta_{MAX}^2-\Delta_0^2)$. Inoltre il sistema è isolato lungo l'asse X, per cui si conserva la quantità di moto totale in questa direzione, cioè $2mv_0 = m(v_1+v_2)$, ovvero $2v_0 = v_1+v_2$. Le due equazioni di conservazione danno luogo a un sistema di due equazioni e tre incognite. Per la soluzione occorre trovare un'altra equazione. Poiché l'istante, o configurazione, considerata è quella di massima estensione della molla, occorre che $v_1 = v_2$. Se si deve conservare la quantità di moto, è allora necessario che $v_1 = v_2 = v_0$. La conservazione dell'energia meccanica stabilisce allora $\Delta_{MAX}^2 = \Delta_0^2$, da cui la soluzione (esprimendo i valori assoluti della compressione/estensione della molla, il segno è lo stesso, ma ovviamente la configurazione fisica è diversa, dato che inizialmente la lunghezza della molla è minore di quella di riposo, mentre alla fine si verifica l'opposto]

b) Quanto valgono, nell'istante in cui la molla raggiunge la massima estensione Δ_{MAX}, le velocità v_1 e v_2 dei due carrellini?

v_1 = …………………………….. =........... m/s v_0 = 5.0 m/s

v_2 = …………………………….. =........... m/s v_0 = 5.0 m/s [vedi sopra]

c) Quanto vale l'istante t' in cui la molla raggiunge la massima estensione Δ_{MAX}? [Considerate il primo di una serie di istanti che si ripetono periodicamente e spiegate per bene in brutta le motivazioni del procedimento che adottate]

t' = …………………………….. = ... s $T/2 = \pi(m/(2k))^{1/2}$ = 1.5 s [il moto **relativo** dei due carrellini avviene sotto l'effetto della forza elastica. Si ha dunque $a_{REL} = a_1-a_2 = -k(x_2-x_2-L_0)/\mu$, dove la massa ridotta μ è tale che $1/\mu = 1/m+1/m = 2/m$ (ovvero, $\mu = m/2$). L'equazione scritta indica che il moto relativo è armonico, con pulsazione $\omega = (2k/m)^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/(2k))^{1/2}$. Essendo la velocità relativa nulla sia nell'istante iniziale che in quello considerato, è facile rendersi conto che la situazione descritta si verifica all'istante t' corrispondente a metà del periodo, da cui la risposta]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/12/2012 Firma:

C

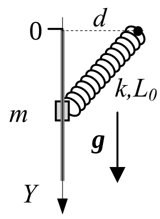
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

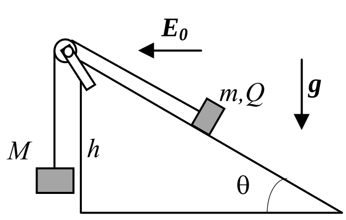
1. Un oggetto puntiforme si muove di moto **circolare uniformemente accelerato** su una circonferenza di raggio (costante) R = 20 cm centrata sull'origine di un riferimento cartesiano XY. All'istante t_0 = 0 l'oggetto si trova a passare per la posizione di coordinate cartesiane $x_0 = 0$, $y_0 = R$ con velocità di componenti cartesiane $v_{0X} = v_0$ = -1.0 m/s e v_{0Y} = 0; si sa che il punto ripassa (per la "prima volta") nella posizione iniziale all'istante t' = 500 ms.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità **v'** dell'oggetto all'istante t'?
   v' = …………………………………… = ……… m/s $4\pi R/t'+v_0$ = 9.0 m/s [la velocità è solo tangenziale (il moto è circolare!) e vale $\omega' R$, con $\omega' = \omega_0+\alpha t'$ e $\omega_0 = |v_0|/R$. Notate che il segno di modulo è necessario perché v_0 è negativo, ma questa scelta (fate un disegnino!) corrisponde convenzionalmente a una velocità angolare positiva (moto in verso antiorario). Il valore dell'accelerazione angolare α si trova dalla legge del moto: $\theta' - \theta_0 = 2\pi = \omega_0 t' + (\alpha/2)t'^2$, da cui $\alpha = 4\pi/t'^2-2\omega_0/t'$). Si ottiene dunque $\omega' = \omega_0 + 4\pi/t'-2\omega_0 = 4\pi/t' - \omega_0$, da cui la soluzione]
   b) Quanto vale $tg\theta_0$, con θ_0 angolo che il vettore accelerazione forma con l'asse X nell'istante t_0?
   $tg\theta_0$ = …………………………………… = ……… $v_0^2/(\alpha R) = v_0^2/(4\pi/t'^2+2v_0/(Rt')) = 1.4\mathrm{x}10^{-2}$ [la tangente dell'angolo considerato è data dal rapporto tra le componenti Y e X dell'accelerazione nell'istante considerato, cioè $tg\theta_0 = a_Y/a_X$.. Vista la geometria del problema, tali componenti corrispondono rispettivamente all'accelerazione centripeta $-v_0^2/R$ e all'accelerazione tangenziale $-\alpha R$, dove il segno negativo è dovuto al fatto che un'accelerazione angolare positiva corrisponde a valori negativi dell'accelerazione tangenziale misurata nel punto considerato (fate un disegnino per rendervene conto!), per cui $tg\theta_0 = v_0^2/(\alpha R)$. Sostituendo l'espressione di $\alpha = 4\pi/t'^2-2\omega_0/t' = 4\pi/t'^2+2v_0/(Rt')$ determinata sopra si ottiene la soluzione. Notate che il piccolo valore ottenuto indica che il vettore accelerazione è quasi del tutto orientato lungo l'asse X , cioè che all'istante considerato l'accelerazione tangenziale prevale su quella centripeta, come si può facilmente dimostrare calcolandosi separatamente le due componenti dell'accelerazione]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg si muove con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k **incognita** e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m, il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale. L'intero sistema ha la configurazione di figura, dove sono indicati l'asse Y che **dovete** impiegare (verticale, diretto verso il basso e centrato all'estremità superiore della guida) e la distanza d fra chiodo che fissa la molla e guida, che vale $d = L_0$ = 1.0 m.



   a) Come si scrive l'equazione del moto del manicotto, $a(y)$? Discutete per benino, in brutta, se vi aspettate che il moto del manicotto sia armonico o no. [Nelle risposte **non** dovete utilizzare valori numerici, ma dovete limitarvi a esprimere funzioni della coordinata y del manicotto rispetto all'asse Y di figura, mettendoci dentro le espressioni letterali dei dati noti del problema e usando il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   $a(y)$ = …………………………………… $g - (k/m)((L_0^2+y^2)^{1/2}-L_0)(y/(L_0^2+y^2)^{1/2})$ [il manicotto si muove sotto l'effetto della forza peso, mg , e della componente verticale della forza elastica. In corrispondenza a una posizione y generica del manicotto, la lunghezza della molla vale, per la geometria del sistema, $(y^2+L_0^2)^{1/2}$ (teorema di Pitagora!) e quindi il **modulo** della forza elastica è $k((y^2+L_0^2)^{1/2}-L_0)$. La componente verticale si ottiene proiettando tale forza lungo l'asse Y, cioè moltiplicandola per $-y/(y^2+L_0^2)^{1/2}$. dove il segno negativo tiene conto del verso e dell'orientazione dell'asse. Da qui si ottiene la soluzione]
   Discussione: …………………………………… L'equazione di un generico moto armonico rispetto alla coordinata generica ξ recita: $a(\xi) = -K_1\xi + K_2$, con $K_{1,2}$ costanti e $K_1 > 0$. Si vede che l'equazione del moto trovata per il manicotto **non** è di tipo armonico. Tuttavia il moto può essere armonico nel caso in cui L_0 sia trascurabile (si riconduce direttamente alla forma data), oppure, come si potrebbe dimostrare con un po' di matematica (che non tutti sapete, e neanche io), nel caso di piccole oscillazioni vicino alla posizione di equilibrio]
   b) Immaginate ora che il manicotto venga portato da una qualche causa esterna nella posizione iniziale $y_0 = 0$ e da qui lasciato andare con velocità nulla. Si osserva che il manicotto scende fino ad arrestarsi (istantaneamente) quando ha raggiunto la coordinata $y' = 2L_0$. Quanto vale la costante elastica della molla, k?
   k = …………………………………… ~ ……….. N/m $4mg/(L_0(5^{1/2}-1)^2)$ ~ 51 N/m [si conserva l'energia meccanica, dunque $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Dato che i due istanti considerati come "iniziale" e "finale" del processo corrispondono entrambi a situazioni in cui il manicotto è fermo, si ha ΔE_K = 0. Alla variazione di energia potenziale contribuiscono la forza peso, che dà una variazione di energia potenziale $\Delta U_G = -mgy'$ (la variazione di quota è pari a y' ed è tale che il manicotto scende, da cui il segno negativo!) e la forza elastica, $\Delta U_{ela} = (k/2)((y'^2+d^2)^{1/2}-L_0)^2-(k/2)(d-L_0)^2$, dove abbiamo ricordato che l'**energia** elastica è $U_{ela} = (k/2)(L-L_0)^2$, con L lunghezza della molla, e abbiamo fatto qualche considerazione pitagorica per esprimere la lunghezza della molla quando il manicotto è nella posizione y' . Ora sfruttando la condizione espressa nel testo $d = L_0$ si osserva che l'energia elastica "iniziale" è nulla. Si ha dunque: $0 = -mgy'+(k/2)((y'^2+L_0^2)^{1/2}-L_0)^2 = -2mgL_0 + (k/2)(5^{1/2}-1)^2L_0^2$. Da qui, risolvendo per l'incognita k , la risposta]

3. Una (piccola) cassa di massa m può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza h e inclinazione θ rispetto all'orizzontale. La cassa, che reca una carica elettrica $Q > 0$, è legata a una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è



vincolato ad un oggetto di massa M. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato e che si osserva che la massa M si muove verso il basso. Inoltre si sa che nella regione di interesse per l'esperimento è presente un campo elettrico **esterno, uniforme e costante** di modulo E_0 e direzione orizzontale (orientato verso la sinistra di figura). [In questo esercizio non ci sono valori numerici, dunque dovete necessariamente limitarvi a usare le espressioni "letterali" dei dati indicati nel testo]

a) Come si scrive l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

a = …………………………………… $(g(M-m\sin\theta)+QE_0\cos\theta)/(M+m)$ [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m+QE_0\cos\theta/m$, Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che inizialmente la cassa si trovi ferma alla base del piano inclinato (cioè al suo punto più basso) e che la fune sia tesa, come si scrive il modulo della velocità v' con cui la cassa raggiunge la sommità del piano stesso? [Considerate, ovviamente, che non ci siano "ostacoli" di tipo geometrico, ad esempio lunghezza e/o altezza del piano inclinato, che impediscano questo processo, ricordate che le masse sono puntiformi e immaginate che le condizioni effettive del problema conducano proprio alla risalita della cassa lungo il piano]

v' = …………………………………… $(2(Mgh/\sin\theta-mgh+QE_0h/tg\theta)/(m+M)))^{1/2}$ [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché all'inizio tutto è fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2$, dove $V'^2=v'^2$ per l'inestensibilità della fune. La variazione di energia potenziale comprende due termini, uno dovuto alla forza peso e l'altro alla forza elettrica (entrambe conservative). Nel processo la cassa sale di un tratto h mentre la massa scende di un tratto $L=h/\sin\theta$ (sempre per l'inestensibilità!), per cui $\Delta U_G = mgh-Mgh/\sin\theta$. Inoltre la forza elettrica è costante e uniforme e diretta orizzontalmente, per cui $\Delta U_{ele} = -QE_0h/tg\theta$, dove abbiamo notato che $h/tg\theta$ è la proiezione dello spostamento in direzione orizzontale. Da qui la soluzione]

4. In un esperimento di fisica atomica vengono creati due ioni identici (hanno entrambi la stessa massa $m = 1.6\times10^{-26}$ kg e carica elettrica $q = 1.6\times10^{-19}$ C), denominati "1" e "2", che inizialmente si trovano a grandissima distanza l'uno dall'altro (praticamente "infinita") e hanno velocità dirette lungo l'asse X di un riferimento, chiamate v_{01} e v_{02}. Queste velocità hanno **lo stesso segno** e sono scelte in modo tale che lo ione 1 tende a "tamponare" lo ione 2: infatti è $v_{01} = 2v_{02}$, con $v_{01} = 2.0\times10^3$ m/s. Nel **sistema** considerato **tutte** le forze diverse da quella di interazione elettrostatica possono essere considerate **trascurabili**. Si osserva che lo ione 1 si avvicina allo ione 2 fino a che la distanza tra di loro raggiunge un valore minimo d_{MIN}. [Ricordate che la forza elettrostatica tra cariche puntiformi q si esprime come $\boldsymbol{F_E} = \hat{\boldsymbol{e}}\, \kappa_E q^2/r^2$, essendo $\kappa_E = 9.0\times10^9$ N m^2/C^2 , r la distanza tra le due cariche e $\hat{\boldsymbol{e}}$ il versore della congiungente tra le due cariche. Ricordate anche che, per una variabile generica ξ, si ha $\int(1/\xi^2)d\xi = -1/\xi$]

a) Quanto valgono le velocità v_1 e v_2 dei due ioni nell'istante in cui essi si trovano alla distanza d_{MIN}? [Spiegate per bene, in brutta, come giungete alla soluzione]

v_1 = …………………………………… = ……… m/s $3mv_{02}/(2m) = 3v_{01}/4 = 1.5\times10^3$ m/s [alla minima distanza la velocità **relativa** dei due ioni è nulla, dato che un attimo prima essa ha un certo segno (le cariche si avvicinano) e un attimo dopo ha segno opposto (le cariche si allontanano). Questo significa che all'istante considerato è $v_1 = v_2 = v$. Inoltre il sistema è palesemente isolato, dato che, come recita il testo, tutte le forze escluse quella di interazione (interna al sistema!) sono trascurabili. Quindi si conserva la quantità di moto, per cui: $m_1\boldsymbol{v_1}+m_2\boldsymbol{v_2} = 2m\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v_{01}} + m_2\boldsymbol{v_{02}} = 3m\boldsymbol{v_{02}}$, da cui, tenendo conto che il problema è unidimensionale, la soluzione]

v_2 = …………………………………… = ……… m/s $v_1 = 1.5\times10^3$ m/s [vedi sopra]

b) Quanto vale la velocità v_{CM} del centro di massa del sistema dei due ioni nell'istante in cui essi si trovano alla distanza d_{MIN}?

v_{CM} = …………………………………… = ……… m/s $v_1 = 1.5\times10^3$ m/s [la velocità del centro di massa, che resta costante durante l'intero processo essendo il sistema isolato, è $(mv_1+mv_2)/(2m) = v = (mv_{01}+mv_{02})/(2m) = 3v_{02}/2$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale d_{MIN}?

d_{MIN}= …………………………………… = …….. µm $16\kappa_E q^2/(31mv_{01}^2) = 1.9\times10^{-9}$ m = 0.0019 µm [nel processo si conserva l'energia meccanica, dato che non ci sono forze dissipative. Si ha quindi: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K = (m/2)v_1^2+(m/2)v_2^2-(m/2)v_{01}^2-(m/2)v_{02}^2 = (m/2)(2v_1^2-5v_{01}^2)=(m/2)v_{01}^2(9/8-5)=-(m/2)v_0^2(31/8)$, dove abbiamo usato tutto quanto stabilito nella risposta al quesito precedente. La variazione di energia potenziale è dovuta al lavoro della forza elettrica di interazione: $\Delta U = -L_E = -\int_\infty^{dMIN}\boldsymbol{F_E}\cdot d\boldsymbol{l}$, dove abbiamo posto come estremo di integrazione iniziale l'"infinito" per tenere conto del fatto che inizialmente le cariche si trovano a grande distanza tra di loro (a tale distanza gli effetti della forza di interazione sono trascurabili). Il prodotto scalare che si trova nell'integrando si "risolve" notando che la forza è diretta come la congiungente tra le cariche, che corrisponde alla direzione dell'asse X. Si ha quindi $\Delta U = --\int_\infty^{dMIN}F_E\,dx = -\kappa_E q^2\int_\infty^{dMIN}(1/x^2)dx = \kappa_E q^2(1/x)_\infty^{dMIN} = \kappa_E q^2/d_{MIN}$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/12/2012 Firma:

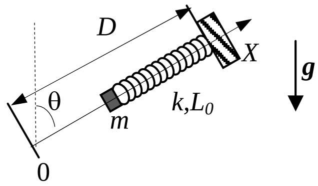
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

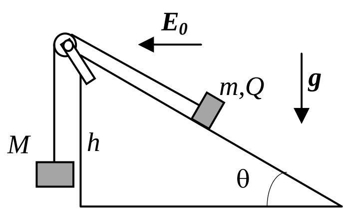
1. Un oggetto puntiforme si muove su una circonferenza di raggio R = 50 cm con accelerazione angolare **costante ed uniforme** α (incognita). All'istante t_0 = 0 l'oggetto **parte da fermo** dalla posizione angolare (misurata rispetto ad un riferimento polare) $\theta_0 = \pi/3$; si sa che esso ripassa (la "prima volta") per questa stessa posizione angolare all'istante t' = 10 s.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità $\mathbf{v'}$ che l'oggetto possiede all'istante t'?
   v' = …………………………….. = ... m/s $\omega(t')R = \alpha t'R = (4\pi/t'^2)\, t'R = (4\pi/t')\, R$ = 0.63 m/s [il moto è circolare uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \theta_0 + (\alpha/2)t^2$. Per la condizione del problema deve essere $\theta(t') = \theta_0 + 2\pi = \theta_0 + (\alpha/2)t'^2$, da cui si ricava il valore di $\alpha = (4\pi/t'^2)$. La velocità tangenziale è poi $v' = \omega(t')R$, da cui la soluzione, tenendo conto che $\omega(t') = \alpha t'$]
   b) Quanto vale il **modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a'}$ che l'oggetto possiede all'istante t'?
   a' = …………………………….. ~ .... m/s^2 $(4\pi/t'^2)R(16\pi^2+1)^{1/2}$ ~ 0.79 m/s^2 [l'accelerazione ha una componente radiale pari all'accelerazione centripeta, $a_C' = v'^2/R$, e una componente tangenziale $a_T = \alpha R$. Si ha quindi $a' = ((\alpha t'R)^4/R^2 + \alpha^2R^2)^{1/2} = \alpha R(\alpha^2t'^4+1)^{1/2}$, da cui, sostituendo l'espressione di α trovata sopra e facendo un po' di algebra, la soluzione]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo una direzione che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto alla verticale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 50 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m, il cui altro estremo è inchiodato alla "sommità" della guida (vedi figura). Per la soluzione dovete usare il sistema di riferimento di figura, diretto come la guida (e come l'asse della molla), orientato verso l'alto e con l'origine alla "base" della guida. In questo riferimento, l'estremo inchiodato della molla si trova alla coordinata $D = 5L_0$ = 5.0 m. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3)$ = ½ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.73]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto nel sistema di riferimento dato? [Dovete scrivere una **funzione** di x, posizione generica del manicotto nel riferimento dato. Per questa risposta **non** usate valori numerici ma riferitevi alle grandezze note del problema attraverso le espressioni "letterali" riportate nel testo]
   $a(x)$ = …………………………………… $-(k/m)x+(k/m)(D-L_0)-g\cos\theta$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo la direzione, inclinata, della guida, dunque l'accelerazione si considera lungo tale direzione (nella direzione ortogonale alla guida essa è nulla a causa del vincolo!). Sul manicotto agisce la componente della forza peso $-mg\cos\theta$, dove il segno tiene conto dell'orientazione dell'asse, e la forza elastica il cui **modulo** vale $k(L-L_0)$,con $L = D-x$ lunghezza della molla. Osservate che la forza elastica ha anche come componente (con il segno!) l'espressione $F_{ELA} = k(D-x-L_0)$, come si dimostra facilmente supponendo la molla estesa o compressa e vedendo se il segno della forza è quello che ci si aspetta, o no. Da qui la soluzione]
   Quanto vale la posizione di equilibrio x_{EQ} del manicotto e che tipo di moto compie il manicotto? [Spiegate bene in brutta le motivazioni delle vostre affermazioni]
   x_{EQ} = …………………………………… = ………... m $D - L_0 - mg\cos\theta/k = 4L_0 - mg\cos\theta/k$ = 3.8 m [la posizione di equilibrio è quella che annulla l'accelerazione di cui sopra, cioè si ha $a(x=x_{EQ})$ = 0, da cui la risposta; il moto è armonico, dato che l'equazione del moto ha la forma del moto armonico. La pulsazione vale $\omega = (k/m)^{1/2}$ = 5.0 rad/s]
   b) Supponete ora che il manicotto venga spostato da una qualche causa esterna (una manina) nella posizione x_0 = 0 e che da qui essa venga lasciato libero di muoversi senza impartirgli alcuna velocità iniziale. Quanto vale, in modulo, la sua velocità v' nell'istante in cui la molla assume, se la assume, la propria lunghezza di riposo L_0?
   v' = …………………………………… ~ ………… m/s $(16kL_0^2/m - 8gL_0\cos\theta)^{1/2}$~ 27 m/s [dato che non ci sono forze dissipative si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale contiene due termini, uno dovuto alla forza peso e l'altro alla forza elastica: $\Delta U = \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$. Si ha $\Delta U_G = mg\Delta h$, con $\Delta h = (D-L_0)\cos\theta = 4L_0\cos\theta$ come si dimostra con semplici ragionamenti di geometria. Inoltre, dato che alla "fine" del processo considerato la molla si trova alla sua lunghezza di riposo e dunque la sua energia elastica è nulla, si ha $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(D-L_0)^2 = -8kL_0^2$. Mettendo tutto insieme si trova la soluzione]

3. Una (piccola) cassa di massa m può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza h e inclinazione θ rispetto all'orizzontale. La cassa, che reca una carica elettrica $Q > 0$, è legata a una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con

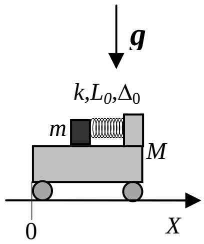


attrito trascurabile attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato e che si osserva che la massa M si muove verso il basso. Inoltre si sa che nella regione di interesse per l'esperimento è presente un campo elettrico **esterno, uniforme e costante** di modulo E_0 e direzione orizzontale (orientato verso la sinistra di figura). [In questo esercizio non ci sono valori numerici, dunque dovete necessariamente limitarvi a usare le espressioni "letterali" dei dati indicati nel testo]

a) Come si scrive l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]
a = …………………………………… $(g(M\text{-}m\sin\theta)+QE_0\cos\theta)/(M+m)$ [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g\text{-}T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = \text{-}g\sin\theta+T/m+QE_0\cos\theta/m$, Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che inizialmente la cassa si trovi ferma alla base del piano inclinato (cioè al suo punto più basso) e che la fune sia tesa, come si scrive il modulo della velocità v' con cui la cassa raggiunge la sommità del piano stesso? [Considerate, ovviamente, che non ci siano "ostacoli" di tipo geometrico, ad esempio lunghezza e/o altezza del piano inclinato, che impediscano questo processo, ricordate che le masse sono puntiformi e immaginate che le condizioni effettive del problema conducano proprio alla risalita della cassa lungo il piano]
v' = …………………………………… $(2(Mgh/\sin\theta\text{-}mgh+QE_0h/tg\theta)/(m+M)))^{1/2}$ [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché all'inizio tutto è fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2$, dove $V'^2=v'^2$ per l'inestensibilità della fune. La variazione di energia potenziale comprende due termini, uno dovuto alla forza peso e l'altro alla forza elettrica (entrambe conservative). Nel processo la cassa sale di un tratto h mentre la massa scende di un tratto $L=h/\sin\theta$ (sempre per l'inestensibilità!), per cui $\Delta U_G = mgh\text{-}Mgh/\sin\theta$. Inoltre la forza elettrica è costante e uniforme e diretta orizzontalmente, per cui $\Delta U_{ele} = \text{-}QE_0h/tg\theta$, dove abbiamo notato che $h/tg\theta$ è la proiezione dello spostamento in direzione orizzontale. Da qui la soluzione]

4. Un carrello di massa M = 5.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una strada orizzontale, è dotato di una sponda verticale rigida a cui è vincolata una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 3.0x10^3 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm. Alla molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è attaccato un piccolo oggetto di massa $m = M/5$ = 1.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie del carrello. Inizialmente tutto il sistema (carrello e oggetto) è fermo e la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 50 cm a causa di una fune. La posizione del carrello è tale che la sua estremità indicata in figura ha coordinata X_0 = 0 (rispetto ad un asse X orizzontale). All'istante t_0=0 la fune viene improvvisamente tagliata ed il **sistema** si mette in movimento.



a) Discutete per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano nel processo e spiegate perché.
Discussione: ………………………………… Sul sistema non agiscono forze dissipative, per cui si conserva l'energia meccanica del sistema. Inoltre non ci sono forze esterne in direzione orizzontale, per cui si conserva la quantità di moto del sistema in questa direzione. Notate che, nel caso considerato, la quantità di moto totale si conserva anche in direzione Y , a causa del fatto che le forze esterne che agiscono (peso e reazione vincolare della strada sul carrello, si annullano).

b) Quanto vale la velocità V' del **carrello** nell'istante in cui la molla si trova a passare per la sua lunghezza di riposo?
V' = …………………………………… = …….. m/s $\Delta_0(k/(30m))^{1/2}$= 5.0 m/s [la conservazione dell' energia meccanica si scrive: $0=\Delta E_K+\Delta U_{ELA}=(m/2)v'^2+(M/2)V'^2\text{-}(k/2)\Delta_0^2$, dove abbiamo notato che, al termine del processo considerato, l'energia elastica è nulla essendo la lunghezza della molla pari alla lunghezza a riposo. Inoltre la conservazione della quantità di moto totale (inizialmente nulla) implica: $0=mv'+MV'$, ovvero $v' = \text{-}MV'/m = \text{-}5V'$ (qui abbiamo usato la relazione tra le masse indicata nel testo). Combinando le due conservazioni si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale la coordinata X' dell'estremo del carrello nell'istante considerato alla domanda precedente? [In pratica vi si chiede di individuare lo spostamento del carrello a quel dato istante]
X' = …………………………………… = ……… m $\Delta_0(m/(m+M))=\Delta_0/6$ = 8.3x10^{-2} m [poiché il sistema è isolato, il centro di massa non ha accelerazione, ed essendo inizialmente fermo (tutto è fermo all'inizio), rimane sempre fermo. Pertanto $0=\Delta x_{CM}=(m\Delta x'+M\Delta X')/(m+M)$, da cui $\Delta X'=\text{-}(m/M)\Delta x'=X' = \text{-}\Delta x'/5$, dove il penultimo passaggio si deve al fatto che la coordinata iniziale dell'estremo del carrello è nulla e l'ultimo alla relazione tra le masse. D'altra parte per semplici ragioni geometriche si ha che lo spostamento dell'oggetto misurato nel sistema di riferimento assegnato (solidale alla strada!) è $\Delta x'=\text{-}\Delta_0+\Delta X'$, essendo $\text{-}\Delta_0$ lo spostamento **relativo** dell'oggetto rispetto al carrello (notate il segno!). Da qui si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/12/2012 Firma:

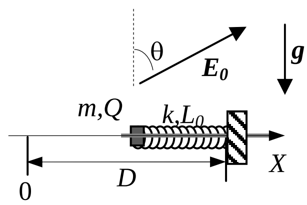
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

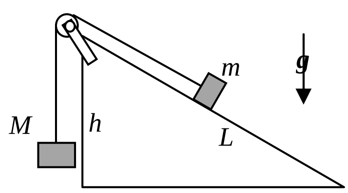
1. Un oggetto puntiforme è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R = 0.50 m essendo dotato di moto circolare uniformemente accelerato. All'istante t_0 = 0 esso passa per la posizione θ = 0 di un riferimento polare con origine nel centro della circonferenza avendo una velocità tangenziale di modulo v_0 = 5.0 cm/s. Si osserva poi che esso si arresta quando raggiunge la posizione angolare $\theta' = \pi$.
   a) Quanto vale, **il modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a_0}$ dell'oggetto all'istante t_0 = 0?
   a_0 = …………………………………… ~ .... m/s² $\quad (v_0^2/R)(1+1/(4\pi^2))^{1/2} \sim 5.1\times10^{-3}$ m/s² [il moto è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria della velocità (angolare) si scrive: $\omega(t) = \omega_0+\alpha t$. Si sa che all'istante t' la velocità si annulla, per cui $\alpha = -\omega_0/t' = -v_0/(Rt')$. Inoltre la legge oraria del moto (angolare): $\theta'-\theta_0 = \pi = \omega_0 t'+\alpha t'^2/2 = (v_0/R)t'-(v_0/(Rt'))t'^2/2 = v_0t'/(2R)$, da cui $t'=2\pi R/v_0$. Di conseguenza l'accelerazione angolare si scrive: $\alpha = -v_0/(R(2\pi R/v_0)) = -(v_0/R)^2/(2\pi)$. L'accelerazione è un vettore le cui componenti, ortogonali tra loro e quindi da sommare in quadratura per ottenere il modulo quadro, sono l'accelerazione tangenziale $\alpha R=-(v_0^2/R)/2\pi$, e l'accelerazione centripeta di modulo $\omega_0^2R = v_0^2/R$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione. Notate che il termine tangenziale è nettamente più piccolo del termine di origine centripeta a causa del valore della velocità dell'oggetto all'istante considerato]
   b) Quanto vale, **il modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a'}$ che l'oggetto ha subito prima di arrestarsi?
   a' = …………………………………… = ... m/s² $\quad v_0^2/(2\pi R) = 8.0\times10^{-4}$ m/s² [all'istante considerato la velocità è praticamente nulla e dunque è nulla l'accelerazione centripeta (ma non quella tangenziale!). Si ha dunque $a' = |\alpha R|$ dove si usa il modulo coerentemente con la richiesta del problema. Usando l'espressione di α determinata sopra si ottiene la soluzione che, come si vede, è ben minore dell'accelerazione all'istante iniziale, in conseguenza dell'annullamento dell'accelerazione centripeta]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto possiede una carica elettrica $Q > 0$ ed è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, il cui altro estremo è inchiodato a un muretto, in una posizione che si trova a distanza $D = 2L_0$ dall'origine del sistema di riferimento (asse X indicato in figura, orientato verso **destra**). In tutta la regione di spazio di interesse per l'esperimento insiste un campo elettrico **esterno uniforme e costante** di modulo E_0. Come rappresentato in figura, la direzione di tale campo forma un angolo θ rispetto alla direzione verticale e il verso è "verso destra". [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiano le espressioni "letterali" dei dati noti, cioè quelli specificati sopra]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto nel sistema di riferimento dato? Come si scrive la posizione di equilibrio x_{EQ}? [Dovete scrivere una **funzione** di x, posizione generica del manicotto nel riferimento dato]
   $a(x)$ = …………………………………… $\quad -(k/m)x+(k/m)(D-L_0)+QE_0\sin\theta/m=-(k/m)x+(k/m)L_0+QE_0\sin\theta/m$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo la direzione della guida, dunque l'accelerazione si considera lungo tale direzione (nella direzione ortogonale alla guida essa è nulla a causa del vincolo!). Sul manicotto agisce la componente della forza elettrica $QE_0\sin\theta$ orientata verso destra (la carica è positiva!) e la forza elastica, la cui espressione rispetto al sistema considerato (verificate che i segni siano giusti!) è $k(D-x-L_0)$, da cui la soluzione]
   x_{EQ} = …………………………………… $\quad L_0+QE_0\sin\theta/k$ [si ottiene imponendo $a(x = x_{EQ}) = 0$]
   b) Supponete ora che il manicotto venga spostato da una qualche causa esterna (una manina) in una posizione tale che la lunghezza della molla sia pari alla propria lunghezza di riposo L_0 e che da qui esso venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Come si scrive la velocità v' con cui il manicotto passa, se ci passa, per la posizione di equilibrio x_{EQ} determinata sopra?
   v' = …………………………………… $\quad QE_0\sin\theta/(km)^{1/2}$ [dato che non ci sono forze dissipative si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale contiene due termini, uno dovuto alla forza elettrica e l'altro alla forza elastica: $\Delta U = \Delta U_{ELE}+\Delta U_{ELA}$. Notando che la forza elettrica è costante e uniforme, e che la sua proiezione nella direzione del moto è $QE_0\sin\theta$, si ha $\Delta U_{ELE} = -L_{ELE} = QE_0\sin\theta\Delta x$, con $\Delta x = (D-x_{EQ})-(D-L_0) = L_0-x_{EQ} = -QE_0\sin\theta/k$. Pertanto si ha $\Delta U_{ELE} = -(QE_0\sin\theta)^2/k$. Osservate che, dato che lo spostamento avviene verso la destra della figura, l'energia potenziale elettrica deve diminuire, così come si verifica nell'espressione trovata. Notando che inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, nella quale l'energia elastica è nulla, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)(x_{EQ}-L_0)^2 = (k/2)(QE_0\sin\theta/k)^2 = (QE_0\sin\theta)^2/(2k)$. Mettendo tutto insieme e risolvendo per v' si ottiene la soluzione, della quale siete invitati a verificare la correttezza dimensionale]

3. Una (piccola) cassa di massa m = 6.0 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e lunghezza L = 4.0 m. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 8.0 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al

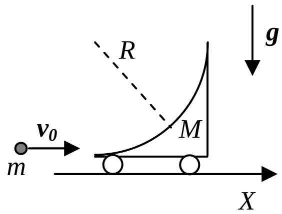


proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]
a = …………………………………… = ……….. m/s^2 $g(M-mh/L)/(M+m)$ = 3.5 m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m$, con $\sin\theta = h/L$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che inizialmente la cassa si trovi ferma alla base del piano inclinato (cioè al suo punto più basso) e che la fune sia tesa, quanto vale in modulo la velocità v' con cui la cassa raggiunge la sommità del piano stesso? [Considerate, ovviamente, che non ci siano "ostacoli" di tipo geometrico, ad esempio lunghezza e/o altezza del piano inclinato, che impediscano questo processo e ricordate che le masse sono puntiformi]
v' = …………………………………… ~ ………… m/s $(2(MgL-mgh)/(m+M))^{1/2}$ ~ 5.3 m/s [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Poiché all'inizio tutto è fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2$, dove $V'^2=v'^2$ per l'inestensibilità della fune. Inoltre nel processo la cassa sale di un tratto h mentre la massa scende di un tratto L (sempre per l'inestensibilità!), per cui $\Delta U_G = mgh-MgL$. Da qui la soluzione]

4. Un blocco di materiale di massa M = 2.0 kg è scavato in forma di quarto di circonferenza di raggio R = 10 cm, come rappresentato in figura (la figura riporta una vista laterale). Il blocco è munito di ruotine che ne rendono possibile il movimento, con **attrito trascurabile**, lungo la direzione orizzontale (denominata X). Una pallina (puntiforme!) di massa $m = M/4$ = 0.50 kg viene lanciata contro il blocco in modo da imboccare l'"ingresso inferiore" della guida, come mostrato in figura. Al momento dell'arrivo della pallina sulla guida, il blocco è **fermo**, mentre la pallina ha velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta lungo l'asse X (cioè orizzontalmente). Si osserva che la pallina risale lungo la guida, muovendosi con **attrito trascurabile**, finché, a un dato momento, passa per l'"uscita" (il punto più alto). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Discutete per benino, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano nel processo e perché.
Discussione: ………………….. Nel processo considerato non ci sono forze dissipative (gli attriti sono trascurabili) e quindi si conserva l'energia meccanica totale del sistema pallina+blocco. Inoltre sul sistema agiscono forze esterne (forza peso e forze di reazione vincolare sulle ruotine del blocco) che hanno tutte direzione verticale, per cui il sistema si può considerare isolato lungo l'asse X. Pertanto si conserva la quantità di moto totale del sistema **lungo questa direzione**.

b) Quanto valgono, in modulo, le velocità v' e V' rispettivamente della pallina e del blocco nell'istante considerato sopra, cioè quello in cui la pallina passa per l'"uscita"?
V' = ………………….. = ……… m/s $v_0m/(m+M) = v_0/5$ = 2.0 m/s [sfruttiamo l'affermazione discussa nelle soluzione del punto precedente. Dato che si conserva la componente X della quantità di moto totale del sistema e dato che inizialmente la quantità di moto lungo la direzione X è mv_0, si ha $mv_0 = mv'_X + MV' = (m+M)V'$, da cui, usando la relazione tra le masse, la soluzione]
v' = ………………….. ~ ……… m/s $(4v_0^2/5-2gR)^{1/2}$ ~ 8.8 m/s [per questa risposta occorre considerare la conservazione dell'energia meccanica totale del sistema: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G$. Poiché inizialmente si muove solo la pallina, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2 - (m/2)v_0^2= (m/2)v'^2+(5m/2)(v_0^2/25)-(m/2)v_0^2 = (m/2)(v'^2+v_0^2(1/5-1))=(m/2)(v'^2-4v_0^2/5)$, dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente e la relazione tra le masse data nel testo. Inoltre è $\Delta U_G = mgR$ (la pallina aumenta la sua quota per un tratto pari al raggio della guida) da cui si ottiene: $(m/2)(v'^2-4v_0^2/5)+mgR = 0$. Da qui. Risolvendo per v', la soluzione]

c) Quanto vale la velocità del centro di massa del sistema, v'_{CM}, misurata nello stesso istante considerato sopra, cioè quello in cui la pallina passa per l'"uscita"?
v'_{CM} = ………………….. ~ ……… m/s $(44v_0^2/25 - 2gR)^{1/2}/5$ ~ 2.6 m/s [a questa domanda occorre rispondere considerando il modulo della velocità del centro di massa. Si ha $v'_{CM} =(v'_{CMX}{}^2 + v'_{CMY}{}^2)^{1/2}$. La componente orizzontale della velocità del centro di massa resta costante nel processo considerato (il sistema è isolato in direzione X) e vale $mv_0/(m+M) = v_0/5$. La componente verticale della velocità del centro di massa si ottiene facilmente notando che la velocità verticale del blocco è nulla, per cui $v'_{CMY} = mv'_Y/(m+M) = v'_Y/5$. Si ha dunque: $v'_{CM} = ((v_0/5)^2+(v'_Y/5)^2)^{1/2} = (v_0^2+v'_Y{}^2)^{1/2}/5$. Per il teorema di Pitagora si ha poi $v'_Y{}^2=v'^2-v'_X{}^2=v'^2-V'^2=v'^2-v_0^2/25$. Pertanto $v'_{CM} = (v_0^2-v_0^2/25 + v'^2)^{1/2}/5 = (24v_0^2/25+4v_0^2/5-2gR)^{1/2}/5$, dove abbiamo impiegato l'espressione di v' determinata sopra. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/12/2012 Firma:

F

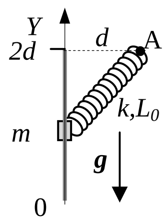
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

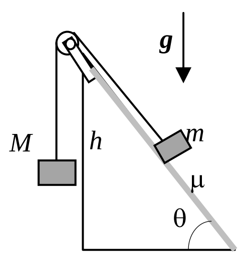
1. Un oggetto puntiforme è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R = 0.50 m essendo dotato di moto circolare uniformemente accelerato. All'istante t_0 = 0 esso parte da fermo e all'istante t' = 250 ms passa per la posizione $\theta' = \pi/4$ di un riferimento polare con origine nel centro della circonferenza.
   a) Quanto vale **il modulo** della velocità $\boldsymbol{v}'$ che il punto possiede all'istante t'?
   v' = …………………………………… = ... m/s $\pi R/(2t') = 3.1$ m/s [la velocità è solo tangenziale essendo il moto circolare. Si ha quindi $v' = \omega' R$, con $\omega' = \alpha t'$. L'accelerazione angolare α si ottiene dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato, notando che deve essere: $\pi/4 = \alpha t'^2/2$" , da cui $\alpha = \pi/(2t'^2)$. Da qui la soluzione]
   a) Quanto vale la componente a'_X del vettore accelerazione all'istante t' rispetto all'asse X di un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza (e appartenente al piano della circonferenza)? [Come di consueto, l'asse X è quello rispetto a cui vengono misurati in senso antiorario gli angoli θ]
   a'_X = …………………………………… ~ ……… m/s^2 $-(|a_{TANG}|\cos\theta+|a_{CENTR}|\sin\theta) = -(\alpha R+v'^2/R)(2^{1/2}/2) = -(\pi/(2t'^2)+\pi^2/(4t'^2))R(2^{1/2}/2) = -\pi/(2t'^2)(1+\pi/2)R(2^{1/2}/2) \sim -23$ m/s^2 [all'istante considerato il punto è dotato di un'accelerazione centripeta e di un'accelerazione tangenziale dirette rispettivamente lungo la bisettrice del primo e del secondo quadrante, con versi rispettivamente centripeto e centrifugo (fate un disegnino per rendervene conto!). In modulo, si ha che l'accelerazione centripeta vale $v'^2/R = \pi^2 R/(4t'^2)$, dove abbiamo usato l'espressione di v' di cui al punto precedente. L'accelerazione angolare vale in modulo $\alpha R = \pi R/(2t'^2)$. Per la risposta al quesito, tali accelerazioni devono essere proiettate lungo la direzione X e sommate algebricamente (tenendo conto del verso delle componenti radiali e tangenziali specificato prima, fate il disegnino!). Poiché l'angolo è $\theta=\pi/4$ e $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 2^{1/2}/2$, si ottiene la soluzione, dove si è anche tenuto in debito conto dei segni]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg si muove con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k **incognita** e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m, il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale nel punto indicato con A in figura. In figura è anche disegnato l'asse Y che **dovete** impiegare: esso è verticale e orientato verso l'alto. Rispetto a questo sistema, la quota del chiodo a cui è attaccato l'estremo fisso della molla è pari a $2d = 2L_0$ = 2.0 m, mentre la distanza d fra chiodo e guida, misurata in direzione orizzontale, vale $d = L_0$ = 1.0 m.



   a) Come si scrive l'equazione del moto del manicotto, $a(y)$? [Nelle risposte **non** dovete utilizzare valori numerici, ma dovete limitarvi a esprimere funzioni della coordinata y del manicotto rispetto all'asse Y di figura, mettendoci dentro le espressioni letterali dei dati noti del problema e usando il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   $a(y)$ = …………………………………… $-g + (k/m)((d^2+(2d-y)^2)^{1/2}-L_0)((2d-y)/(d^2+(2d-y)^2)^{1/2})$ [il manicotto si muove sotto l'effetto della forza peso, mg, diretta verso il basso, e della componente verticale della forza elastica. In corrispondenza a una posizione y generica del manicotto, la lunghezza della molla vale, per la geometria del sistema, $((2d-y)^2+L_0^2)^{1/2}$ (teorema di Pitagora!) e quindi il **modulo** della forza elastica è $k((y^2+L_0^2)^{1/2}-L_0)$. La componente verticale si ottiene proiettando tale forza lungo l'asse Y, cioè moltiplicandola per $(2d-y)/(y^2+L_0^2)^{1/2}$. come si può facilmente dimostrare con semplici ragionamenti di trigonometria. Da qui si ottiene la soluzione]
   b) Immaginate ora che il manicotto venga portato da una qualche causa esterna nella posizione iniziale y_0 = 0 e da qui lasciato andare con velocità nulla. Si osserva che il manicotto risale fino ad arrestarsi (istantaneamente) quando ha raggiunto la coordinata $y' = d$. Quanto vale la costante elastica della molla, k?
   k = …………………………………… ~ ………… N/m $(2mg/L_0)/((5^{1/2}-1)^1-(2^{1/2}-1)^2) \sim 29$ N/m [si conserva l'energia meccanica, dunque $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Dato che i due istanti considerati come "iniziale" e "finale" del processo corrispondono entrambi a situazioni in cui il manicotto è fermo, si ha $\Delta E_K = 0$. Alla variazione di energia potenziale contribuiscono la forza peso, che dà una variazione di energia potenziale $\Delta U_G = mgy'$ (la variazione di quota è pari a y' ed è tale che il manicotto sale, da cui il segno positivo!), ovvero mgL_0, e la forza elastica, $\Delta U_{ela} = (k/2)(L_{fin}-L_0)^2-(k/2)(L_{in}-L_0)^2=(k/2)[((2d-y')^2+d^2)^{1/2}-L_0)+((2d)^2+d^2)^{1/2}-L_0)]$. Per esplicitare la variazione di energia elastica conviene usare $d=y'=L_0$. Si ottiene allora: $\Delta U_{ela} = (k/2)L_0^2((2^{1/2}-1)^2-(5^{1/2}-1)^2)$. Mettendo tutto insieme e risolvendo per k si ottiene la soluzione]

3. Una (piccola) cassa di massa m = 6.0 kg può scorrere lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e inclinazione $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è scabro e presenta un coefficiente di attrito (dinamico) μ = 0.50. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 14 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato e che si osserva che la massa M si muove verso il basso. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



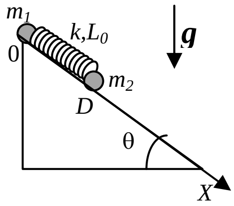
a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

a = …………………………………… ~ ……….. m/s^2 $g(M-m(\sin\theta+\mu\cos\theta))/(M+m)$ ~ 3.6 m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. Se non ci fosse attrito, è evidente che la massa scenderebbe verso il basso e la cassa si muoverebbe verso l'alto del piano inclinato, per cui l'attrito deve essere diretto verso il basso. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m-F_A/m$, dove $F_A = \mu N = \mu mg\cos\theta$ è il modulo della forza di attrito, Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale il lavoro della forza di attrito L_A quando la cassa percorre per intero il piano inclinato (partendo dal basso e arrivando sulla sommità)?

L_A = …………………………………… ~ ………… J $-\mu mgh/tg\theta$ ~ -34 J [la forza di attrito è costante e uniforme, e sempre diretta in verso opposto allo spostamento, che vale $h/\sin\theta$ per semplici ragioni geometriche. Quindi $L_A = -F_A h/\sin\theta = -\mu mgh/tg\theta$. Da qui la soluzione]

4. Due oggetti (puntiformi) di massa m_1 e m_2 possono scivolare con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato (fisso, rigido, indeformabile) che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. I due oggetti sono tenuti insieme da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. Inizialmente i due oggetti sono tenuti fermi da forze esterne (ad esempio due manine) in posizioni che, rispetto ad un asse X che corre lungo il piano inclinato, ha origine sulla sua sommità, e punta verso il basso, sono $x_{01} = 0$ e $x_{02} = D$ (vedi figura). All'istante $t_0=0$ le forze esterne che tenevano fermi gli oggetti vengono improvvisamente rimosse (senza che venga impartita alcuna velocità iniziale agli oggetti) ed essi sono liberi di muoversi. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni letterali dei vari parametri. Usate il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Discutete per benino, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano, spiegando il perché (e stando attenti ai tranelli!).

Discussione: …………………………………………… Sul sistema non agiscono forze dissipative, dunque si conserva l'energia meccanica del sistema delle due masse. Per quanto riguarda la conservazione della quantità di moto, essa non si verifica rispetto ad alcuna direzione. Infatti sul sistema agiscono le forze esterne dovute al peso (verticale) e alla reazione vincolare (orientata come la normale al piano inclinato). Di conseguenza non è possibile individuare alcuna direzione cartesiana rispetto alla quale il sistema possa dirsi isolato! Comunque è rilevante notare che, lungo la direzione del piano inclinato, che è quella del moto, le forze esterne (il peso delle due masse) produce un'accelerazione che è la stessa per i due oggetti, per cui si rientra nelle condizioni di applicazione dell'equazione del moto relativo $a_{REL} = F_{INT}/\mu$ con F_{INT} la forza elastica e μ la massa ridotta del sistema.

b) Come si scrivono le equazioni del moto relativo, a_{REL} , e del centro di massa, a_{CM} , del sistema? [Potreste dover scrivere delle **funzioni delle posizioni generiche** x_1 e x_2 dei due oggetti rispetto all'asse considerato nel testo]

a_{REL} = …………………………………… $-(k/\mu)(x_2-x_1-L_0)$, con $1/\mu=1/m_1+1/m_2$ [il moto relativo avviene per effetto della forza elastica della molla, che è l'unica forza interna al sistema dei due oggetti.. Rispetto all'asse considerato, detta d la distanza (generica) tra gli oggetti, cioè $d = x_2-x_1$, si ha $F = -k(d-L_0)$, da cui, ricordando l'espressione dell'equazione del moto relativo, si ottiene la soluzione]

a_{CM} = …………………………………… $g\sin\theta$ [le uniche forze esterne con componenti non nulle lungo X sono le componenti "attive" delle forze peso, $m_1 g\sin\theta$ e $m_2 g\sin\theta$. Ricordando che l'equazione del moto del CM recita $a_{CM}=\Sigma F_{ext}/M_{tot}$ si ottiene la soluzione]

c) In quale istante t' (se esiste) la **distanza relativa** tra gli oggetti torna ad assumere per la prima volta il valore (D) che aveva all'istante iniziale?

t' = …………………………………… $T=2\pi/\omega = 2\pi(\mu/k)^{1/2} = 2\pi(m_1m_2/((m_1+m_2)k))^{1/2}$ [il moto relativo è armonico con pulsazione $(k/\mu)^{1/2} = (k(m_1+m_2)/(m_1m_2))^{1/2}$, dato che l'equazione del moto scritta sopra è palesemente quella di un moto armonico con posizione di equilibrio $d = L_0$. L'oscillazione (relativa) considerata della distanza tra i due oggetti fa sì che questa torni uguale al valore iniziale (le velocità iniziali sono nulle!) dopo un periodo $T = 2\pi/\omega$, da cui la risposta; si suppone ovviamente che la lunghezza del piano inclinato e la distanza iniziale siano tali da permettere effettivamente il raggiungimento della situazione richiesta prima che la massa m_2 raggiunga la base del piano inclinato!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/12/2012 Firma: