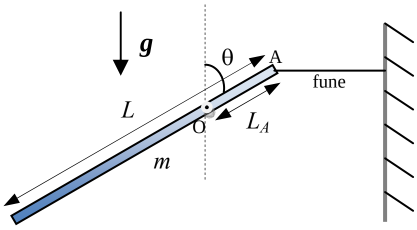
A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 31/5/2013

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

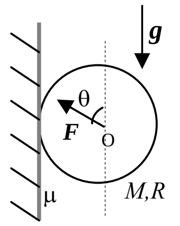
1. Una **sottile** asta **disomogenea**, di lunghezza L = 60 cm e massa m = 2.0 kg, ha la propria densità di massa che aumenta **linearmente** con la distanza da un suo estremo, quello marcato con A in figura (la densità di massa è nulla in corrispondenza di A). L'asta è imperniata nel punto O, che si trova a distanza $L_A = L/4$ da A (vedi figura) in modo da poter ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale. Al punto A è attaccata una fune **orizzontale** il cui altro estremo è inchiodato a una parete rigida e fissa. Nelle condizioni di figura l'asta è **in equilibrio** e l'angolo rispetto alla verticale vale $\theta = \pi/3$. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Quanto vale la distanza L_{CM} tra l'estremo A e il centro di massa dell'asta? [Se non sapete rispondere, passate comunque alla domanda successiva; se sapete rispondere, spiegate **per bene**, in brutta, il procedimento]
L_{CM} = …………………………………… = ……… m $2L/3$ = 0.40 m [l'asta è disomogenea e sottile. Detta x la posizione di un punto generico sull'asse dell'asta rispetto all'estremo A, la densità di massa si esprime come $\rho_m(x) = C\,x$, con C costante opportunamente dimensionata. Infatti l'espressione appena scritta soddisfa la descrizione data nel testo (la densità è nulla all'estremo A e varia linearmente con la distanza). Per definizione di posizione del centro di massa (lungo x, la direzione di nostro interesse), si ha $x_{CM} = \int x dm/\int dm$, dove l'integrazione è fatta su tutta la massa dell'asta. Suddividendo l'asta in tanti dischetti, di sezione S pari alla sezione dell'asta (incognita, ma ci sarà!) e spessore infinitesimo dx, si ha $dm=\rho_m S dx = C\,x\,S\,dx$. Si ottiene allora, mettendo in evidenza e semplificando tutto quello che si può: $x_{CM} = \int x^2 dx/\int x dx$, dove gli estremi di integrazione sono 0,L. Risolvendo gli integrali come sapete fare dopo un anno di corso, si trova la soluzione]

b) Quanto valgono, in modulo, la tensione T della fune e la forza F_O che il perno esercita sull'asta?
T = …………………………………… ~ ……… N $5mgtg\theta/3 \sim 57$ N [l'asta è in equilibrio sia in termini rotazionali che traslazionali. Per l'equilibrio rotazionale deve essere nulla la somma delle componenti assiali dei momenti delle forze rispetto a un polo, che scelgo in O. Le forze che generano momento sono il peso, applicato in CM, che si trova sull'asse dell'asta a distanza $L' = 2L/3-L/4 = 5L/12$ da O, e la tensione, applicata in A. Queste due forze producono momenti di segno opposto, dunque per l'equilibrio si possono uguagliare i moduli. I bracci delle due forze sono rispettivamente $L'sin\theta$ e $(L/4)cos\theta$. Uguagliando si ottiene la soluzione]
F_O = …………………………………… ~ ……… N $((mg)^2+(25/9)(mg)^2tg^2\theta)^{1/2} = mg(28/3)^{1/2} \sim 60$ N [l'equilibrio traslazionale richiede che sia nulla la somma (vettoriale) delle forze che agiscono sull'asta. Tali forze sono il peso, verticale, e la tensione della fune, orizzontale. Dunque la forza esercitata dal perno deve avere come componenti proprio queste forze (cambiate di segno, ma tanto si chiede il modulo), da cui la risposta]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 50 cm è sottoposto a una forza $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse ed è diretta in modo da formare un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto alla verticale, come rappresentato in figura. Il cilindro è a contatto con una parete verticale fissa, rigida e **scabra** con coefficiente di attrito μ = 0.50. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



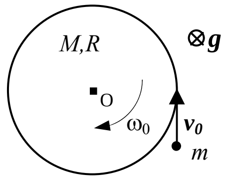
a) Si osserva che, per un certo valore del modulo della forza F pari a F_{EQ}, il cilindro è in **equilibrio**. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito $F_{A,EQ}$ che la parete esercita in queste condizioni di equilibrio sul cilindro? [State attenti: il cilindro è un corpo rigido…]
$F_{A,EQ}$ = …………………………………… = ……… N 0 [per l'equilibrio rotazionale occorre che si annulli la somma dei momenti assiali delle forze che agiscono sul cilindro. Scegliamo il punto O (centro di massa del cilindro) come polo. Le forze (esterne) che agiscono sul cilindro sono la forza $\boldsymbol{F}$, il peso, la reazione vincolare e la forza di attrito. Di queste, solo la forza di attrito ha un momento non nullo. Pertanto essa deve necessariamente essere nulla!]

b) Supponete ora che il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ passi improvvisamente dal valore di equilibrio F_{EQ} a un valore maggiore, F' = 40 N. Di conseguenza, il cilindro prende a muoversi. Discutete **per bene**, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro e perché. Inoltre stabilite quanto vale la forza di attrito F_A' in queste condizioni.
Discussione: ………………………… visto che la forza ha un modulo superiore a quello richiesto per l'equilibrio, è evidente che il cilindro si metterà in moto. Trattandosi di un corpo esteso che si trova a contatto con una parete scabra occorre valutare se il moto può essere di rotolamento puro, cioè occorre determinare la forza di attrito necessaria perché il moto sia di rotolamento puro e verificare se il contatto tra cilindro e parete può determinare tale forza, o no. Infatti, essendo noto il coefficiente di attrito, sappiamo che $F_{A,MAX} = \mu N = \mu F'sin\theta \sim 17$ N. Iniziamo con il notare che il moto traslatorio del centro di massa sarà verso l'alto, dato che la componente verticale della forza esterna, $F'cos\theta$ = 20 N, è maggiore del peso, Mg = 10 N. In queste condizioni la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ sarà diretta verso il basso, opponendosi al moto (incipiente) della generatrice del cilindro a contatto con la parete. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa rispetto a un asse orientato verso l'alto è: $a_{CM} = -g+(F'cos\theta-F_A)/M$ e quella del moto rotazionale, rispetto al polo O e prendendo come positivo un verso di rotazione antiorario (in figura), è $\alpha = F_A R/I$, dove si è osservato che la sola forza di attrito ha braccio non nullo e $I = MR^2/2$ è il momento di

inerzia per un cilindro pieno e omogeneo di raggio R e massa M. Supponendo per ipotesi che ci sia rotolamento puro, cioè che $a_{CM}=\alpha R$, e risolvendo per F_A il sistema di tre equazioni e tre incognite, si ottiene $F_A = (-Mg+F'\cos\theta)/3$ = 3.4 N < $F_{A,MAX}$. Pertanto il moto è di rotolamento puro, il centro di massa trasla verticalmente verso l'alto e il cilindro ruota in verso antiorario (in figura)

F_A' = ... = ... N $(-Mg+F'\cos\theta)/3 = 3.4$ N [vedi sopra]

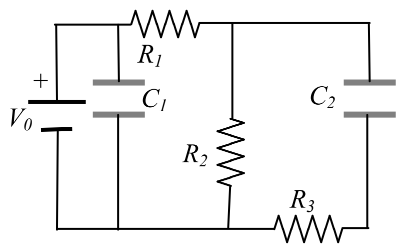
3. In un luna park si trova una giostra realizzata con una piattaforma costituita da un disco pieno e omogeneo di raggio R = 1.0 m e massa $M = 2.0\times10^2$ kg che può ruotare con attrito trascurabile su **un piano orizzontale** attorno a un perno fisso e rigido che passa per il suo asse geometrico (punto O di figura). Inizialmente la giostra è in rotazione (in "folle") con velocità angolare ω_0 = 1.0 rad/s nel verso orario di figura. A un dato istante un omino puntiforme di massa $m = M/4$ = 50 kg ci sale sopra avendo una velocità diretta orizzontalmente come in figura (tangente al disco), di modulo v_0 incognito. Subito dopo che l'omino ci è salito sopra (rimanendo fermo rispetto alla giostra sul bordo di questa) il sistema omino + giostra si ferma.



a) Discutete **per bene**, in brutta, quali grandezze meccaniche complessive del sistema si conservano nel processo descritto sopra, e **spiegate perché**.
Discussione e spiegazione: .... Il processo è un urto anelastico: infatti inizialmente si hanno due oggetti materiali (giostra+omino) che poi diventano uno solo. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa per permettere all'omino di fermarsi sulla piattaforma. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Infatti è facile dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, la giostra prima dell'urto avrebbe dovuto traslare nella stessa direzione (e verso opposto) di $\boldsymbol{v_0}$. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nullo (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale rispetto a tale polo.

b) Quanto vale v_0?
v_0 = ... = ... m/s $(M/(2m))R\omega_0 = 2\omega_0 R = 2.0$ m/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima dell'"urto" esso è dovuto al movimento della giostra e a quello dell'omino. Il momento angolare della giostra vale in modulo $I\omega_0 = (MR^2/2)\omega_0$, dove abbiamo usato il momento di inerzia di un disco pieno omogeneo. Quello dell'omino vale in modulo mv_0R. Come suggerisce il fatto che dopo l'urto il momento angolare totale del sistema si annulla (tutto è fermo!), questi momenti, ovvero le loro componenti assiali, hanno segno opposto. Dunque uguagliando i moduli si ottiene la risposta]

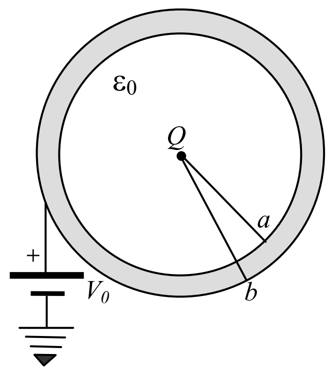
4. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 =1.0 kohm, R_2 = 2.0 kohm, R_3 = 4.0 kohm) e due condensatori (C_1 = 1.0 μF, C_2 = 2.0 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 30 V.



a) Quanto vale, in **condizioni stazionarie** (cioè "a regime"), l'intensità di corrente I erogata dal generatore?
I = ... = ... A $V_0/(R_1+R_2) = 1.0\times10^{-2}$ A
[in condizioni stazionarie non passa corrente nei fili che portano alle armature dei condensatori. Dunque non passa corrente neppure attraverso $R_£$ (per passarci, essa avrebbe dovuto attraversare prima il condensatore C_2). La corrente fluisce quindi solo attraverso la serie dei resistori R_1 e R_2, da cui la risposta]

b) A un dato istante il generatore viene scollegato dal circuito e i condensatori avviano il loro processo di "scarica" attraverso i resistori. Quanto vale **l'energia totale** E_J **"**dissipata" per effetto Joule in questo processo dai resistori? [Si intende la somma dell'energia "dissipata" da tutti i resistori in un tempo lunghissimo dopo lo scollegamento del generatore; si trascurino effetti dissipativi di altro genere]
E_J = ... = ... J $(V_0^2/2)(C_1+C_2(R_2/(R_1+R_2))^2) = 8.5\times10^{-4}$ J [una volta scollegato il generatore, i condensatori si scaricheranno completamente attraverso i resistori (precisamente attraverso la serie R_1+R_2 il condensatore C_1 e la serie R_2+R_3 il condensatore C_2). L'energia "dissipata" complessivamente attraverso tutti i resistori sarà quella che era inizialmente immagazzinata nei condensatori (questo è vero per ovvi motivi di bilancio energetico, supponendo ragionevolmente che non ci siano altri processi in grado di modificare le energie in gioco). Essa si esprime come $C\Delta V^2/2$. Occorre quindi determinare la differenza di potenziale tra le armature dei due condensatori. Per C_1 essa è evidentemente pari a V_0. Per C_2, invece, occorre considerare che, non passando corrente attraverso R_2, è nulla la differenza dei potenziali ai capi di questo resistore. Dunque la differenza di potenziale ai capi di C_2 è pari a quella ai capi di R_2, che vale R_2I. Usando il risultato precedente e sommando tutto si ottiene la soluzione]

5. Un guscio sferico conduttore di raggio interno a = 40 cm e raggio esterno b = 50 cm (guscio spesso) è collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 5.0\times10^3$ V, il cui polo negativo è collegato a terra, come rappresentato schematicamente in figura. Al centro del guscio sferico viene posta una carica elettrica puntiforme $Q = 1.0\times10^{-6}$ C, che rimane fissa in questa posizione. Rispondete alle domande supponendo che il sistema abbia raggiunto condizioni **stazionarie** (di equilibrio). [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]

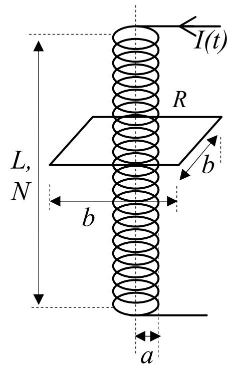


a) Quanto valgono le cariche elettriche Q_a e Q_b che si depositano sulle superfici interna ed esterna del guscio sferico? [Spiegate meglio che potete, in brutta, i ragionamenti e i metodi che servono per rispondere]

Q_a = …………………………….. = ……… C $-Q = -1.0\times10^{-6}$ C [il problema è chiaramente a simmetria sferica, per cui il campo elettrico è radiale e il suo modulo dipende solo dalla distanza r dal centro del guscio. Presa una scatola sferica di raggio r generico, il teorema di Gauss stabilisce che $E(r) = Q_{INT}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove Q_{INT} è la carica interna alla scatola. Prendiamo una scatola di raggio $a<r<b$: la sua superficie si trova nel conduttore dove, a causa della condizione stazionaria (di equilibrio) il campo è nullo. Dunque deve essere complessivamente nulla la carica all'interno di questa scatola. Evidentemente essa è data dalla somma $Q+Q_a$, da cui la soluzione]

Q_b = …………………………….. = ... C $V_0 4\pi\varepsilon_0 b = 2.8\times10^{-7}$ C [la presenza del generatore implica che la differenza di potenziale tra il guscio e un punto a grandissima distanza (infinita) da questo sia $\Delta V = -V_0$ (il segno meno si deve alla considerazione che il guscio si trova a potenziale maggiore rispetto all'infinito, cioè un punto all'infinito è a un potenziale minore, ovvero negativo, rispetto al guscio). Infatti la terra, a cui è collegato uno dei due poli del generatore, ha per definizione potenziale nullo, così come, in questa geometria (cariche confinate al finito), si può affermare dei punti che si trovano all'infinito, cioè a grande distanza dalle cariche elettriche considerate. Dunque il generatore pompa della carica sul guscio (sulla superficie esterna di questo, dato che nella superficie interna il valore della carica è determinato dalle considerazioni svolte al punto precedente) una certa quantità di carica Q_b,necessaria a soddisfare il requisito appena espresso. Per la sua determinazione, occorre notare che, all'esterno (per $r>b$) il campo, secondo Gauss, si scrive $E_{EXT}(r) = (Q+Q_a+Q_b)/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = Q_b/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove l'ultimo passaggio tiene conto della risposta al punto precedente. Deve quindi essere $V_0 = -\int_b^\infty Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)dr = Q/(4\pi\varepsilon_0 b)$, da cui la soluzione]

6. Un solenoide di lunghezza L = 1.0 m e raggio a = 2.0 cm (dunque con $a<<L$, per cui si può ritenere che esso si comporti in modo "ideale"), composto da N = 1000 spire, è collegato a un generatore che eroga una corrente variabile nel tempo secondo la funzione $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ con I_0 = 50 A e $\omega = 5.0\times10^2$ rad/s. Come mostrato in figura (non in scala!), il solenoide attraversa la superficie di una spira quadrata di lato b = 10 cm fatta di filo conduttore dotato di una resistenza complessiva R = 10 ohm. Il piano su cui giace la spira è ortogonale all'asse del solenoide e la spira è concentrica al solenoide stesso. [Usate $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T A/m per la costante di permittività magnetica del vuoto]



Disegno non in scala!!!

a) Quanto vale la massima intensità di corrente $I_{S,MAX}(t)$ indotta nella spira? [Per massima intensità di corrente si intende il valore massimo nel tempo dell'intensità di corrente indotta]

$I_{S,MAX}$ = ………………………….. = ……… A $(\pi a^2\mu_0 N/L)\omega I_0/R = 3.9\times10^{-3}$ A [secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta nella spira si trova come $fem = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, dove $\Phi(\mathbf{B})$ rappresenta il flusso di campo magnetico (prodotto dal solenoide) che attraversa la spira. Vista la geometria del sistema e considerando che il solenoide si comporta in modo "ideale" (dunque produce un campo magnetico uniforme diretto assialmente all'interno e **nullo** all'esterno) è $\Phi(\mathbf{B}) = B\pi a^2$ (fate attenzione che in questa espressione deve comparire la superficie del solenoide, non quella della spira, dato che, come già sottolineato, il campo è nullo fuori dal solenoide!). L'intensità del campo magnetico all'interno del solenoide si determina usando il teorema di Ampere: $B = \mu_0 NI(t)/L$, con $I(t)$ corrente che fluisce nel solenoide. Dunque si ha $fem = -(\pi a^2\mu_0 N/L)dI(t)/dt = (\pi a^2\mu_0 N/L)\omega I_0\sin(\omega t)$, dove abbiamo eseguito la derivata temporale di $\cos(\omega t)$, che dovete saper fare avendo seguito il corso di Fisica Generale. La corrente indotta si ottiene usando la legge di Ohm sulla spira, cioè $I_S(t)=fem/R$ e il valore massimo richiesto si ottiene in tutti gli istanti in cui $\sin(\omega t) = 1$, da cui la risposta]

7. Scrivete **meglio che potete e con tutte le indicazioni che ritenete opportune** le quattro equazioni che normalmente si indicano come "equazioni di Maxwell in forma integrale e nel vuoto" (ovviamente in condizioni **non stazionarie**)

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

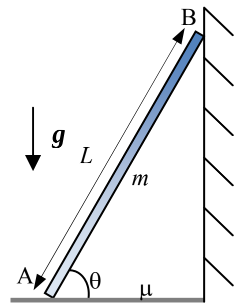
Pisa, 31/5/2013 Firma:

B

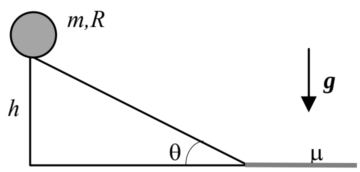
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 31/5/2013

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Una **sottile** asta **disomogenea**, di lunghezza L = 2.0 m e massa m = 5.0 kg, ha la propria densità di massa che varia con la distanza da un suo estremo, quello marcato con A in figura, secondo la funzione $\rho_m(x) = C\,x^2$, con x distanza dall'estremo A (la densità di massa è nulla in corrispondenza di A, cioè per $x = 0$) misurata lungo l'asse dell'asta e C costante dimensionata incognita. L'estremo A dell'asta è appoggiato a un pavimento orizzontale **scabro**, con coefficiente di attrito $\mu = 0.70$. L'altro estremo (B in figura) è invece appoggiato a una parete **liscia** verticale. Nelle condizioni di figura l'asta è **in equilibrio** e l'angolo rispetto all'orizzontale vale $\theta = \pi/3$. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]
   a) Quanto vale la distanza L_{CM} tra l'estremo A e il centro di massa dell'asta? [Se non sapete rispondere, passate comunque alla domanda successiva; se sapete rispondere, spiegate **per bene**, in brutta, il procedimento]
   L_{CM} = …………………………………… = ……… m $3L/4$ = 1.5 m [chiamiamo x la distanza dall'estremo A misurata lungo un asse diretto come l'asta e passante per l'asse di simmetria dell'asta (che comunque è sottile). Per definizione di posizione del centro di massa (lungo x, la direzione di nostro interesse), si ha $x_{CM} = \int x\,dm/\int dm$, dove l'integrazione è fatta su tutta la massa dell'asta. Suddividendo l'asta in tanti dischetti, di sezione S pari alla sezione dell'asta (incognita, ma ci sarà!) e spessore infinitesimo dx, si ha $dm=\rho_m S dx=C\,x^2\,S\,dx$. Si ottiene allora, mettendo in evidenza e semplificando tutto quello che si può: $x_{CM} = \int x^3dx/\int x^2dx$, dove gli estremi di integrazione sono 0,L. Risolvendo gli integrali come sapete fare dopo un anno di corso, si trova la soluzione]
   b) Quanto vale in modulo la forza di attrito F_A che il pavimento scabro esercita sull'estremo A dell'asta? Commentate se la situazione di equilibrio descritta nel problema può effettivamente essere realizzata, o no.
   F_A = …………………………………… ~ ……… N $3mg/(4tg\theta) \sim 21$ N [l'asta è in equilibrio sia in termini rotazionali che traslazionali. Per l'equilibrio rotazionale deve essere nulla la somma delle componenti assiali dei momenti delle forze rispetto a un polo, la cui posizione si può scegliere a piacere dato che si è in equilibrio. Scelgo un polo in A e ottengo, tenendo conto dei bracci delle forze peso, applicata al CM e verticale, e della reazione della parete N_{PAR} , incognita, orizzontale e applicata in B: $mgL_{CM}cos\theta = N_{PAR}Lsin\theta$, dove si sono uguagliati i moduli avendo notato che i due momenti considerati farebbero ruotare l'asta in versi opposti. Dall'uguaglianza si ottiene, tenendo anche conto del risultato precedente: $N_{PAR} = 3mg/(4tg\theta)$. Per l'equilibrio traslazionale anche la somma vettoriale delle forze deve annullarsi. L'unica altra forza che agisce sull'asta con componenti orizzontali è proprio F_A, da cui la risposta]
   Commento: …………………………… La forza di attrito che si sta cercando è di tipo statico. Dunque per essa deve valere $F_A \le \mu N_{PAV}$, dove N_{PAV} è la reazione del pavimento nel punto di contatto A, che vale in modulo mg. Pertanto deve essere $3mg/(4tg\theta) \le \mu mg$, cioè $\mu \ge 3/(4tg\theta)$. Usando i valori numerici si vede che la relazione è verificata e quindi l'equilibrio è possibile.

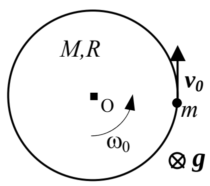


Disegno ovviamente non in scala!!

2. Un cilindro pieno omogeneo, di massa m = 1.0 kg e raggio R = 20 cm, si trova inizialmente fermo sulla sommità di un piano inclinato di altezza totale h = 2.5 m il quale forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato presenta una superficie **liscia**, cioè con attrito trascurabile. Esso è seguito da un **lungo** piano orizzontale che, invece, è **scabro** con coefficiente di attrito $\mu = 0.20$. A un dato istante il cilindro viene lasciato libero di scendere lungo il piano inclinato con velocità iniziale nulla (sia traslazionale che rotazionale!). [Notate che il coefficiente di attrito dato vale sia nel caso statico che dinamico. Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $sin(\pi/6) = ½$]
   a) Quanto valgono, in modulo, le velocità del centro di massa e rotazionale, rispettivamente v_{CM}' e ω', quando il cilindro raggiunge la base del piano inclinato?
   v_{CM}' = …………………………………… = ……… m/s $(2gh)^{1/2}$ = 7.0 m/s [nel tratto liscio sul cilindro non agisce alcuna forza in grado di produrre momento rispetto al suo centro. Infatti le forze agenti, peso e reazione del piano, hanno braccio nullo. Dunque non c'è rotazione e il cilindro trasla (e basta) come se fosse un oggetto puntiforme. La velocità del centro di massa si ottiene facilmente dalla conservazione dell'energia: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v_{CM}'^2-mgh$, da cui la risposta]
   ω' = …………………………………… = ……… rad/s 0 [vedi sopra]
   b) Discutete **per bene (ma davvero per bene e senza cadere in trabocchetti)** cosa succede al moto del cilindro quando arriva sul piano orizzontale scabro. In particolare stabilite se il moto è o può diventare di rotolamento puro, e nel caso in quale istante ciò si verifica.
   Discussione:…………………………… Chiamiamo $t_0 = 0$ l'istante nel quale il cilindro raggiunge la base del piano inclinato, ovvero inizia a trovarsi nella regione scabra. Per il rotolamento puro occorre che non ci sia slittamento, ovvero che la velocità del punto (generatrice) di contatto tra cilindro e piano sia nulla. Questo implica $v_{CM} = \omega R$, che **non** è verificata subito all'inizio del piano orizzontale. Infatti al punto precedente abbiamo stabilito che la velocità angolare è nulla, mentre nulla non è la velocità traslazionale del centro di massa! Essendoci slittamento, l'attrito è di tipo dinamico, cioè $F_A = \mu N = \mu mg$. Una volta che il cilindro si muove sul piano

orizzontale, questa è l'unica forza che ha componenti nella direzione del moto, per cui $a_{CM} = - F_A/m = -\mu g$ (scegliamo un asse orizzontale orientato verso la destra di figura). Inoltre questa è anche l'unica forza che ha momento non nullo rispetto al centro di massa del cilindro, per cui $\alpha = F_A R/I = 2\mu g/R$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo, $I = mR^2/2$. In altre parole, finché c'è strisciamento il moto traslazionale è uniformemente accelerato (decelerato, visto che la forza di attrito si oppone al moto del punto di contatto, che in assenza di attrito scivolerebbe verso la destra di figura), per cui la velocità diminuisce secondo la legge oraria: $v_{CM}(t)=v_{CM}'-\mu gt$. Il moto rotazionale è anche uniformemente accelerato, per cui la velocità angolare aumenta secondo la legge: $\omega(t) = 2\mu gt/R$. Poiché il tratto orizzontale è molto lungo, esisterà un istante t'' tale che $v_{CM}(t'') = \omega(t'')R$. A questo istante, che vale $t'' = v_{CM}'/(3\mu g) = 1.2$ s, le condizioni di rotolamento puro sono verificate. Notate che il rotolamento puro su un piano orizzontale richiede $F_A = 0$, che sicuramente è compatibile con l'attrito statico generato al contatto. Infatti le equazioni del moto sono quelle scritte sopra, cioè $a_{CM} = -F_A/m$ e $\alpha = 2F_A/R$, dove stavolta $F_A \le \mu N$; unite alla condizione di rotolamento puro $\alpha = a_{CM}/R$ si ottiene che l'unica soluzione possibile è $F_A = 0$. Non essendoci più forze dissipative (che compiono lavoro) e non essendoci neanche variazioni di energia potenziale, le velocità restano costanti al valore di rotolamento puro per $t > t''$.

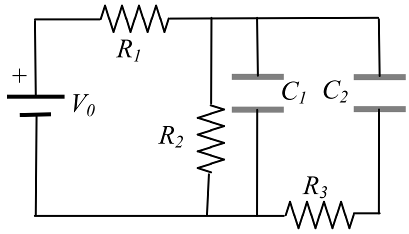
3. In un luna park si trova una giostra realizzata con una piattaforma costituita da un disco pieno e omogeneo di raggio $R = 1.0$ m e massa $M = 2.0\text{x}10^2$ kg che può ruotare con attrito trascurabile su **un piano orizzontale** attorno a un perno fisso e rigido che passa per il suo asse geometrico (punto O di figura). Inizialmente sul bordo della giostra si trova, fermo rispetto a questa, un omino puntiforme di massa $m = M/4 = 50$ kg e tutto il sistema omino + giostra si trova in rotazione (in "folle") con velocità angolare $\omega_0 = 1.0$ rad/s nel verso antiorario di figura. A un dato istante l'omino salta giù dalla giostra con una velocità diretta orizzontalmente come in figura (tangente al disco, rispetto a un riferimento "fisso") di modulo v_0 incognito. Subito dopo il salto la giostra si ferma.



a) Discutete **per bene**, in brutta, quali grandezze meccaniche complessive del sistema si conservano nel processo descritto sopra, e **spiegate perché**.
Discussione e spiegazione: .... Il processo è una "frammentazione", cioè l'"inverso" di un urto anelastico: infatti inizialmente si ha un solo oggetto (omino+giostra) che poi si frammenta in due oggetti distinti, cioè dotati di diverse velocità. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa dall'omino per saltare. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Infatti è facile dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, dopo il salto la giostra dovrebbe traslare traslare nella stessa direzione (e verso opposto) di $\mathbf{v_0}$. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nullo (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale rispetto a tale polo.

b) Quanto vale v_0?
v_0 = ... = ... m/s $(M/(2m)+1)R\omega_0 = 3\omega_0 R = 3.0$ m/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima della frammentazione esso è dovuto al movimento della giostra + omino, ed è esprimibile come $I_{TOT}\omega_0$, con $I_{TOT} = MR^2/2+mR^2$ (abbiamo usato il momento di inerzia di un disco pieno omogeneo e quello di una massa puntiforme che si trova a distanza R dal polo, cioè dall'asse di rotazione). Dopo la frammentazione resta solo il momento angolare dell'omino, che vale mv_0R. Uguagliando si ottiene la risposta]

4. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 =1.0 kohm, R_2 = 2.0 kohm, R_3 = 4.0 kohm) e due condensatori (C_1 = 1.0 μF, C_2 = 2.0 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 30 V.



a) Quanto vale, in **condizioni stazionarie** (cioè "a regime"), la potenza P_{GEN} erogata dal generatore?

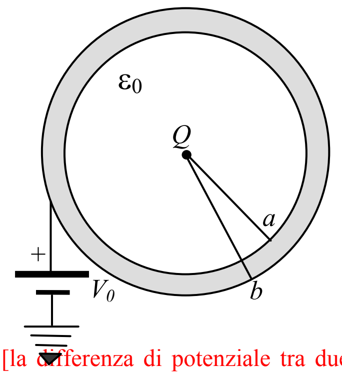
P_{GEN} = …………………………………… = ………… W $V_0^2/(R_1+R_2)$ = 0.30 W [in condizioni stazionarie la potenza del generatore viene impiegata dai resistori in "dissipazione" per effetto Joule. Infatti in condizioni stazionarie i condensatori hanno esaurito il loro processo di carica, e non c'è più richiesta di energia da parte loro. Per definizione è $P_{GEN} = V_0 I$, L'intensità di corrente si calcola facilmente con la legge di Ohm, notando che in condizioni stazionarie la corrente passa solo per la serie dei resistori R_1 e R_2. Infatti i condensatori C_1 e C_2, una volta caricati (una volta raggiunte le condizioni stazionarie) non richiedono più corrente. Si trova quindi $I = V_0/(R_1+R_2)$, da cui la risposta]

b) Quanto valgono, **in condizioni stazionarie**, la cariche Q_1 e Q_2 accumulate su C_1 e C_2?

Q_1 = …………………………………… = ... C $C_1\Delta V = C_1V_0R_2/(R_1+R_2) = 2.0\times10^{-5}$ C [la carica sul condensatore dipende dalla differenza di potenziale ΔV ai suoi capi attraverso la relazione $Q = C\Delta V$. Dato che attraverso R_3 non passa corrente, ed è quindi nulla la differenza di potenziale ai suoi capi, entrambi i condensatori si trovano alla stessa differenza di potenziale ΔV, che è anche la stessa che esiste ai capi di R_2, cioè $\Delta V = R_2 I$, da cui la soluzione]

Q_2 = …………………………………… = ... C $C_2\Delta V = C_2V_0R_2/(R_1+R_2) = 4.0\times10^{-5}$ C [vedi sopra]

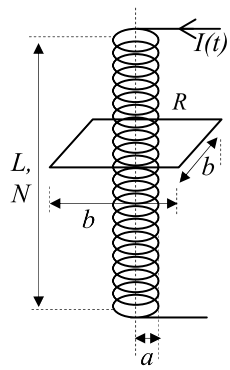
5. Un guscio sferico conduttore di raggio interno a = 40 cm e raggio esterno b = 50 cm (guscio spesso) è collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale V_0 = 5.0×10^3 V, il cui polo negativo è collegato a terra, come rappresentato schematicamente in figura. Al centro del guscio sferico viene posta una carica elettrica puntiforme Q = 1.0×10^{-7} C, che rimane fissa in questa posizione. Rispondete alle domande supponendo che il sistema abbia raggiunto condizioni **stazionarie** (di equilibrio). [Usate il valore ε_0 = 8.8×10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]



a) Quanto vale il **potenziale elettrico** $V(r=a/2)$ in un punto che si trova all'interno del guscio, a una distanza $r = a/2$ rispetto al centro? [Spiegate meglio che potete, in brutta, i ragionamenti e i metodi che servono per rispondere]

$V(r=a/2)$ = …………………………….. = ……… V $V_0 + Q/(4\pi\varepsilon_0 a) = 7.3\times10^3$ V [la differenza di potenziale tra due punti A e B, che si calcola come $\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{r_A}^{r_B} E(r)dr$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la circostanza che, nel sistema considerato, il campo elettrico è radiale e dipendente da r a causa della evidente simmetria sferica, è per definizione di differenza pari a $V(B)-V(A)$. Dunque il potenziale di un qualsiasi punto nello spazio può essere determinato una volta che sia noto il potenziale di un altro qualsiasi punto. Nel problema considerato è ad esempio noto che il potenziale del punto $r=a$ vale V_0 (che è la differenza di potenziale rispetto a un punto a potenziale nullo, la terra o l'"infinito"). Dunque si ha $\Delta V = -\int_{a/2}^{a} E dr = V_0 - V(r=a/2)$. Il campo elettrico nella regione di spazio interna al guscio, cioè per $a/2<r<a$, è determinato dalla sola carica Q, come si può facilmente dimostrare usando il teorema di Gauss. Quindi si ha $E(r) = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, da cui $\Delta V = (Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/a-1/(a/2)) = -Q/(4\pi\varepsilon_0 a)$ e da qui la soluzione]

6. Un solenoide di lunghezza L = 1.0 m e raggio a = 2.0 cm (dunque con $a<<L$, per cui si può ritenere che esso si comporti in modo "ideale"), composto da N = 1000 spire, è collegato a un generatore che eroga una corrente variabile nel tempo. In particolare si sa che la corrente è nulla per $t < t_0 = 0$, e quindi aumenta **linearmente nel tempo** fino a raggiungere il valore I' = 50 A all'istante t' = 1.0×10^{-3} s. Inoltre si sa che per $t > t'$ l'intensità di corrente resta costantemente al valore I'. Come mostrato in figura (non in scala!), il solenoide attraversa la superficie di una spira quadrata di lato b = 10 cm fatta di filo conduttore dotato di una resistenza complessiva R = 10 ohm. Il piano su cui giace la spira è ortogonale all'asse del solenoide e la spira è concentrica al solenoide stesso. [Usate $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T A/m per la costante di permittività magnetica del vuoto]



Disegno non in scala!!!

a) Come varia nel tempo, per $t > t_0 = 0$, l'intensità di corrente $I_S(t)$ indotta nella spira? Quanto vale l'intensità di corrente I_S'' indotta nella spira all'istante $t'' = 2t'$? [Alla prima domanda dovete rispondere scrivendo una funzione, non usate valori numerici ma riferitevi ai parametri noti del problema attraverso i simboli citati nel testo; non cadete nei trabocchetti!]

$I_S(t)$ = ………………………….. $(\pi a^2\mu_0 N/L)I'/(Rt')$ [secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta nella spira si trova come $fem = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, dove $\Phi(\mathbf{B})$ rappresenta il flusso di campo magnetico (prodotto dal solenoide) che attraversa la spira. Vista la geometria del sistema e considerando che il solenoide si comporta in modo "ideale" (dunque produce un campo magnetico uniforme diretto assialmente all'interno e **nullo** all'esterno) è $\Phi(\mathbf{B}) = B\pi a^2$ (fate attenzione che in questa espressione deve comparire la superficie del solenoide, non quella della spira, dato che, come già sottolineato, il campo è nullo fuori dal solenoide!). L'intensità del campo magnetico all'interno del solenoide si determina usando il teorema di Ampere: $B = \mu_0 NI(t)/L$, con $I(t)$ corrente che fluisce nel solenoide. La dipendenza funzionale della corrente si deduce facilmente dalla descrizione data nel testo: per $t_0 < t < t'$ deve infatti essere $I(t)= I't/t'$, che esprime una dipendenza lineare dal tempo con corrente nulla per $t = t_0 = 0$ e intensità I' per $t = t'$. Dunque si ha $fem = -(\pi a^2 \mu_0 N/L)dI(t)/dt = (\pi a^2 \mu_0 N/L)I'/t'$, che, nonostante quanto forse si poteva pensare dal testo della domanda (il trabocchetto!!), è costante nel tempo (nell'intervallo considerato!). La corrente indotta si ottiene usando la legge di Ohm sulla spira, cioè $I_S(t)=fem/R$, da cui la risposta (se siete interessati, potete calcolare il valore numerico, che dovrebbe essere 7.9×10^{-3} A)]

I_S'' = ………………………….. = …….. A 0 [l'istante considerato si verifica quando la corrente nel solenoide ha raggiunto il valore I' e a questo valore rimane costantemente. Dunque la derivata del flusso del campo magnetico si annulla, e quindi nulla è la corrente indotta a questo istante (perlomeno se si trascurano effetti che potrebbero avere luogo quando la corrente passa bruscamente a zero da un valore finito, ma questi effetti li trascuriamo senz'altro!]

7. Scrivete **meglio che potete e con tutte le indicazioni che ritenete opportune** le quattro equazioni che normalmente si indicano come "equazioni di Maxwell in forma integrale e nel vuoto" (ovviamente in condizioni **non stazionarie**)

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 31/5/2013 Firma: