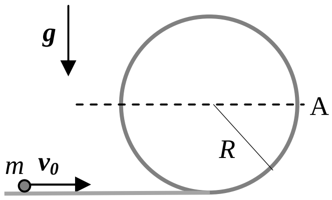
A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 18/12/2013

Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



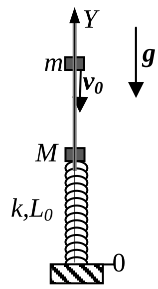
1. Una pallina (puntiforme!) di massa m = 20 g si muove con **attrito trascurabile** su una guida rigida e fissa (la pallina è **"appoggiata" sulla guida**). La guida ha il tracciato indicato in figura: dopo un tratto orizzontale, essa forma una circonferenza di raggio R = 1.0 m disposta su un piano verticale. La pallina viene lanciata con velocità v_0 sul tratto orizzontale come in figura e si vuole che essa compia un intero "giro della morte". [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

   a) Quanto vale il valore minimo di velocità v_{0MIN} (sul tratto orizzontale) tale che per v_0 > v_{0MIN} la pallina compie effettivamente il giro della morte? [Spiegate **per bene** in brutta il ragionamento seguito]

   v_{0MIN} = …………………………………… = ………… m/s $(5gR)^{1/2}$= 7.0 m/s   [il punto "critico" del giro della morte è quello collocato più in alto. Supponendo che la pallina compia effettivamente il giro della morte, essa deve subire in questa posizione un'accelerazione centripeta $a_C = v^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita da forze che hanno direzione radiale e sono orientate verso il centro della circonferenza. Tali forze sono la forza peso e la reazione vincolare che la guida esercita sulla pallina, cioè $mv^2/R = mg+N$ (sto usando i moduli e il segno di N dipende dal fatto che la pallina è appoggiata sulla guida per cui, nel punto più alto della traiettoria, essa ha la stessa direzione e verso di $m\boldsymbol{g}$). Nella condizione limite si ha N = 0 (in queste condizioni la pallina si sta staccando dalla guida!), per cui al limite la velocità nel punto più alto della guida deve essere $v^2_{MIN} = Rg$. A tale velocità corrisponde una velocità minima v_{0MIN} alla base della guida (sul tratto orizzontale) che può essere espressa con la conservazione dell'energia meccanica (non ci sono forze dissipative che fanno lavoro): $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v^2_{MIN}-(m/2)v^2_{0MIN} + mg2R$, da cui la risposta]

   b) Supponete ora che la pallina venga lanciata proprio con la velocità $v_0 = v_{0MIN}$ determinata sopra. Quanto vale il **modulo** a_A dell'accelerazione della pallina nell'istante in cui essa passa per la posizione A di figura? [La posizione A si trova alla stessa quota verticale del centro della circonferenza]

   a_A = …………………………………… ~ ………. m/s^2 $10^{1/2}g \sim 31$ m/s^2 [nella posizione indicata la pallina ha una componente centripeta dell'accelerazione pari a v_A^2/R e una componente tangenziale dovuta alla forza peso, pari a g , orientata verso il basso (notate la geometria!). Dunque $a_A = (v_A^4/R^2+g^2)^{1/2}$. La velocità v_A si determina con la conservazione dell'energia come descritto nella soluzione al punto precedente: $0 = (m/2)v_A^2-(m/2)v_0^2 +mgR$, da cui $v_A^2 = v_0^2-2gR$. Tenendo conto del risultato precedente, si ha $v_A^2 = v_{0MIN}^2-2gR = 3gR$. Da qui il risultato]



2. Un manicotto (puntiforme!) di massa M può scorrere **con attrito trascurabile** essendo infilato in una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, il cui altro estremo è inchiodato al pavimento (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse Y verticale, come l'asse della molla, orientato verso l'alto. Inizialmente il manicotto si trova fermo alla sua posizione di equilibrio (da determinare). A un dato istante il manicotto viene urtato **elasticamente** da un altro manicotto, di massa $m = M/2$, che lo colpisce provenendo dall'alto con una velocità di modulo v_0; in seguito all'urto il manicotto di massa M comincia a muoversi. [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiono le espressioni "letterali" dei dati noti del problema. Suggerimenti: il processo si svolge in due fasi: nella prima avviene l'urto, considerato istantaneo, e poi tutto il resto; supponete che la molla non sia in grado di produrre forze a carattere impulsivo!]

   a) Come si esprime la velocità V' con cui il manicotto di massa M **comincia** a muoversi?

   V' = …………………………………… $-2v_0/3$ [nella prima fase del processo si assiste a un urto elastico. In questo caso si conserva l'energia cinetica totale del sistema costituito dai due manicotti, cioè $0 = \Delta E_{KM}+\Delta E_{Km} = (M/2)V'^2 + (m/2)v'^2-(m/2)v_0^2$, dove le velocità con l'apice sono quelle possedute dagli oggetti **subito dopo** l'urto. Inoltre il sistema risulta isolato rispetto alle forze impulsive in direzione verticale, per cui si conserva la quantità di moto totale (in direzione verticale, ma tanto in direzione orizzontale essa è nulla…), cioè: $-mv_0 = mv'+MV'$ (il segno negativo al primo membro deve essere impiegato se si vuole, come voglio, che v_0 sia un modulo). Usando la relazione tra le masse data nel testo, questa espressione diventa $v' = -v_0-2V'$, mentre quella dell'energia cinetica diventa $2V'^2 + v'^2 - v_0^2 = 0$. Sostituendovi l'espressione di v' si ottiene: $2V'^2+v_0^2+4v_0V'+4V'^2-v_0^2 = V'(6V'+4v_0) = 0$. Questa equazione ha due soluzioni, ma quella che fornisce V' = 0 non è fisicamente accettabile (essa descrive la situazione iniziale, prima dell'urto) e quindi si ottiene la risposta, dove il segno negativo significa che il manicotto di massa M comincia a muoversi verso il basso]

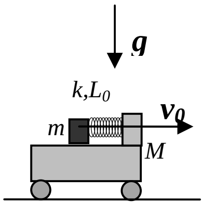
   b) Come si esprime la coordinata minima, Y_{MIN}, raggiunta dal manicotto di massa M nel moto successivo all'urto? [Usate il riferimento di figura!]

   Y_{MIN} = …………………………………… $L_0-Mg/k-(2/3)v_0(M/k)^{1/2}$ [il moto successivo all'urto del manicotto di massa M è armonico, come si può facilmente dimostrare. Dunque esso si arresta (istantaneamente) a una certa coordinata minima e quindi da qui risale in un movimento periodico (armonico). Il modo più semplice per rispondere alla domanda si basa sulla scrittura della legge oraria del moto $Y(t)$ (è possibile rispondere anche usando la conservazione dell'energia meccanica, ma l'approccio è probabilmente più contoso). Partiamo con l'equazione del moto del manicotto (ovviamente scritta subito dopo l'urto!): $a(Y) = -g-(k/M)(Y-L_0)$, dove Y è la coordinata generica assunta dal manicotto. La soluzione generica di questa equazione, ovvero la legge oraria del moto scritta senza tenere conto delle condizioni iniziali, è $Y(t) = A\cos(\omega t+\phi)+Y_{EQ}$. La posizione di equilibrio è quella per cui si annulla l'accelerazione, cioè $Y_{EQ} = L_0 - Mg/k$, mentre $\omega = (k/M)^{1/2}$. La legge oraria della velocità per questo moto è, come sapete, $V(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$. Le condizioni iniziali, le quali determinano i valori dei parametri A e ϕ, sono evidentemente: $Y(t=t_0=0) = Y_{EQ}$ e $V(t=t_0=0) = V'$ calcolata sopra. Imponendo la prima si trova che deve necessariamente essere $\cos(\phi) = 0$, cioè $\phi = \pi/2$ (escludendo gli altri valori angolari che danno la stessa condizione). Sostituendo questo risultato nell'equazione per la condizione iniziale della velocità si trova $A = -V'/\omega = (2v_0/3)(M/k)^{1/2}$. Ora l'oscillazione armonica considerata si svolge con ampiezza A attorno a un punto medio che è la posizione di equilibrio, per cui la coordinata di arresto, quella in cui la velocità del manicotto si annulla istantaneamente, deve essere $Y_{MIN} = Y_{EQ} - A$, da cui la risposta]

c) Come si esprime la coordinata massima, y_{MAX}, raggiunta dal manicotto di massa m (quello che ha urtato) nel moto successivo all'urto? [Supponete trascurabili gli attriti e usate il riferimento di figura!]

y_{MAX} = …………………………………… $Y_{EQ}+2v_0^2/(9g) = L_0 - Mg/k + v_0^2/(18g)$ [supponendo trascurabili gli attriti, nel moto del manicotto m successivo all'urto si conserva l'energia meccanica (del solo manicotto m, l'altro se ne è andato per conto suo!), cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = -(m/2)v'^2 + mg\Delta y$, dove abbiamo tenuto conto che il manicotto si arresta istantaneamente alla quota massima e Δy è la differenza di quota a partire da quella iniziale (quella che si ha all'istante dell'urto, quando tutti e due i manicotti si trovano in $y = Y_{EQ}$ trovata sopra). Si ottiene $\Delta y = 2v'^2/g$. La velocità v' può essere determinata usando le conservazioni nella fase dell'urto, come fatto nella risposta al punto a): si ha $v' = -v_0-2V' = v_0/3$ (l'espressione di V' è stata riportata sopra), per cui $\Delta y = 2v_0^2/(9g)$. Da qui la risposta]

3. Un carrello di massa M = 5.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una strada orizzontale, è dotato di una sponda verticale rigida a cui è vincolata una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 30 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm. Alla molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è **attaccato** un piccolo oggetto di massa $m = M/5$ = 1.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie del carrello. Si fa una fotografia del sistema a un certo istante e si osserva che il carrello sta fermo, mentre la massa si sta muovendo verso la destra di figura con velocità di modulo v_0 = 0.60 m/s. Inoltre si osserva che in tale istante la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. Nell'evoluzione successiva si osserva che anche il carrello si mette in movimento e, ovviamente, la lunghezza della molla cambia fino a raggiungere (istantaneamente) un valore minimo L_{MIN}.



a) Quanto vale la velocità V' **del carrello** nell'istante in cui la molla assume la lunghezza L_{MIN}?

V' = …………………………………… = …….. m/s $mv_0/(M+m) = v_0/6 = 0.10$ m/s [cominciamo con il notare che, nell'istante in cui la molla ha la sua lunghezza minima, carrello e oggetto si muovono con la **stessa** velocità V'. Infatti un istante prima o un istante dopo oggetto e sponda del carrello, ovvero carrello, si avvicinano o si allontanano. Di conseguenza nell'istante considerato la velocità **relativa** dei due corpi deve essere nulla, cioè, appunto, le loro velocità devono essere le stesse. Il sistema è palesemente isolato in direzione orizzontale, poiché su di esso non agiscono forze esterne in questa direzione. Quindi si conserva la quantità di moto totale del sistema, cioè $mv_0 = (M+m)V'$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale la lunghezza L_{MIN}?

L_{MIN} = …………………………………… = ……… m $L_0-(5m/(6k))^{1/2}v_0 = 0.70$ m [poiché non agiscono forze dissipative che compiano lavoro, si conserva l'energia meccanica del sistema: $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA}$. La variazione di energia cinetica è $((M+m)/2)V'^2-(m/2)v_0^2 = (m/2)(1/6-1)v_0^2 = -(5/12)mv_0^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo e il risultato del quesito precedente. La variazione di energia elastica, tenendo conto della circostanza che inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo e dunque la sua energia è nulla, si scrive $\Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta L^2$. Di conseguenza $\Delta L = (5m/(6k))^{1/2}v_0$, da cui la risposta notando che la compressione è $\Delta L = L_0-L_{MIN}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

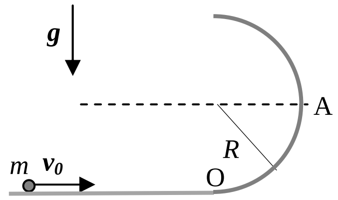
Pisa, 18/12/2013 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 18/12/2013

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una pallina (puntiforme!) di massa m = 20 g si muove con **attrito trascurabile** su una guida rigida e fissa (la pallina è "appoggiata" sulla guida). La guida ha il tracciato indicato in figura: dopo un tratto orizzontale, essa forma una semicirconferenza di raggio R = 1.0 m disposta su un piano verticale. La pallina viene lanciata con velocità v_0 = 10 m/s sul tratto orizzontale e lascia la guida dopo essere passata per il suo punto più in alto. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



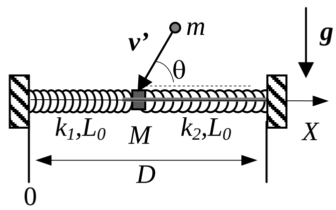
a) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A che la guida esercita sulla pallina nell'istante in cui essa passa per la posizione A di figura? [La posizione A si trova alla stessa quota verticale del centro della semicirconferenza]

N_A = …………………………………… = ……….. N $m(v_0^2-2gR)/R$ = 1.6 N [la pallina compie una traiettoria curvilinea, dunque essa deve risentire di un'accelerazione centripeta $a_C = v^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita da forze che hanno direzione radiale e sono orientate verso il centro della circonferenza. Le forze che agiscono sulla pallina sono la forza peso e la reazione vincolare che la guida esercita su di essa. La forza peso, però, essendo verticale, non ha componenti radiali quando la pallina passa per la posizione A, per cui la reazione vincolare è la sola a fornire l'accelerazione centripeta: $N_A = mv_A^2/R$. La velocità della pallina può essere facilmente determinata a partire dalla velocità v_0 usando la conservazione dell'energia meccanica (non ci sono forze dissipative che compiono lavoro): $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v_A^2-(m/2)v_0^2+mgR$, dove abbiamo notato che la variazione di quota tra il tratto orizzontale e la posizione A è pari al raggio della semicirconferenza. Si ottiene $v_A^2 = v_0^2-2gR$, da cui la soluzione]

b) Una volta lasciata la guida, la pallina si muove liberamente (si considerano ancora trascurabili gli attriti) e ricade sul tratto orizzontale in una posizione che si trova a distanza D rispetto all'inizio della guida semicircolare (alla sinistra del punto O, che è l'inizio della guida). Quanto vale D?

D = …………………………………… ~ ………. m $((v_0^2-4gR)(4R/g))^{1/2}$ ~ 5.0 m [la pallina compie un moto uniformemente accelerato (accelerazione di gravità) in direzione verticale e un moto a velocità uniforme (non ci sono attriti!) in direzione orizzontale. Tale moto ha come condizioni iniziali la quota $h = 2R$ e la velocità v', diretta orizzontalmente, con cui la pallina lascia la guida. Tale velocità può essere facilmente determinata con la conservazione dell'energia meccanica: si ottiene facilmente (vedi sopra) $v' = (v_0^2-4gR)^{1/2}$. Detto t_V il "tempo di volo" della pallina, si ha $D = v't_V$. D'altra parte deve anche essere $h = 2R = gt_V^2/2$, da cui $t_V = (4R/g)^{1/2}$. Da qui il risultato]

2. Un manicotto (puntiforme!) di massa M può scorrere **con attrito trascurabile** essendo infilato su una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto è vincolato a due distinte molle di massa trascurabile, entrambe con la stessa lunghezza di riposo L_0, ma con costanti elastiche diverse, rispettivamente k_1 e k_2. Le due molle, il cui asse è orizzontale, hanno gli altri estremi vincolati a due muretti come indicato in figura: la distanza tra i due muretti è D e il sistema di riferimento (asse X) che dovete usare è centrato sul muretto "di sinistra" (in figura). Fate attenzione al fatto che la figura si riferisce a una posizione **generica** del manicotto, corrispondente a un generico valore della sua coordinata X. Inizialmente il manicotto viene spostato nella posizione $X_0 = D/4$ e lasciato andare con velocità iniziale nulla. Immaginate che la posizione X_0 sia "alla sinistra" rispetto alla posizione di equilibrio e che quindi il moto avvenga verso la destra di figura. [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiano le espressioni "letterali" dei dati noti del problema]



a) Come si esprime la coordinata X_{EQ} della posizione di equilibrio? [Dovete riferirvi all'asse X di figura]

X_{EQ} = …………………………………… $((k_1-k_2)L_0+k_2D)/(k_1+k_2)$ [nella direzione del moto, che è quella orizzontale (asse X), le forze che agiscono sul manicotto sono solo quelle delle due molle. Usando il riferimento di figura e indicando con X la coordinata (generica) del manicotto, la molla 1 agisce con una forza $-k_1(X-L_0)$; la molla 2 agisce con una forza proporzionale alla differenza tra L_0 e lunghezza della molla, che può essere scritta in funzione di X come $L_2 = D-X$. L'espressione della forza, con i segni che "tornano" come si deve (controllate il verso della forza per molla 2 allungata o compressa), è $-k_2(X-(L_0-D))$. Dunque l'equazione del moto si scrive: $a(X) = -((k_1+k_2)/m)X+((k_1-k_2)/m)L_0+(k_2/m)D$. La posizione di equilibrio si trova imponendo $a(X_{EQ})$ = 0, ottenendo la risposta]

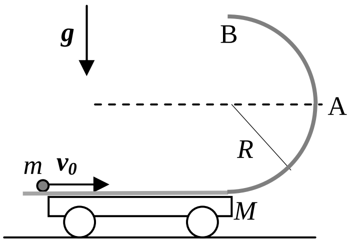
b) Come si esprime la velocità V' con cui il manicotto passa per la posizione di equilibrio?

V' = …………………………………… $(X_{EQ}- X_0)\omega = (((k_1-k_2)L_0+k_2D)/(k_1+k_2)-D/4)((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ [l'approccio più semplice è quello che sfrutta l'espressione della legge oraria del moto (si può comunque anche usare la conservazione dell'energia meccanica, con esiti un po' più contosi). Il moto del manicotto è infatti palesemente armonico, vista la forma dell'equazione del moto sopra scritta. Si ha dunque $X(t) = A\cos(\omega t+\phi)+X_{EQ}$ e $V(t) = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$, con $\omega = ((k_1+k_2)/m)$ (la configurazione, anche se a prima vista non sembra tale, è quella di molle "in parallelo"). Le condizioni iniziali sono $X(t=t_0=0)=X_0$ e $V(t=t_0=0)$ = 0. I due parametri A e ϕ possono essere facilmente determinati. In particolare si vede che deve essere ϕ = 0 e $A = X_0-X_{EQ}$. Al passaggio per la posizione di equilibrio il manicotto assume la sua velocità massima, come si può facilmente verificare, che vale $-A\omega$, da cui la risposta]

c) Esattamente nell'istante in cui il manicotto passa per la posizione di equilibrio, esso viene colpito da un proiettile di massa $m = M/4$, che arriva sul manicotto avendo una velocità di modulo v' (incognito) diretta come in figura (l'angolo vale $\theta = \pi/3$). In seguito all'urto il proiettile resta **conficcato** nel manicotto e si osserva che manicotto con proiettile conficcato si fermano immediatamente. Come si esprime il valore che v' deve avere per ottenere l'effetto appena descritto? [Supponete che le molle non siano in grado di produrre forze a carattere impulsivo]

v' = …………………………………… $(M/(m\cos\theta))V' = V'/8$ [il sistema manicotto proiettile, che è coinvolto in un urto evidentemente anelastico, è isolato in direzione X , dato che su di esso non agiscono forze **impulsive** esterne. Pertanto si conserva la quantità di moto totale **lungo la direzione X**: $MV' - mv'\cos\theta = 0$, dove il segno negativo posto nel termine di quantità di moto del proiettile (lungo l'asse X, per cui la proiezione deve essere fatta usando $cos\theta$) tiene conto del fatto che v' indica un modulo. Tenendo conto del valore del coseno dell'angolo considerato e della relazione tra le masse si ha $v' = V'/8$, da cui la risposta]

3. [**Occhio:** questo esercizio assomiglia al numero 1), ma è ben diverso!!] Una guida rigida e indeformabile **montata su un carrello** di massa M = 1.0 kg (la massa è comprensiva di guida e carrello), che può scorrere con **attrito trascurabile** su una strada orizzontale, ha il tracciato disegnato in figura: dopo un tratto orizzontale essa forma una semicirconferenza di raggio R = 20 cm disposta su un piano verticale. Inizialmente guida e carrello su cui essa è montata sono fermi. A un dato istante una pallina (puntiforme!) di massa $m = M/2$ = 0.50 kg viene lanciata sulla guida, su cui può muoversi con **attrito trascurabile**, avendo una velocità orizzontale orientata come in figura e di modulo v_0 = 3.0 m/s.



Si osserva che la pallina si muove lungo la guida fino a lasciarla al punto più alto. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto vale la velocità V_A **del carrello (e della guida)** nell'istante in cui la pallina passa per la posizione A di figura? [La posizione A si trova alla stessa quota verticale del centro della semicirconferenza]
V_A = ... = ... m/s $v_0/3$ = 1.0 m/s [il sistema costituito da pallina e carrello (con guida sopra) è isolato in direzione orizzontale, dato che in questa direzione non agiscono forze esterne. Di conseguenza si conserva la quantità di moto totale del sistema lungo tale direzione: $mv_0 = mv_{AX}+MV_A$, dove v_{AX} è la **componente orizzontale** della velocità della pallina quando essa passa per la posizione A. Vista la geometria della guida, il passaggio per questa posizione implica che il moto **relativo** della pallina rispetto al carrello sia diretto solo in direzione verticale (la velocità della pallina è tangenziale **rispetto alla guida**!). Questo significa che, nell'istante considerato, la componente orizzontale della velocità **relativa** è nulla, cioè $v_{AX} = V_A$. Usando la relazione tra le masse data nel testo, si ottiene $mv_0 = 3mV_A$, da cui la soluzione]

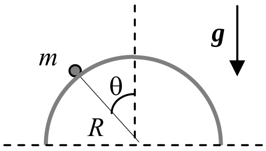
b) Quanto vale, in modulo, la velocità v_{CMB} **del centro di massa** del sistema pallina + carrello (e guida) nell'istante in cui la pallina esce dalla guida, cioè passa per la posizione B di figura? [Attenti: non dovete fare tanti conti per rispondere, ma dovete comunque spiegare per bene, in brutta, il ragionamento seguito…]
v_{CMB} = ... = ... m/s $mv_0/(m+M) = v_0/3$ = 1.0 m/s
[quando la pallina esce dalla guida essa si muove in direzione orizzontale, per cui la velocità del centro di massa del sistema, essendo sicuramente orizzontale anche la velocità del carrello, è complessivamente orizzontale. Come già affermato, il sistema è isolato in direzione orizzontale, per cui la componente orizzontale della velocità del centro di massa rimane **costante** nell'intero processo. Essa può dunque facilmente essere calcolata usando il valore iniziale, cioè considerando la velocità iniziale della pallina (il carrello con guida è inizialmente fermo) e usando la relazione $v_{CM} = \Sigma m_i v_i$, da cui la risposta. Non vi stupisca che questa soluzione è identica a quella trovata al punto precedente!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 18/12/2013 Firma:

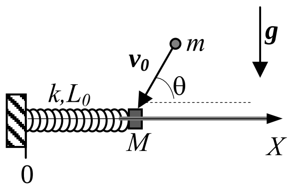
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 18/12/2013

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Una pallina (puntiforme!) di massa m = 20 g si trova inizialmente ferma sulla sommità di una guida semicircolare rigida e fissa di raggio R = 1.0 m disposta su un piano verticale (la pallina è "appoggiata" sulla guida e può muoversi con **attrito trascurabile** su di essa). La posizione della pallina viene indicata attraverso l'angolo θ compreso tra la direzione verticale e quella del "raggio vettore" che, spiccato dal centro della semicirconferenza, raggiunge la pallina (in figura si rappresenta un angolo θ **generico**): la posizione iniziale della pallina corrisponde quindi a $\theta_0 = 0$, che rappresenta una posizione di equilibrio.
A causa di qualche piccola vibrazione, la pallina si mette in movimento con una velocità iniziale trascurabile (da considerare praticamente nulla) e comincia a scendere seguendo il tracciato della guida. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Come si scrive la **funzione** $v(\theta)$ che esprime la velocità della pallina corrispondente a un **generico** valore dell'angolo θ? [Dovete scrivere una funzione, dunque niente valori numerici!]
   $v(\theta)$ = …………………………………… $(2gR(1-\cos\theta))^{1/2}$ [nel moto della pallina si conserva l'energia meccanica (non ci sono forze dissipative che compiono lavoro): $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v^2(\theta)+ \Delta U_G$, dove abbiamo debitamente considerato che la velocità iniziale è nulla. La variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso è $\Delta U_G = -mg\Delta z$, con Δz variazione di quota della pallina (l'asse Z è supposto diretto verso l'alto, da cui il segno). Con semplici ragionamenti trigonometrici si ha $\Delta z = R(1-\cos\theta)$, da cui la risposta]
   b) Si osserva che, durante la sua discesa, la pallina a un certo punto si stacca dalla guida, cioè non segue più il percorso semicircolare. Spiegate in brutta il perché di questo comportamento e determinate l'angolo θ' a cui si verifica il distacco. [Suggerimento: ricordate cosa deve succedere affinché un oggetto compia una traiettoria curvilinea e notate che, essendo la pallina appoggiata sulla guida, la reazione vincolare della guida è diretta sempre verso "l'esterno" della circonferenza…]
   Spiegazione: ………………………….. Per compiere la traiettoria semicircolare dettata dalla guida la pallina deve risentire di una accelerazione centripeta $a_C = v^2/R$. Tale accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale (orientate verso il centro della semicirconferenza), ovvero dalle componenti radiali di tutte le forze che agiscono sulla pallina. Tali forze sono il peso, $m\mathbf{g}$, sempre diretto verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare $\mathbf{N}$, sempre diretta radialmente ma **verso l'esterno**. La componente radiale della forza peso, che esce diretta verso il centro della semicirconferenza, si esprime come $mg\cos\theta$, come si vede usando la trigonometria. Deve quindi essere: $mv^2/R = mg\cos\theta - N$. La velocità può essere espressa in funzione dell'angolo come determinato alla risposta precedente, per cui deve verificarsi: $2mg(1-\cos\theta) = mg\cos\theta - N$, da cui $N = mg(3\cos\theta -2)$. Notate che questo è il modulo di N, che non può diventare mai negativo (in altre parole, la reazione vincolare aggiusta il proprio valore finché può, ma non può cambiare di segno!), e che $\cos\theta$ è una funzione decrescente di θ (per $\theta < \pi/2$). Quindi si ha un valore di θ a partire dal quale la relazione non può essere soddisfatta, cosa che si verifica a partire da $\cos\theta = 2/3$. Da questo angolo in poi la reazione vincolare si annulla, cioè la pallina si stacca dalla guida.
   θ' = …………………………………… ~ ………. rad $\arccos(2/3) \sim 0.84$ rad = 48 gradi   [vedi sopra]



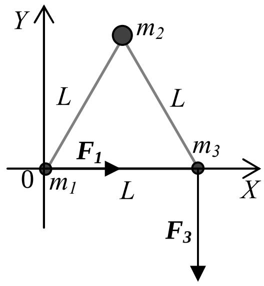
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa M può scorrere **con attrito trascurabile** essendo infilato in una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, il cui altro estremo è inchiodato a un muretto che sorge all'estremità della guida (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X orizzontale, come l'asse della molla, orientato verso la destra della figura. Inizialmente il manicotto si trova fermo alla sua posizione di equilibrio.
A un dato istante esso viene colpito da un proiettile puntiforme, di massa $m = M/5$, che ci impatta avendo una velocità $\mathbf{v_0}$ diretta come in figura (l'angolo θ indicato vale π/3), e che quindi rimane **conficcato** nel manicotto. [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiano le espressioni "letterali" dei dati noti del problema. Suggerimenti: il processo si svolge in due fasi: nella prima avviene l'urto, considerato istantaneo, e poi tutto il resto. Supponete che la molla non sia in grado di produrre forze a carattere impulsivo!]
   a) Come si esprime la velocità V' con cui manicotto e proiettile (uniti dopo l'urto!) **cominciano** a muoversi?
   V' = …………………………………… $-v_0/12$ [nella prima fase del processo si assiste a un urto palesemente anelastico, visto che il proiettile rimane conficcato nel manicotto. Supponendo che la molla non sia in grado di esercitare forze a carattere impulsivo sul sistema costituito da manicotto e proiettile, si conserva la quantità di moto totale **lungo l'asse** X (occhio! Il sistema non è isolato rispetto alle forze impulsive se si considera la presenza della guida, che, essendo rigida e fissa, può esercitare forze impulsive e le esercita di fatto nella direzione verticale di figura), cioè: $-mv_0\cos\theta = (m+M)V'$, dove il segno negativo al primo membro deve essere impiegato se si vuole, come voglio, che v_0 sia un modulo, mentre il termine $\cos\theta$ dà la proiezione del vettore velocità lungo l'asse X. Tenendo conto della relazione tra le masse e del valore del coseno di π/3, si ha $-v_0/2 = 6V'$, da cui la risposta, dove il segno negativo significa che manicotto e proiettile conficcato cominciano a muoversi verso la sinistra di figura]
   b) Come si scrive la legge oraria $X(t)$ che esprime la posizione del manicotto con il proiettile conficcato a un istante t generico? [Usate il riferimento di figura e considerate t_0 = 0 come l'istante di inizio del moto – ovvero l'istante immediatamente successivo all'urto. **Dovete tenere in debita considerazione** le condizioni iniziali del moto!]
   $X(t)$ = …………………………………… $(v_0/12)(6m/k)^{1/2}\sin((k/(6m))^{1/2}t)+L_0$ [il moto successivo all'urto del manicotto+proiettile (di massa complessiva $M+m = 6m$) segue l'equazione del moto $a(x) = -(k/(m+M))(x-L_0)$, come si può facilmente determinare osservando che la forza elastica è la sola ad agire lungo l'asse X , che è quello lungo cui avviene il moto. Questa equazione è palesemente un'equazione di moto armonico, che rappresenta un'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio $X_{EQ} = L_0$ (basta vedere per quale posizione si ha a = 0) che avviene con pulsazione $\omega = (k/(6m))^{1/2}$. La soluzione di questa equazione, ovvero la legge oraria, è, scritta in

forma generica che prescinde dalle condizioni iniziali: $X(t) = A\cos(\omega t+\phi)+X_{EQ}$, a cui corrisponde una legge oraria per la velocità $V(t) = -A\omega \sin(\omega t+\phi)$. Le condizioni iniziali sono: $X(t=t_0=0) = X_{EQ}$ (lì si trova il manicotto con proiettile conficcato subito dopo l'urto, cioè all'istante t_0) e $V(t=t_0=0) = V'$ (è la velocità acquisita subito dopo l'urto). Imponendo la condizione iniziale sulla posizione si vede come debba essere $A\cos\phi = 0$, da cui $\phi = \pi/2$ (escludendo gli altri valori angolari che annullano il coseno). Introducendo questo valore nella legge oraria della velocità si trova $A = -V'/\omega = (v_0/12)(6m/k)^{1/2}$, dove abbiamo usato l'espressione di V' trovata sopra. Conoscendo A e ϕ si può scrivere la legge oraria specifica del processo considerato, come in risposta]

c) Come si esprime l'istante t_{STOP} in cui il manicotto con proiettile conficcato si arresta istantaneamente (per la prima volta) nel moto successivo all'urto?

t_{STOP} = …………………………………… $\pi/(2\omega) = (\pi/2)(6m/k)^{1/2}$ [la risposta può essere data in maniera immediata avendo dimostrato che il moto è armonico con pulsazione $\omega = (k/(6m))^{1/2}$. Infatti, partendo dall'istante $t_0 = 0$ dalla posizione di equilibrio, occorre un tempo pari a $T/4$, dove il periodo è $T = 2\pi/\omega$, perché il manicotto con proiettile conficcato si arresti. Da qui la risposta. Ovviamente lo stesso risultato si ottiene anche considerando le leggi già scritte e imponendo $V(t'') = 0$. Ciò comporta $\sin(\omega t''+\phi)=0$, cioè $\omega t'' + \phi = 0,\pi$ etc. Essendo $\phi = \pi/2$ (vedi sopra), si ottiene $t'' = -\pi/(2\omega), \pi/(2\omega)$, etc. La prima soluzione corrisponde a tempi precedenti all'urto, e quindi va esclusa, mentre l'altra è esattamente corrispondente a quanto già trovato]

3. Un corpo rigido discreto è composto da tre masse puntiformi m_1, m_2, m_3 , con $m_1 = m_3 = m = 50$ g e $m_2 = 4m = 0.20$ kg, legate tra loro da bacchettine di massa trascurabile di lunghezza $L = 20$ cm. Le tre masse si trovano ai vertici di un triangolo equilatero, come mostrato in figura, dove è anche indicato il sistema di riferimento XY che **dovete** usare per esprimere le risposte. Il corpo rigido, inizialmente fermo, è poggiato su un piano orizzontale che presenta un **attrito trascurabile**. All'istante $t_0 = 0$ al corpo rigido vengono fornite due forze **costanti e uniformi** $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$, applicate rispettivamente alla massa m_1 e m_3 e di modulo rispettivamente $F_1 = F = 0.60$ N e $F_3 = 2F = 1.2$ N. Le due forze sono dirette come indicato in figura (la $\boldsymbol{F_1}$ è orizzontale rispetto alla figura e orientata nel verso positivo dell'asse X, la $\boldsymbol{F_3}$ è verticale orientata nel verso negativo dell'asse Y).



a) Quali sono le coordinate iniziali (cioè per $t \leq 0$), x_{CM0} e y_{CM0} , del centro di massa del corpo rigido? [Usate il sistema di riferimento indicato in figura]

x_{CM0} = …………………………………… = ……….. m $L/2 = 0.10$ m

y_{CM0} = …………………………………… ~ ……….. m $(1/3)3^{1/2}L \sim 0.12$ m [la definizione di posizione di centro di massa recita $\boldsymbol{r}_{CM} = \Sigma m_i \boldsymbol{r_i}/\Sigma m_i$. Nella condizione iniziale considerata le masse si trovano nelle posizioni indicate in figura, cioè $x_1=y_1 = 0$, $x_2 = L/2$, $y_2 = 3^{1/2}/2$ (qui si usa la facile nozione che l'altezza di un triangolo equilatero è $3^{1/2}/2$, trigonometria ovvero Pitagora docunt), $x_3 = L$, $y_3 = 0$. Da qui, notando che la massa totale è $6m$, si ottiene la risposta]

b) Quanto vale, in **modulo**, lo **spostamento** Δs_{CM} del **centro di massa** all'istante $t' = 2.0$ s? [Notate che le due forze rimangono costanti e uniformi durante lo spostamento del corpo rigido; non confondete posizione con spostamento!]

Δs_{CM} = …………………………………… ~ ………. m $(5^{1/2}/2)(F/(6m))t'^2 \sim 8.9$ m [il centro di massa si muove sotto l'effetto delle forze (esterne) $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$ con accelerazione uniforme e costante di componenti $a_{CMX} = F_1/(6m)$ e $a_{CMY} = F_3/(6m)$, ovviamente costanti e uniformi. Il centro di massa si muove quindi di moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla (il corpo rigido è inizialmente fermo) secondo le leggi orarie $x_{CM}(t)=a_{CMX}\, t^2/2$ e $y_{CM}(t)=a_{CMY}\, t^2/2$. Lo spostamento, che avviene lungo una direzione rettilinea, è dato da $\Delta s_{CM} = (x^2_{CM}(t)+ y^2_{CM}(t))^{1/2}$. Usando le relazioni tra le forze si ottiene il risultato]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/12/2013 Firma: