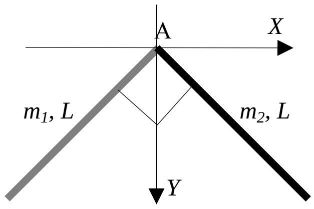
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 30/5/2014

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una squadretta è realizzata saldando insieme due **sottilissime** sbarrette **omogenee** e rigide, i cui assi formano un angolo retto, come rappresentato in figura. Le due sbarrette hanno la stessa lunghezza L = 14 cm, ma sono fatte di diversi materiali, per cui le loro masse sono diverse e valgono, rispettivamente, $m_1 = m = 0.12$ kg e $m_2 = 4m = 0.48$ kg.



a) Determinate la posizione del centro di massa della squadretta **usando il sistema di riferimento di figura** (centrato nel vertice A della squadretta).

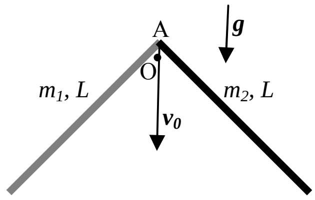
x_{CM} = …………………………………… ~ ……… m $(3/10)L/2^{1/2}$ ~ 3.0x10^{-2} m [ognuna delle due sbarrette, essendo sottile e omogenea, ha il proprio centro di massa a metà della propria lunghezza. La posizione del centro di massa del sistema complessivo può allora essere determinata riducendo il sistema a due masse puntiformi, m_1 e m_2 , poste nei centri di massa delle due sbarrette. Rispetto al riferimento indicato, le posizioni di questi due centri di massa sono, come si deduce da semplicissime considerazioni geometriche, $x_1 = -(L/2)/2^{1/2}$, $y_1 = (L/2)/2^{1/2}$, $x_2 = -x_1$, $y_2 = y_1$. Per definizione, è $x_{CM} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1+m_2)$, da cui la soluzione]

y_{CM} = …………………………………… ~ ……… m $(L/2)/2^{1/2}$ ~ 5.0x10^{-2} m [come sopra, essendo stavolta $y_{CM} = (m_1y_1 + m_2y_2)/(m_1+m_2)$, da cui, ovviamente, $y_{CM} = y_1 = y_2$]

b) Quanto vale il momento di inerzia I_O della squadretta per rotazioni attorno a un asse ortogonale alla figura e passante per il vertice A?

I_O = …………………………………… = ……… kg m^2 $(m_1+m_2)L^2/3 = (5/3)mL^2$ = 3.9x10^{-3} kg m^2 [il momento di inerzia della squadretta è dato dalla somma dei momenti di inerzia delle due sbarrette. Ognuna di esse ruota su un piano ortogonale rispetto al proprio asse, attorno a un perno che passa per l'estremità. Per cui per ognuna di esse si ha $I = (m/3)L^2$. Sommando si ottiene la soluzione]

c) Immaginate ora che, come rappresentato in figura, la squadretta cada verticalmente su un perno rigido e fisso O, di forma cilindrica e diametro molto piccolo (nell'urto, la posizione del perno viene a coincidere con il vertice A). Immediatamente prima di imperniarsi, la squadretta ha la configurazione di figura ed è dotata di moto esclusivamente traslazionale con velocità v_0 = 0.50 m/s verso il basso. Supponete che la squadretta **non "rimbalzi" sul perno**. Commentate, cercando di essere quanto più chiari ed esaurienti possibile, quali grandezze meccaniche si conservano **nel processo di urto** fra squadretta e perno, motivando per bene le vostre affermazioni. [In figura il vettore di velocità è stato disegnato sul vertice della squadretta, ma si deve intendere che tutti i punti della squadretta si muovono con la stessa velocità!]



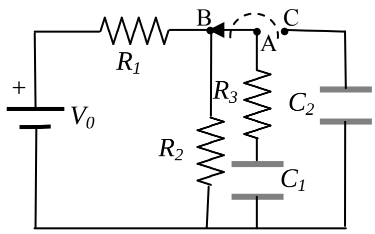
Commento: …………………………………… Il processo considerato è evidentemente un urto **anelastico** (il carattere anelastico è stabilito dal fatto che la squadretta non rimbalza sul perno!). Le grandezze meccaniche totali di cui è rilevante esaminare la conservazione sono: (i) l'energia cinetica totale, che non si conserva negli urti anelastici (c'è dell'energia coinvolta nell'urto tra vertice della squadretta e perno); (ii) la quantità di moto totale, che non si conserva non essendo il sistema isolato rispetto alle forze impulsive (sul perno sono trasferite le forze impulsive che servono a mantenerlo fissato – d'altra parte se si conservasse la quantità di moto vorrebbe dire che la squadretta continuerebbe a traslare rigidamente dopo l'urto, cosa che non si verifica!); (iii) il momento angolare totale rispetto a O, che invece si conserva essendo la forza impulsiva di cui sopra applicata al perno stesso, e pertanto di braccio nullo rispetto ai momenti delle forze. Notate che abbiamo parlato di grandezze "totali del sistema (squadretta e perno) sottoposto all'urto, ma ovviamente il perno, essendo rigido e fisso, non si muove, per cui le grandezze considerate si possono riferire anche alla sola squadretta.

d) Subito dopo l'urto, si osserva che la squadretta si mette in rotazione attorno al perno O. Quanto vale la velocità angolare ω_0 con cui **comincia** la rotazione? [Vi si chiede, in sostanza, di determinare la velocità angolare **subito dopo** l'urto]

ω_0 = …………………………………… ~ ……… rad/s $(5m/I_O)x_{CM}v_0 = (3/L^2)(3/10)(L/2^{1/2})v_0 = 9v_0/(10L2^{1/2})$ ~ 2.3 rad/s [si sfrutta la conservazione del momento angolare che abbiamo stabilito al punto precedente. Sia prima che dopo l'urto a muoversi è solo la squadretta, per cui il momento angolare totale è dato solo dal moto della squadretta. Subito dopo l'urto la squadretta ruota, per cui il momento angolare sarà esprimibile come $I_O\omega_0$. Prima dell'urto, notando che la squadretta è animata da moto traslazionale, il momento angolare sarà quello di un corpo puntiforme che si trova nella posizione del centro di massa, che ha massa pari alla massa totale della squadretta e che si muove a velocità $\mathbf{v_0}$. Ricordando la definizione di momento angolare, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, si ha che il modulo del momento angolare si può scrivere come mv_0b , con b "braccio" della quantità di moto rispetto al polo O, cioè distanza tra la retta a cui appartiene la velocità (del centro di massa) e polo O. Si vede facilmente che, grazie alla scelta del sistema di riferimento fatta al punto a) di questo esercizio, $b = x_{CM}$ da cui la soluzione]

e) Andando avanti con il tempo, si osserva che la squadretta, dopo aver ruotato per un certo tratto, comincia a scivolare sul perno e alla fine cade. Determinate la velocità angolare ω' della squadretta "subito prima" che inizi lo scivolamento. [Supponete che l'attrito tra perno e squadretta sia **trascurabile** così come qualsiasi altra forma di attrito e usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. **Cercate di spiegare per bene**, in brutta, quando e perché, secondo voi, la squadretta inizia a scivolare sul perno] ω' = ... ~ .... rad/s $(\omega_0^2+3mgL/(2^{1/2}I_O))^{1/2}$ ~ 9.8 rad/s [la rotazione della squadretta avviene in verso orario (rispetto alla figura). Questo può essere verificato per esempio notando che il **vettore** momento angolare prima dell'urto è diretto entrante nel foglio (dalla regola della mano destra). Poiché dopo l'urto il momento angolare si conserva, tale verso deve mantenersi inalterato anche quando il momento angolare è determinato dalla rotazione della squadretta, circostanza che corrisponde ad affermare che la rotazione è in verso orario. La forza peso, applicata sul centro di massa, provoca anche una rotazione nello stesso verso, per cui la squadretta continuerà a ruotare secondo lo stesso verso. Dopo una rotazione di π/4, l'asse della sbarretta 1 si verrà a trovare in direzione orizzontale (e quello della sbarretta 2 in direzione verticale). La reazione vincolare prodotta dal perno, che è la forza in grado di mantenere l'equilibrio traslazionale, cioè di evitare lo scivolamento della squadretta sul perno, ha direzione ortogonale all'asse della sbarretta: essa, infatti, deve essere uguale e opposta alla "reazione vincolare" esercitata dalla sbarretta sul perno, che, in assenza di attrito, deve essere ortogonale all'asse della sbarretta stessa. Quindi, subito dopo che la squadretta ha ruotato per π/4, essa prende a scivolare. La velocità angolare richiesta è allora quella che la squadretta ha nell'istante in cui la rotazione è proprio di π/4. Grazie al fatto che l'attrito è trascurabile, in questa fase del processo si conserva l'energia meccanica, cioè $0=\Delta E_K+\Delta U_G$. Si ha $\Delta E_K = (I_O/2)\omega'^2-(I_O/2)\omega_0^2$. Inoltre la variazione di energia potenziale è dovuta al fatto che il centro di massa della sbarretta 1 si è alzato di un tratto pari a $(L/2)/2^{1/2}$ e quello della sbarretta 2 si è abbassato di $(L/2)/2^{1/2}$. Quindi $\Delta U_G = m_1g(L/2)/2^{1/2}- m_2g(L/2)/2^{1/2} = -3mg(L/2)/2^{1/2}$. Si ottiene quindi $\omega'^2 = \omega_0^2+3mgL/(2^{1/2} I_O)$. Questa grandezza è sempre positiva (e fortemente dominata dalla variazione di energia potenziale!), dunque esiste una soluzione reale per ω' (in realtà le soluzioni reali sono due, differenti fra loro per il segno) e pertanto la squadretta raggiunge effettivamente la posizione indicata. Risolvendo si ottiene la risposta]

2. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 =1.0 kohm, R_2 = 2.0 kohm, R_3 = 4.0 kohm) e due condensatori (C_1 = 1.0 μF, C_2 = 4.0 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 3.0x10^2 V. Inoltre nel circuito è presente un commutatore, dispositivo che permette di cambiare (istantaneamente) il collegamento da AB a AC (vedi figura per capire i simboli) e che viene azionato all'istante t_0: pertanto fino all'istante t_0 A è collegato con B e il condensatore C_2 se ne sta, **scarico**, per conto suo, senza partecipare a quello che succede nel resto del circuito; dopo l'istante t_0 il circuito di vostro interesse è costituito **solo** da C_1 (precedentemente caricato), R_3 e C_2. In questa fase il generatore e le due resistenze R_1 e R_2 non sono più collegate al circuito di vostro interesse.



a) Supponendo che il sistema abbia raggiunto **condizioni stazionarie** (cioè "di regime"), quanto vale la carica Q_{01} che si trova sull'armatura "superiore" di C_1 **prima** dell'istante t_0?
Q_{01} = ... = ... C $C_1 V_0 R_2/(R_1+R_2)$ = 2.0x10^{-4} C [in condizioni stazionarie non passa corrente attraverso la resistenza R_3 e dunque è nulla la "caduta di tensione" ai suoi capi. Pertanto la differenza di potenziale ΔV_{C1} tra le armature di C_1 è la stessa che c'è ai capi di R_2 : $\Delta V_{C1} = R_2 I$, dove I è l'intensità della corrente che scorre attraverso R_2 . Tale corrente è **tutta** quella prodotta dal generatore (a regime non passa corrente nel ramo del condensatore!), cioè quella che passa nella serie $R_1 + R_2$, ovvero $I = V_0/(R_1+R_2)$. Ricordando che, per definizione di capacità, è $Q_{01} = C_1\Delta V_{C1}$, si ottiene la soluzione (presa con il segno positivo, visto che l'armatura "superiore" è collegata al polo positivo del generatore)]

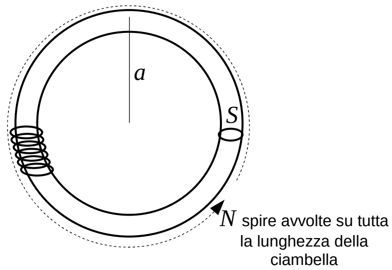
b) Dopo aver azionato il commutatore e aver atteso un tempo molto lungo (cioè per $t>>t_0$), tale che il circuito raggiunga **nuove condizioni stazionarie**, quanto vale la carica Q_1' che **rimane** sull'armatura "superiore" di C_1? [Ricordate che C_2 è inizialmente scarico e state attenti non cadere in facili trabocchetti!]
Q_1' = ... = ... C $C_1 Q_{01}/(C_1+C_2)$ = 4.0x10^{-5} C [nel "circuito di vostro interesse" non c'è più il generatore, dunque le differenze di potenziale rilevanti non sono più controllate dal generatore. Nelle nuove condizioni stazionarie si verificherà di nuovo che non passa corrente attraverso R_3 . Pertanto i due condensatori si trovano alla stessa differenza di potenziale (sono in parallelo tra loro). Osservate attentamente che il circuito non permette passaggio di corrente tra armature superiori e inferiori dei condensatori. Quindi **non** si verifica un processo di scarica completa, ma la carica Q_{01} (dovendosi conservare) si ridistribuisce tra i due condensatori. Avendo notato che la differenza di potenziale è la stessa e ricordando la definizione di capacità, deve essere $Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2$, dove abbiamo battezzato Q_2' la carica sul condensatore C_2 ; inoltre, per la conservazione della carica, $Q_{01} = Q_1'+ Q_2'$. Si ottiene un sistema algebrico di due equazioni a due incognite la cui soluzione per Q_1' fornisce la risposta]

3. Un lungo e sottile cilindro (lunghezza L e raggio a, con $L >> a$), fatto di materiale **isolante** con costante dielettrica ε_0 , all'atto della costruzione è stato riempito in modo **uniforme** con una nota quantità di carica elettrica Q .

a) Come si esprime il campo elettrico $E(r)$ **all'interno** del cilindro, cioè per $r < a$? [Dovete scrivere una **funzione** della coordinata radiale r, che indica la distanza dall'asse del cilindro. Non essendocene, non potete utilizzare valori numerici! Cercate di **spiegare bene**, in brutta, i passaggi che vi conducono alla risposta]
$E(r)$ = ... $(Q/(2\pi\varepsilon_0 La^2))r$ [vista la geometria del sistema, si applica il teorema di Gauss, supponendo che il campo sia radiale e dipenda solo da r e utilizzando una scatola di forma cilindrica, coassiale con il cilindro dato e della stessa lunghezza di questo. Poiché il campo è radiale, il flusso del campo elettrico è diverso da zero solo attraverso la superficie laterale della scatola, che vale $2\pi rL$. Pertanto $\Phi_{S,chiusa}(\mathbf{E}) = 2\pi rL\, E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0$. La carica interna alla scatola **non** è tutta la carica Q del cilindro, ma solo la frazione che si trova all'interno della scatola (di raggio $r < a$). Dato che la carica è distribuita uniformemente nel volume del cilindro, e ricordando che il volume del cilindro dipende quadraticamente dal raggio, è facile verificare che $Q_{INT} = Qr^2/a^2$, da cui la soluzione]

b) Come si scrive la differenza di potenziale ΔV tra superficie del cilindro ($r = a$) e asse del cilindro ($r = 0$)?
ΔV = ... $-Q/(4\pi\varepsilon_0 L)$ [il legame tra differenza di potenziale e campo elettrico è $\Delta V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$, dove gli estremi di integrazione si trovano nelle posizioni "iniziale" e "finale" tra le quali si vuole conoscere la differenza di potenziale. Essendo il campo radiale, si ha $\Delta V = -\int E dr$, dove E è una funzione di r secondo quanto determinato nel punto precedente. Usando come estremi di integrazione 0 e a, sulla base di quanto richiesto, e calcolando l'integrale si ottiene la risposta. Il segno negativo indica che la superficie del cilindro si trova a potenziale minore rispetto all'asse se la carica Q è positiva]

4. Un avvolgimento toroidale ("toro") è realizzato avvolgendo N = 5000 spire di filo elettrico su un supporto che ha la forma di una "sottile e larga" ciambella. Il raggio della ciambella vale infatti a = 1.0 m, mentre l'area della sezione trasversale della ciambella (di forma circolare) vale S = 3.1 cm^2 (vedi figura). Il filo di cui è realizzato l'avvolgimento ha una sezione S' = 0.1 mm^2 e presenta una resistività uniforme ρ_C = 2.0x10^{-8} ohm m.



Disegno non in scala!!

a) Quanto vale la resistenza elettrica R dell'avvolgimento?
R = …………………………………… ~ ………… ohm $\rho_C\, 2(S\,\pi)^{1/2}N/S'$ ~ 62 ohm [conoscendo la lunghezza L del filo, tenendo conto del fatto che al suo interno il campo elettrico può essere considerato omogeneo ("simmetria piana"), si ha $R = \rho_C\, L/S'$. La lunghezza del filo si trova con semplicissimi ragionamenti geometrici. Il raggio della sezione della ciambella vale $b = (S/\pi)^{1/2}$, e lo svolgimento intero della lunghezza, tenendo conto che ci sono N spire, vale $L = 2\pi bN = 2(S\,\pi)^{1/2}N$, da cui la risposta]

b) Immaginate ora che l'avvolgimento venga collegato a un generatore (ideale) di differenza di potenziale continua V_0 = 1.0x10^2 V. Quanto vale, in modulo, il campo magnetico B all'interno del "toro"? [Usate μ_0 = 4πx10^{-7} T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto, che è il "mezzo" che si trova all'interno del "toro", cioè nella ciambella. Supponete che il campo magnetico sia **uniforme**, tenete conto del fatto che la ciambella ha un raggio molto grande e una sezione molto piccola, e **spiegate per bene**, in brutta, il procedimento impiegato]
B = …………………………………… ~ ……… T $\mu_0 N V_0/(2\pi a R)$ ~ 1.6x10^{-3} T [si può convenientemente applicare il "teorema di Ampere" usando, come linea chiusa per la circuitazione, una circonferenza interna alla ciambella. A causa della ridotta sezione della ciambella, tutte le circonferenze che si possono disegnare nella ciambella hanno all'incirca lo stesso raggio a . Inoltre il campo magnetico all'interno del "toro" è uniforme e diretto tangenzialmente, cioè parallelamente alla circonferenza di circuitazione (non potrebbe essere diversamente!), per cui la circuitazione vale $2\pi aB$. Per la legge di Ohm, l'intensità della corrente che scorre nell'avvolgimento è $I = V_0/R$, con R determinata al punto precedente. L'intensità della corrente concatenata con la linea di circuitazione è, come è facile rendersi conto, $I_{CONC} = NI$. Mettendo tutto assieme si trova la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 30/5/2014 Firma: