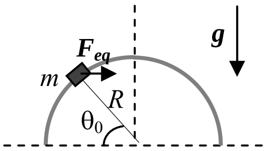
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2014

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. ***Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.***

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $\underline{m}$ può scorrere senza attrito essendo infilato su una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma di una semicirconferenza di raggio $\underline{R}$ disposta su un piano verticale. Inizialmente al manicotto è applicata una forza esterna $\boldsymbol{F_{eq}}$ che ha direzione orizzontale, verso come in figura e modulo incognito. Per effetto di questa forza il manicotto si trova in equilibrio nella posizione indicata in figura: l'angolo $\underline{\theta_0}$ è noto. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si esprime il modulo della forza F_{eq} che permette l'equilibrio?

   F_{eq} = …………………………………… $mg/tg\theta_0$ [essendo il manicotto vincolato a percorrere, se si muove, una traiettoria tangenziale, occorre determinare la condizione di equilibrio lungo questa direzione. La reazione vincolare del manicotto non ha ovviamente alcun ruolo, essendo ortogonale alla guida e dunque radiale. Le forze che hanno componenti in direzione tangenziale sono allora il peso, che ha componente $mg\cos\theta_0$, e la forza $\boldsymbol{F_{eq}}$, che ha componente $F_{eq}\sin\theta_0$. Queste due componenti hanno versi opposti (proiettate in direzione tangenziale), per cui all'equilibrio devono uguagliarsi i moduli, da cui la soluzione]

   b) Come si esprime, in queste stesse condizioni di equilibrio, il modulo della reazione vincolare N_{eq} esercitata dal tondino-guida sul manicotto?

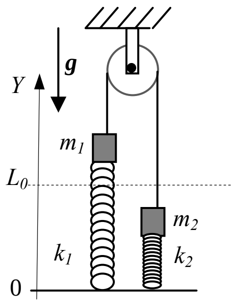
   N_{eq} = …………………………………… $mg\cos^2\theta_0/\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 = mg/\sin\theta_0$ [occorre imporre equilibrio in direzione radiale. Le componenti di forza peso e forza esterna sono, in questo caso, $mg\sin\theta_0$ e $F_{eq}\cos\theta_0$, dirette tutte e due verso il centro della semicirconferenza. Da qui la risposta, dove per il valore di F_{eq} si è usata la risposta precedente e, nel passaggio finale, si è sfruttata la circostanza che $\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 1$]

   c) A un dato istante la forza esterna applicata aumenta istantaneamente il proprio modulo al valore $F' = 2F_{eq}$, con F_{eq} determinato sopra, e il manicotto prende a muoversi. Quanto vale il modulo della reazione vincolare N' nell'istante in cui il manicotto passa per il punto più alto della guida? Immaginando che $\theta_0 = \pi/4$, che verso ha questa forza di reazione vincolare? [Supponete che la forza esterna applicata al manicotto si mantenga costante per tutto lo spostamento; per il calcolo numerico, ricordate che $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$]

   N' = …………………………………… $mg(2\cos^2\theta_0/\sin\theta_0 - 2 + \sin\theta_0)$ [quando passa per il punto considerato, il manicotto è dotato di una certa velocità v' diretta tangenzialmente. Di conseguenza, su di esso deve agire un'accelerazione centripeta, radiale e diretta verso il basso della figura, di modulo v'^2/R. L'accelerazione centripeta deve essere prodotta da forze dirette in direzione radiale. Nella posizione considerata, tali forze sono il peso (tutto diretto radialmente, in quella posizione, verso il basso) e la reazione vincolare, che ha anche direzione radiale e verso che può puntare all'alto o al basso (il manicotto è infilato nella guida). Dunque deve essere $v'^2/R = (mg+N')/m$, cioè $N' = mv'^2/R - mg$. Notate che questa equazione è scritta per le componenti radiali: in altre parole, per $N' > 0$ la reazione vincolare è diretta in verso centripeto, e viceversa. La velocità v' può essere facilmente determinata impiegando il bilancio energetico. Infatti, detto L il lavoro della forza esterna F' , si ha $L = \Delta E_k + \Delta U$, con $\Delta E_k = (m/2)v'^2$ (il manicotto parte da fermo!) e $\Delta U = mg\Delta h = mgR(1-\sin\theta_0)$, dove abbiamo scritto la variazione di quota Δh in funzione della posizione angolare iniziale. Il lavoro della forza esterna si calcola anche in modo molto immediato. Infatti la forza è costante e uniforme, per cui il lavoro è dato dal modulo della forza per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza, che è quella orizzontale. Tale proiezione è $R\cos\theta_0$, per cui $L = F'R\cos\theta_0$. Mettendo tutto insieme si ottiene $mv'^2 = F'R\cos\theta_0 - mgR(1-\sin\theta_0) = mgR(2\cos^2\theta_0/\sin\theta_0 - 1 + \sin\theta_0)$, dove abbiamo sfruttato la risposta precedente. Da questo si ottiene la soluzione]

   Verso di N': ………………………… Sulla base di quanto già scritto, il verso dipende dal segno dell'espressione di N' , cioè, in definitiva, dal valore di θ_0 . Per $\theta_0 = \pi/4$ si ha $\sin\theta_0 = \cos\theta_0 = 1/2^{1/2}$ e l'espressione tra parentesi vale $(3/2^{1/2} - 2)$, che è positiva, per cui la reazione vincolare punta verso l'interno della circonferenza.

2. Una "macchina di Atwood" un po' speciale è realizzata come rappresentato in figura. In sostanza, una fune inestensibile e di massa trascurabile passa sulla gola di una puleggia **di massa trascurabile** e termina con due masse, $m_1 = 2\underline{m}$ e $m_2 = \underline{m}$, con m noto, libere di muoversi in direzione verticale. Le masse sono vincolate a due molle di massa trascurabile e costanti elastiche rispettivamente $k_1 = \underline{k}$ e $k_2 = 4\underline{k}$, con k noto, i cui altri estremi sono fissati a un pavimento indeformabile. Le lunghezze a riposo delle due molle sono uguali e valgono $\underline{L_0}$ (noto), per cui le due masse si trovano alla stessa quota L_0 quando le due molle sono a riposo. Inoltre si sa che la fune rimane sempre tesa (anche durante il movimento delle masse) e che gli attriti sono tutti trascurabili. Per la soluzione usate il riferimento indicato in figura (asse Y verticale, orientato verso l'alto e centrato sul pavimento) e indicate con y_1 e y_2 le posizioni generiche delle due masse, da intendersi ovviamente puntiformi. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità e notate che la figura si riferisce a una "configurazione" qualsiasi, non necessariamente di equilibrio!]



   a) Come si esprime la posizione di equilibrio y_{2eq} della massa m_2?

   y_{2eq} = …………………………………… $L_0+((m_1-m_2)/(k_1+k_2))g = L_0+mg/(5k)$ [all'equilibrio le accelerazioni delle due masse devono essere nulle, cioè nulla deve essere la somma delle forze che su di loro agiscono. Nel riferimento di figura le forze elastiche si scrivono: $F_{ELA1} = -k_1(y_1-L_0)$ e $F_{ELA2} = -k_2(y_2-L_0)$. Per la geometria del sistema (guardate la figura!), deve essere $y_2 - L_0 = L_0 - y_1$ per qualsiasi posizione generica (la fune si mantiene sempre tesa e le due molle hanno la stessa lunghezza di riposo). Per l'equilibrio deve allora essere $0 = F_{ELA1} - m_1g + T_1$ e $0 = F_{ELA2} - m_2g + T_2$, ovvero, tenendo conto della condizione su y_1 e y_2 che abbiamo appena trovato: $0 = -k_1(y_{1eq}-L_0) - m_1g + T_{eq}$ e $0 = k_2(y_{1eq}-L_0) - m_2g + T_{eq}$ dove abbiamo tenuto conto che la tensione della fune è la stessa ai suoi due capi. Sottraendo membro a membro le due equazioni si trova $0 = -(k_1+k_2)(y_{1eq}-L_0) - (m_1-m_2)g$, da cui, usando anche le relazioni tra masse e costanti elastiche date nel testo, la soluzione]

   b) Inizialmente il sistema viene "preparato" spostando, con una manina, la massa m_2 nella posizione y_{20} (con $y_{20} < L_0$). In conseguenza di questo spostamento, anche la massa m_1 viene ovviamente spostata. A un dato istante la manina si toglie di mezzo e le masse sono libere di muoversi (m_2 verso l'alto e m_1 verso il basso) partendo da ferme. Come si esprime la velocità v_2' della massa m_2 nell'istante in cui essa si trova a passare per la posizione $y_2' = L_0$?

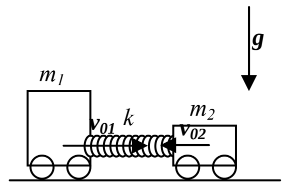
$v_2' =$ …………………………………… $((2/3)g(L_0-y_{20})+(5/3)(k/m)(L_0-y_{20})^2)^{1/2}$ [dato che gli attriti sono tutti trascurabili, si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U$. Per la variazione dell'energia cinetica, tenendo conto che i corpi in movimento sono due e che entrambi partono da fermi, si ha $\Delta E_k = (m_1/2)v_1'^2 + (m_2/2)v_2'^2 = (3/2)mv_2'^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse e il fatto che i moduli delle due velocità sono uguali, essendo la fune inestensibile e sempre tesa. La variazione di energia potenziale è dovuta alle due forze conservative agenti sul sistema, i pesi e le forze elastiche. Per il primo termine occorre determinare la variazione di quota delle due masse. Per la massa 2, essa sale verso l'alto della quantità $\Delta h = L_0 - y_{20}$. Essendo la fune inestensibile, questo spostamento è pari, in modulo, a quello della massa 1, che invece si sposta andando verso il basso. Quindi si ha $\Delta U_G = - m_1 g\Delta h + m_2 g\Delta h = -mg(L_0 - y_{20})$, Per la variazione di energia elastica si ha $\Delta U_{ELA} = -((k_1/2)\Delta\ell_1^2 + (k_2/2)\Delta\ell_2^2)$, dove abbiamo usato un'ovvia simbologia e tenuto conto del fatto che, all'istante "finale", le due molle si trovano alla lunghezza di riposo, per cui non hanno energia elastica (da qui viene il segno negativo messo davanti a tutto). Notando che $\Delta\ell_2 = -\Delta\ell_1 = \Delta h$ e usando la relazione tra costanti elastiche si ha $\Delta U_{ELA} = -(5/2)k(L_0-y_{20})^2$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

c) Dimostrate, discutendo per bene in brutta tutti gli aspetti necessari, che il moto della massa m_2 è armonico e determinatene il periodo T.

Discussione: …………………………………… Dimostrare che un moto è armonico richiede di scriverne l'equazione del moto, cioè l'accelerazione in funzione della posizione, e verificare che essa ha la forma richiesta per il moto armonico. Scriviamo allora la $a_1(y_1)$ per la massa 1, usando il riferimento di figura. Si ha $a_1(y_1) = -g+(T_1-k_1(y_1-L_0))/m_1$. Dato che il moto di una massa implica il moto dell'altra, per andare avanti dobbiamo necessariamente considerare anche l'equazione del moto della massa 2, che si scriverà $a_2(y_2) = -g+(T_2-k_2(y_2-L_0))/m_2$. Notiamo poi che, essendo la fune inestensibile, è sempre $a_1 = -a_2$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che una massa scende e l'altra sale (è naturalmente possibile anche impiegare un riferimento che consenta di avere lo stesso segno per le accelerazioni: provateci!). Inoltre, essendo puleggia e fune di massa trascurabile, si ha sempre $T_2 = T_1$ (sono moduli!). Combinando le equazioni si trova: $(m_1+m_2)a_1(y_1) = (m_2-m_1)g-k_1(y_1-L_0)+k_2(y_2-L_0)$. Questa equazione del moto, pur essendo corretta, non consente di trarre conclusioni dato che contiene le due coordinate y_1 e y_2 . D'altra parte la geometria del sistema impone che $L_0 - y_1 = y_2 - L_0$, ovvero $y_1 = 2L_0 - y_2$. Dunque l'equazione del moto si può riscrivere nella forma: $a_1(y_2) = -((k_1+k_2)/(m_1+m_2))y_2 + K_2$, con K_2 = costante (se volete, potete determinarla, ma non serve). Questa è proprio la forma dell'equazione del moto armonico, quindi il moto è armonico!

$T =$ …………………………………… $2\pi/((k_1+k_2)/(m_1+m_2))^{1/2} = 2\pi\ (3m/5k)^{1/2}$ [la pulsazione ω è la radice quadrata del termine – evidentemente positivo – che moltiplica y_2 nell'equazione del moto; determinata ω si ha $T = 2\pi/\omega$]

3. Un trenino è composto da due carrellini di massa $m_1 = 3\underline{m}$ e $m_2 = \underline{m}$, con m noto, legati tra loro da una molla di massa trascurabile e costante elastica $\underline{k}$ nota. I due carrellini si muovono con attrito trascurabile in direzione orizzontale. A un dato istante, la molla si trova alla propria lunghezza di riposo e i carrellini si muovono **in verso opposto** (vedi figura) con velocità di **modulo** differente. In particolare il carrellino 1 ha velocità $v_{01} = 2\underline{v_0}$ mentre il carrellino 2 ha velocità $v_{02} = \underline{v_0}$, con v_0 noto (in buona sostanza, i due carrellini tendono a urtarsi frontalmente). Nell'evoluzione successiva, i due carrellini prima si avvicinano tra loro e la molla viene compressa, diminuendo la propria lunghezza, e quindi si allontanano tra loro e la molla viene estesa, aumentando la propria lunghezza fino a un certo valore massimo.



a) Spiegate per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema dei due carrellini con molla si conservano nel moto, e perché l'eventuale conservazione si verifica.

Spiegazione: …………………………… Nel sistema si conserva l'energia meccanica totale, dato che gli attriti sono trascurabili. Inoltre il sistema è sicuramente isolato in direzione orizzontale, dato che tutte le forze esterne al sistema (peso e reazione vincolare della "strada") sono verticali. Di conseguenza si conserva anche la quantità di moto totale del sistema lungo la direzione orizzontale (che è l'unica consentita per la dinamica del sistema).

b) Come si esprime la velocità v_1' che il carrellino 1 possiede nell'istante (o negli istanti) in cui la molla raggiunge la propria lunghezza massima?

$v_1' =$ …………………………………… $(5/4)v_0$ [nell'istante di massima lunghezza della molla le velocità dei due carrellini devono essere uguali tra loro. Infatti un attimo prima il carrellino 1 si stava allontanando al carrellino 2, cioè $v_1 < v_2$, e un attimo dopo si stava avvicinando, cioè $v_2 < v_1$. All'istante considerato deve essere $v_2' = v_1'$. La conservazione della quantità di moto totale implica $m_1v_{01} - m_2v_{02} = m_1v_1' + m_2v_2' = (m_1+m_2)v_1'$, dove abbiamo usato i moduli per indicare le velocità iniziali e scelto come verso positivo della direzione orizzontale quello che punta alla destra della figura; per questo motivo è stato inserito un segno negativo al primo membro! Riscritta usando le relazioni tra le masse e tra le velocità iniziali, questa equazione diventa $5mv_0 = 4mv_1'$, da cui la soluzione]

c) Sapendo che la lunghezza di riposo della molla è $\underline{L_0}$ (nota), come si esprime la lunghezza massima L_{max} raggiunta dalla molla?

$L_{max} =$ …………………………………… $L_0 + (3/2)(3m/k)^{1/2}v_0$ [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta E_k + \Delta U$. La variazione dell'energia cinetica si scrive $\Delta E_k = (m_1/2)v_1'^2 - (m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_2'^2 - (m_2/2)v_{02}^2 = (m/2)(3v_1'^2+v_1'^2-12v_0^2-v_0^2)$, dove abbiamo usato le relazioni tra masse e velocità iniziali e la circostanza che $v_1' = v_2'$. Sviluppando ulteriormente e usando il risultato del quesito precedente si trova $\Delta E_k = (m/2)((25/4)-13)v_0^2 = -(27/4)(m/2)v_0^2$. La variazione dell'energia potenziale, che è ovviamente da ascrivere alla sola forza elastica, è $\Delta U = (k/2)\Delta\ell_{max}^2$, dove abbiamo osservato che inizialmente la molla non ha energia elastica trovandosi alla propria lunghezza di riposo (elongazione e/o compressione sono nulle!). Mettendo tutto insieme e scrivendo $L_{max} = L_0 + \Delta\ell_{max}$ si trova la soluzione]

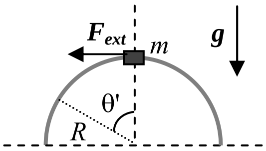
Nota: l'esito della prova verrà pubblicato appena possibile sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come codice identificativo le ultime quattro cifre del numero di matricola. In caso di assenza della matricola, indicate qui un codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 12/12/2014

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. ***Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.***

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $\underline{m}$ può scorrere senza attrito essendo infilato su una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma di una semicirconferenza di raggio $\underline{R}$ disposta su un piano verticale. Inizialmente il manicotto si trova fermo in equilibrio nel punto più alto della guida, come rappresentato in figura. A un dato istante al manicotto è applicata una forza esterna $\boldsymbol{F_{ext}}$ che ha direzione orizzontale, verso come in figura e modulo $\underline{F_{ext}}$ noto. Per effetto di questa forza il manicotto prende a muoversi, passando per la posizione indicata in figura con una linea punteggiata (l'angolo $\underline{\theta}$' è noto e vale $\pi/3$). [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $cos(\pi/3) = ½$; si suppone che la forza resti costante durante l'intero spostamento considerato]

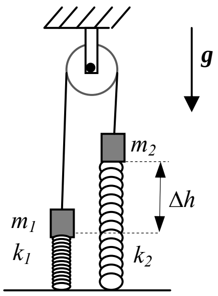


 a) Come si esprime la velocità v' con cui il manicotto passa per la posizione θ'?
 v' = …………………………………… $(F_{ext}R\sqrt{3}/m+gR)^{1/2}$ [occorre impiegare il bilancio energetico, nella forma $L = \Delta E_k+\Delta U$, con $\Delta E_k = (m/2)v'^2$ (il manicotto parte da fermo!) e $\Delta U = -mg\Delta h = -mgR(1-cos\theta') = -mgR/2$, dove abbiamo scritto la variazione di quota Δh in funzione della posizione angolare iniziale e sfruttato la conoscenza del coseno dell'angolo. L rappresenta il lavoro della forza esterna. Esso può essere determinato in maniera immediata essendo la forza costante e uniforme. Infatti si ha che il lavoro è dato dal prodotto del modulo della forza F_{ext} per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza, che è quella orizzontale. Tale proiezione vale $Rsin\theta' = \sqrt{3}R/2$. Quindi si ottiene $L = F_{ext}\sqrt{3}R/2$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

 b) Come si esprime il modulo della reazione vincolare N' esercitata dalla guida sul manicotto nell'istante in cui esso passa per la posizione θ'?
 N' = …………………………………… $3\sqrt{3}F_{ext}/2+mg/2$ [quando passa per il punto considerato, sul manicotto deve agire un'accelerazione centripeta, radiale e diretta verso il centro della semicirconferenza, di modulo $v'^2/R = (F_{ext}\sqrt{3}/m+g)$, dove abbiamo sfruttato la risposta al quesito precedente. L'accelerazione centripeta deve essere prodotta da forze dirette in direzione radiale. Nella posizione considerata, tutte le forze che agiscono sul manicotto hanno componenti radiali. Scegliendo come positivo il verso "centripeto", la forza peso ha componente $mgcos\theta' = mg/2$, la forza esterna ha componente $-F_{ext}sin\theta' = -\sqrt{3}F_{ext}/2$. Infine la reazione vincolare, che vogliamo determinare, ha solo componente radiale N' . Mettendo tutto assieme, si ottiene $(F_{ext}\sqrt{3}/m+g) = g/2 - \sqrt{3}F_{ext}/(2m) + N'/m$, da cui la soluzione]

 c) Discutete come cambierebbe la soluzione del quesito a) nel caso in cui la guida fosse scabra e presentasse un attrito dinamico con coefficiente $\underline{\mu}$ noto. [Occhio: la soluzione completa è davvero troppo complicata per voi: limitatevi a impostarla, spiegando per bene in brutta come dovreste procedere e portandola avanti quanto possibile]
 Discussione: ………………………… Nell'espressione del bilancio energetico occorre aggiungere, al lavoro della forza esterna, il lavoro L_A della forza di attrito. Cominciamo con il notare che questo lavoro deve avere un segno **negativo** essendo prodotto da una forza che è sempre opposta allo spostamento. Di conseguenza si vede che la velocità v' in queste condizioni ha un valore **minore** rispetto a quello determinato al punto a). Il calcolo di L_A è molto complicato. La forza di attrito è tangenziale (si oppone allo spostamento) e ha **modulo** $F_A = \mu N(\theta)$, dove $N(\theta)$ è la reazione vincolare espressa per ogni posizione angolare θ occupata dal manicotto nel suo spostamento. Tenendo conto che un piccolo (infinitesimo) spostamento tangenziale si può esprimere come $d\ell = Rd\theta$, si ha che deve essere calcolato l'integrale $-\int_0^{\theta'} \mu N(\theta)Rd\theta = -\mu R\int_0^{\theta'} N(\theta)d\theta$, dove abbiamo messo in evidenza quanto potevamo e usato un segno negativo per tenere conto del fatto che la forza è opposta allo spostamento. Per l'espressione di $N(\theta)$ possiamo fare riferimento a quanto stabilito nella soluzione del punto b). Si ha infatti sempre, durante tutto lo spostamento, $N(\theta) = mv^2(\theta)/R - mgcos\theta + F_{ext}sin\theta$, con $mv^2(\theta) = 2F_{ext}Rsin\theta + 2mgR(1-cos\theta)$, come si evince dalla soluzione al quesito a). Mettendo tutto insieme si ottiene $N(\theta) = 3F_{ext}sin\theta + mg(2-3cos\theta)$. Il calcolo dell'integrale diventa quindi fattibile, ma rinuncio ben volentieri a provarci!

2. Una "macchina di Atwood" un po' speciale è realizzata come rappresentato in figura. In sostanza, una fune inestensibile e di massa trascurabile passa sulla gola di una puleggia **di massa trascurabile** e termina con due masse (puntiformi!), $m_1 = \underline{m}$ e $m_2 = 3\underline{m}$, con m noto, libere di muoversi in direzione verticale. Le masse sono vincolate a due molle di massa trascurabile e costanti elastiche rispettivamente $k_1 = 2\underline{k}$ e $k_2 = \underline{k}$, con k noto, i cui altri estremi sono fissati a un pavimento indeformabile. Le lunghezze a riposo delle due molle sono uguali, per cui le due masse si trovano alla stessa quota quando le due molle sono a riposo. Inoltre si sa che la fune rimane sempre tesa (anche durante il movimento delle masse) e che gli attriti sono tutti trascurabili. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



 a) Inizialmente il sistema viene "preparato" come indicato in figura. In sostanza, una manina spinge verso il basso la massa m_1 per un certo tratto e, contestualmente, la massa m_2 si alza; la distanza in quota tra le masse in questa configurazione iniziale è $\underline{\Delta h}$ (nota). Poi la manina si toglie di mezzo e le masse cominciano a muoversi partendo da ferme. A un dato istante esse passano per una posizione tale che **entrambi le molle** si trovano alla propria lunghezza di riposo. Come si esprime la velocità v_1' della massa 1 in questo istante? [Tenete in debito conto la geometria del sistema, che permette di determinare facilmente compressione e estensione iniziali delle molle]
 v_1' = …………………………………… $(g\Delta h/2+3k\Delta h^2/(16m))^{1/2}$ [sulla base della descrizione del sistema, si capisce facilmente che, nella configurazione iniziale, la molla 1 è compressa di un tratto $\Delta\ell_1 = \Delta h/2$ e la molla 2 è estesa della stessa quantità, cioè $\Delta\ell_1 = -\Delta\ell_2$. Per capirlo, la cosa più semplice è tracciare sul disegno una linea orizzontale alla quota pari a L_0 : poiché la fune resta sempre tesa, come scritto nel testo, questo vuol dire che la sua lunghezza è tale da permettere alle due masse di occupare una posizione che corrisponde a tale quota. Lo spostamento Δh , allora, corrisponde a compressioni e estensioni come abbiamo appena scritto. Dato che gli attriti sono tutti trascurabili, si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U$. Per la variazione dell'energia cinetica, tenendo conto che i corpi in movimento sono due e che entrambi partono da fermi, si ha $\Delta E_k = (m_1/2)v_1'^2 + (m_2/2)v_2'^2 = 2mv_1'^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse e il fatto che i moduli delle due velocità sono uguali, essendo la fune inestensibile e sempre tesa. La variazione di energia potenziale è dovuta alle due forze conservative agenti sul sistema, i pesi e le forze elastiche. Per il primo termine si ha $\Delta U_G = m_1g\Delta h/2 - m_2g\Delta h/2 = -mg\Delta h$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che le variazioni di quota sono pari in modulo a $\Delta h/2$ per tutte e due le masse e la 1 sale e la 2 scende. Per il secondo termine si ha $\Delta U_{ELA} = -($

$(k_1/2)\Delta\ell_1^2 + (k_2/2)\,\Delta\ell_2^2)$, dove abbiamo usato un'ovvia simbologia e tenuto conto del fatto che, all'istante "finale", le due molle si trovano alla lunghezza di riposo, per cui non hanno energia elastica (da qui viene il segno negativo messo davanti a tutto). Notando che $\Delta\ell_1 = -\Delta\ell_2 = \Delta h/2$ e usando la relazione tra costanti elastiche si ha $\Delta U_{ELA} = -(3/8)k\Delta h^2$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

b) Come si esprime l'estensione $\Delta\ell_{eq1}$ della molla 1 quando il sistema (le due masse!) è in equilibrio? [Occhio: la posizione di equilibrio non coincide necessariamente né con la posizione iniziale né con quella "finale" della situazione considerata nel punto a); ricordate che l'estensione di una molla è definita come la differenza tra lunghezza attuale e lunghezza di riposo]

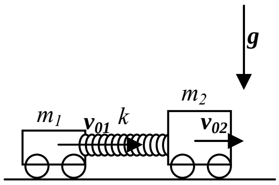
$\Delta\ell_{eq1}$ = …………………………………… $(2/3)(mg/k)$ [all'equilibrio le accelerazioni delle due masse devono essere nulle, cioè nulla deve essere la somma delle forze che su di loro agiscono. Scegliamo un riferimento verticale orientato verso l'alto. In questo riferimento le forze elastiche si scrivono per tutte e due le molle $F_{ELA} = -k_{1,2}\,\Delta\ell_{eq\,1,2}$, con ovvio significato della simbologia. L'equilibrio per m_1 impone $0 = -m_1g - k_1\,\Delta\ell_{eq1} + T_1$; quello per m_2 impone $0 = -m_2g - k_2\,\Delta\ell_{eq2} + T_2$. I moduli delle tensioni sono uguali, essendo il sistema in equilibrio, cioè $T_1 = T_2$. Facendo la differenza membro a membro delle due equazioni si ottiene $0 = (m_2-m_1)g + k_2\,\Delta\ell_{eq2} - k_1\,\Delta\ell_{eq1}$. La considerazione svolta in precedenza su estensione e compressione delle due molle rimane ancora valida, cioè è $\Delta\ell_{eq2} = -\Delta\ell_{eq1}$. Si ottiene quindi $(m_2-m_1)g - (k_2+k_1)\,\Delta\ell_{eq1}$. Da qui esce la soluzione, dove abbiamo anche usato le relazioni tra masse e costanti elastiche date nel testo]

c) Dimostrate, discutendo per bene in brutta, che il moto della massa m_1 è armonico e determinatene la pulsazione ω.

Discussione: …………………………………… Dimostrare che un moto è armonico richiede di scriverne l'equazione del moto, cioè l'accelerazione in funzione della posizione, e verificare che essa ha la forma richiesta per il moto armonico. Scriviamo allora la $a_1(y_1)$ per la massa 1, usando il riferimento citato sopra. Si ha $a_1(y_1) = -g+(T_1-k_1(y_1-L_0))/m_1$, dove si intende che il nostro asse di riferimento è centrato sul pavimento e L_0 indica la lunghezza a riposo della molla. Dato che il moto di una massa implica il moto dell'altra, per andare avanti dobbiamo necessariamente considerare anche l'equazione del moto della massa 2, che si scriverà $a_2(y_2) = -g+(T_2-k_2(y_2-L_0))/m_2$. Notiamo poi che, essendo la fune inestensibile, è sempre $a_1 = -a_2$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che una massa scende e l'altra sale (è naturalmente possibile anche impiegare un riferimento che consenta di avere lo stesso segno per le accelerazioni: provateci!). Inoltre, essendo puleggia e fune di massa trascurabile, si ha sempre $T_2 = T_1$ (sono moduli!). Combinando le equazioni si trova: $(m_1+m_2)a_1(y_1) = (m_2-m_1)g-k_1(y_1-L_0)+k_2(y_2-L_0)$. Questa equazione del moto, pur essendo corretta, non consente di trarre conclusioni dato che contiene le due coordinate y_1 e y_2 . D'altra parte la geometria del sistema impone che $L_0 - y_1 = y_2 - L_0$, ovvero $y_2 = 2L_0 - y_1$. Dunque l'equazione del moto si può riscrivere nella forma: $a_1(y_1) = -((k_1+k_2)/(m_1+m_2))y_1 + K_2$, con K_2 = costante (se volete, potete determinarla, ma non serve). Questa è proprio la forma dell'equazione del moto armonico, quindi il moto è armonico!

ω = …………………………………… $((k_1+k_2)/(m_1+m_2))^{1/2} = (3k/m)^{1/2}/2$ [è la radice quadrata del termine – evidentemente positivo – che moltiplica y_1 nell'equazione del moto]

3. Un trenino è composto da due carrellini di massa $m_1 = \underline{m}$ e $m_2 = 2\underline{m}$, con m noto, legati tra loro da una molla di massa trascurabile e costante elastica $\underline{k}$ nota. I due carrellini si muovono con attrito trascurabile in direzione orizzontale. A un dato istante, la molla si trova alla propria lunghezza di riposo e i carrellini si muovono entrambi nello stesso verso (verso la destra di figura) con velocità di modulo differente. In particolare il carrellino 1 ha velocità $v_{01} = 2\underline{v_0}$ mentre il carrellino 2 ha velocità $v_{02} = \underline{v_0}$, con v_0 noto (in buona sostanza, il carrellino 1 tende a tamponare il carrellino 2). Nell'evoluzione successiva, si osserva che il carrellino 1 si avvicina al carrellino 2 e la molla viene compressa, diminuendo la propria lunghezza.



a) Spiegate per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema dei due carrellini con molla si conservano nel moto, e perché l'eventuale conservazione si verifica.

Spiegazione: …………………………… Nel sistema si conserva l'energia meccanica totale, dato che gli attriti sono trascurabili. Inoltre il sistema è sicuramente isolato in direzione orizzontale, dato che tutte le forze esterne al sistema (peso e reazione vincolare della "strada") sono verticali. Di conseguenza si conserva anche la quantità di moto totale del sistema lungo tale direzione, che è anche l'unica di interesse per il moto.

b) Come si esprime la velocità v_2' che il carrellino 2 possiede nell'istante (o negli istanti) in cui la molla raggiunge la propria compressione massima? [Per fugare ogni dubbio, la compressione è definita come differenza fra lunghezza di riposo e lunghezza attuale della molla: quando la compressione è massima, la lunghezza attuale della molla è minima]

v_2' = …………………………………… $(4/3)v_0$ [nell'istante di massima compressione della molla, le velocità dei due carrellini devono essere uguali tra loro. Infatti un attimo prima il carrellino 1 si stava avvicinando al carrellino 2, cioè $v_1 > v_2$, e un attimo dopo si stava allontanando, cioè $v_2 > v_1$. All'istante considerato deve essere $v_2' = v_1'$. La conservazione della quantità di moto totale implica $m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1' + m_2v_2' = (m_1+m_2)v_2'$. Riscritta usando le relazioni tra le masse e tra le velocità iniziali, questa equazione diventa $4mv_0 = 3mv_2'$, da cui la soluzione]

c) Come si esprime la compressione massima $\Delta\ell_{max}$ della molla?

$\Delta\ell_{max}$ = …………………………………… $(2m/(3k))^{1/2}\,v_0$ [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta E_k + \Delta U$. La variazione dell'energia cinetica si scrive $\Delta E_k = (m_1/2)v_1'^2 - (m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_2'^2 - (m_2/2)v_{02}^2 = (m/2)(v_2'^2+2v_2'^2-4v_0^2-2v_0^2)$, dove abbiamo usato le relazioni tra masse e velocità iniziali e la circostanza che $v_1' = v_2'$. Sviluppando ulteriormente e usando il risultato del quesito precedente si trova $\Delta E_k = (m/2)((16/3)-6)v_0^2 = -(2/3)(m/2)v_0^2$. La variazione dell'energia potenziale, che è ovviamente da ascrivere alla sola forza elastica, è $\Delta U = (k/2)\Delta\ell_{max}^2$, dove abbiamo osservato che inizialmente la molla non ha energia elastica trovandosi alla propria lunghezza di riposo (elongazione e/o compressione sono nulle!). Mettendo tutto insieme si trova la soluzione]

Nota: l'esito della prova verrà pubblicato appena possibile sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come codice identificativo le ultime quattro cifre del numero di matricola. In caso di assenza della matricola, indicate qui un codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).