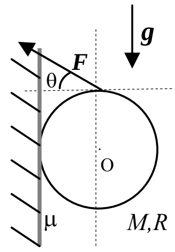
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 28/5/2015

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia "letterali" che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione****. Non tutti i dati riportati nel testo servono per la soluzione!*

1. In un progetto si vuole che un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R resti in equilibrio essendo a contatto con una parete verticale fissa, indeformabile e **scabra** (coefficiente di attrito statico μ = 0.60). Per ottenere l'equilibrio si progetta di applicare al cilindro una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo incognito, che agisce come rappresentato in figura: essa è applicata al "punto più alto" del cilindro e ha una direzione tale che l'angolo indicato vale $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $sin(\pi/6) = 1/2$]



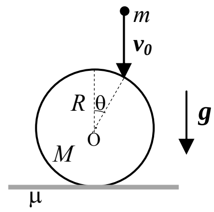
a) Supponendo che la condizione descritta porti all'equilibrio, che direzione e verso avrebbe e quanto varrebbe in modulo la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ che la parete eserciterebbe sul cilindro? L'equilibrio sarebbe effettivamente possibile? [Spiegate per bene, in brutta, procedimenti e ragionamenti]

Direzione e verso di $\boldsymbol{F_A}$: ……………………………… La forza di attrito ha sicuramente **direzione verticale**, in quanto essa tende a bloccare (blocca, di fatto) lo strisciamento del punto di contatto fra cilindro e parete, che avverrebbe in direzione tangenziale al cilindro, cioè verticale in figura. Inoltre essa è l'unica forza, oltre alla forza $\boldsymbol{F}$, ad avere un momento non nullo rispetto al centro di massa del cilindro. Essa è quindi l'unica causa che può produrre equilibrio rotazionale. Affinché questo sia possibile, la forza di attrito deve produrre un momento che tende a far ruotare il cilindro in direzione opposta rispetto alla direzione in cui tende a farlo ruotare la forza $\boldsymbol{F}$. Quest'ultima tende a imprimere al cilindro una rotazione di verso antiorario rispetto alla figura, per cui la forza di attrito deve tendere a imprimere una rotazione di verso orario. Per ottenere questo scopo essa deve essere orientata **verso l'alto**. .

F_A = …………………………………… ~ ……… N $Mg/(1+tg\theta) \sim 3.6$ N [il braccio della forza di attrito rispetto al centro di massa è R , mentre il braccio della forza $\boldsymbol{F}$, ovvero la distanza tra il centro di massa e la retta di applicazione della forza stessa, è $Rcos\theta$, come si vede facilmente dalla costruzione geometrica (similitudine triangoli, etc.). Per l'equilibrio rotazionale deve essere $FRcos\theta = F_AR$, ovvero $F = F_A/cos\theta$. Inoltre deve anche esserci equilibrio traslazionale. Considerando la direzione verticale (l'unica in cui può eventualmente traslare il centro di massa del cilindro) le forze che agiscono sono il peso Mg , diretto verso il basso, la forza di attrito F_A verso l'alto e la componente verticale della forza $\boldsymbol{F}$, $Fsin\theta$, diretta pure verso l'alto. Per l'equilibrio deve quindi essere $Mg = F_A+Fsin\theta = F_A(1+tg\theta)$, dove abbiamo usato la relazione trovata in precedenza. Da qui la soluzione]

Verifica equilibrio: ………………………………… Il contatto tra cilindro e parete può esercitare una forza di attrito massima (ovviamente si tratta di attrito statico, essendo il cilindro supposto in equilibrio!) $F_{A,MAX} = \mu N$, con N reazione vincolare che la parete esercita sul cilindro. Il valore di N si trova imponendo l'equilibrio in direzione orizzontale, dove sono presenti solo la forza $\boldsymbol{N}$ (verso la destra di figura) e la componente orizzontale della forza $\boldsymbol{F}$, $Fcos\theta$, diretta verso la sinistra di figura. Occorre quindi verificare che $F_A \le \mu Fcos\theta$, con F_A trovato sopra e $F = F_A/cos\theta$ come sopra stabilito. La disequazione da verificare è quindi $\mu \ge 1$, che numericamente non è verificata. Dunque l'equilibrio non è possibile nelle condizioni del problema (il progetto deve essere rifatto!)

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 5.0 kg e raggio R = 80 cm si trova fermo e appoggiato su un pavimento orizzontale **scabro**, che presenta un coefficiente di attrito **statico e dinamico** μ = 0.20. A un dato istante, sulla superficie laterale del cilindro, nel punto indicato in figura, arriva un proiettile puntiforme di massa m = 50 g e velocità di modulo $v_0 = 2.0\text{x}10^2$ m/s orientata verticalmente verso il basso: il punto di impatto si trova dove indicato in figura (l'angolo vale $\theta = \pi/6$). All'impatto, il proiettile si conficca istantaneamente nel cilindro e il cilindro si mette in movimento. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ con $3^{1/2} \sim 1.73$. Nella soluzione potete **trascurare** la massa del proiettile rispetto a quella del cilindro. Inoltre potete considerare "**non impulsiva**" la forza di attrito tra pavimento e cilindro]



a) Spiegate per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema proiettile+cilindro si conservano e quali non si conservano nell'urto, e perché.

Spiegazione: ……………………………………… L'urto è evidentemente anelastico e dunque non si conserva l'energia cinetica complessiva. Neanche la quantità di moto **totale** si conserva: se si conservasse, infatti, tutto il sistema dopo l'urto dovrebbe traslare verso il basso, cosa che non si verifica perché il pavimento esercita una reazione vincolare impulsiva, esterna al sistema, che impedisce la conservazione della quantità di moto in direzione verticale. Invece la quantità di moto totale si conserva in direzione orizzontale: essa è nulla prima dell'urto e nulla rimane subito dopo l'urto. Poiché l'unica forza impulsiva esterna al sistema è proprio quella esercitata dal pavimento (secondo il testo l'attrito è non impulsivo, come anche la forza peso e le altre forze eventualmente impulsive sono interne al sistema, e quindi "non contano" in questo contesto), che ha braccio nullo rispetto al centro di massa del cilindro (ma anche del sistema, considerando trascurabile la massa del proiettile), allora si conserva il momento angolare totale rispetto al centro di massa del cilindro.

b) Stabilite per bene, e in modo il più possibile "**quantitativo**", se il moto del cilindro **subito dopo l'urto** è di rotolamento puro o no. [**Suggerimento**: determinate velocità angolare e velocità del centro di massa subito dopo l'urto e traete le debite e motivate conseguenze, tutto da scrivere in modo chiaro in brutta]

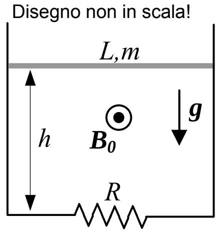
Moto subito dopo l'urto: ……………………….…… La conservazione del momento angolare totale rispetto al centro di massa del cilindro implica che, subito dopo l'urto, esso si metta a ruotare attorno al suo centro di massa (la massa del proiettile si trascura) con velocità angolare $\omega_0 = mv_0 R\sin\theta/I$ in verso orario. Invece è facile rendersi conto che non esistono cause che possano imprimere un moto di traslazione iniziale (subito dopo l'urto) al centro di massa: infatti non c'è quantità di moto iniziale in direzione orizzontale, l'unica lungo la quale il centro di massa potrebbe traslare, e non ci sono altre forze impulsive esterne in direzione orizzontale che possano mettere in moto di traslazione il cilindro nel breve intervallo temporale dell'urto. Infatti la componente orizzontale della quantità di moto si conserva e, essendo nulla prima dell'urto, nulla deve rimanere subito dopo l'urto. Dunque subito dopo l'urto il cilindro non ha velocità di traslazione, cioè $V_{CM} = 0$. Per avere rotolamento puro occorre $V_{CM} = \omega R$, che in questo caso non si può verificare, per cui il moto iniziale **non è** di rotolamento puro, ma piuttosto di rotazione.

c) Stabilite per bene e in modo "**quantitativo**" che tipo di moto fa il cilindro **negli istanti successivi** dopo l'urto (per meglio dire, dopo "subito dopo" l'urto…]

Moto negli istanti successivi dopo l'urto: ……………………….…… Il moto del cilindro dopo l'urto è soggetto all'azione della forza di attrito. Essa ha carattere dinamico finché il moto non è di rotolamento puro, cioè finché il cilindro striscia sul pavimento. Dunque le equazioni del moto si scrivono (usiamo un asse orizzontale diretto verso la destra di figura e trascuriamo la massa del proiettile): $a_{CM} = F_A/M$ e $\alpha = -F_A R/I = -2F_A/(MR)$. Notate che nello scrivere queste equazioni si è tenuto conto che la forza di attrito, dovendosi opporre allo strisciamento del punto di contatto fra cilindro e pavimento (che, a causa della rotazione in verso orario, avviene verso la sinistra di figura) è orientata verso destra, cioè ha segno **positivo** nel sistema considerato. Inoltre si è osservato che il braccio della forza di attrito vale R e si è posto un segno negativo all'accelerazione angolare, dato che il momento della forza di attrito tende a far ruotare in verso antiorario il cilindro, la cui rotazione iniziale, subito dopo l'urto, è invece oraria (e presa con il segno positivo). Se c'è strisciamento, si ha attrito dinamico, e quindi $F_A = \mu N = \mu Mg$. Quindi le equazioni del moto diventano: $a_{CM} = \mu g$ e $\alpha = -2\mu g/R$. A queste equazioni del moto (accelerazioni uniformi e costanti!), tenendo conto delle condizioni di velocità iniziali, corrispondono le leggi orarie delle velocità $v_{CM} = \mu g t$ e $\omega = \omega_0 - 2\mu g t/R$, con $\omega_0 = mv_0 R\sin\theta/I = 2mv_0\sin\theta/(MR)$ determinato prima (si è considerato $t = 0$ come istante dell'urto e posto $I = MR^2/2$, si continua a trascurare la massa del proiettile). A un dato istante t' si avrà $\omega(t')R = v_{CM}(t')$. L'istante in questione può essere facilmente calcolato, fornendo $t' = \omega_0 R/(3\mu g) = 2mv_0\sin\theta/(3M\mu g) = 0.34$ s . Fino a questo istante il moto è di rotolamento non puro, con una velocità di traslazione che aumenta e una velocità angolare che diminuisce (entrambe linearmente nel tempo). A partire da questo istante il moto di rotolamento diventa puro e la forza di attrito diventa statica. Per garantire la relazione $a_{CM} = \alpha R$, che rappresenta la condizione "dinamica" di rotolamento puro, deve evidentemente essere $F_A = 0$, per cui il moto è di rotolamento puro indefinitamente a partire dall'istante t' e le velocità di traslazione e angolari restano costanti.

3. Una barretta di lunghezza L (nota) e massa m (nota), fatta di materiale ottimo conduttore, può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione verticale mantenendosi in contatto elettrico con due guide ottime conduttrici, fisse, rigide e disposte verticalmente, collegate tra loro da un resistore R come indicato in figura. In questo modo la barretta costituisce il "lato mobile" di una "spira conduttrice" la cui resistenza elettrica è R (nota). Un campo magnetico "esterno", uniforme e costante, insiste sulla regione di interesse. Tale campo magnetico ha modulo B_0 (noto), direzione ortogonale al foglio e verso uscente da esso (vedi figura). Inizialmente la sbarretta si trova ferma a una certa quota h e da qui viene lasciata scendere con velocità iniziale nulla.

Disegno non in scala!



a) Per effetto del moto di discesa della barretta in presenza del campo magnetico "esterno", nella spira con lato mobile viene indotta una corrente. Discutete **per bene**, in brutta, che verso ha tale corrente e spiegate perché.

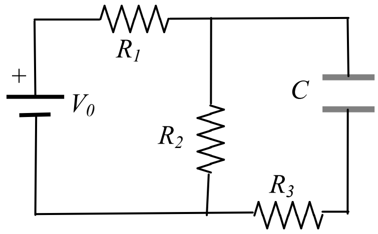
Discussione: …………………………… La corrente fluisce in senso antiorario rispetto alla figura, e la risposta può essere determinata in due modi equivalenti. Si può infatti fare uso della forza di Lorentz che, mettendo in movimento le cariche elettriche (positive, la corrente si suppone fatta di cariche positive!) trascinate verso il basso all'interno della sbarretta ed essendo determinata in verso dalla regola della mano destra, indica che sulla barretta ci deve essere un movimento di cariche verso la sinistra della figura, che corrisponde a dire che c'è una corrente che fluisce in verso antiorario. In alternativa si può fare riferimento alla legge di Lenz (o Faraday-Lenz, o equazione di Maxwell in forma integrale per la circuitazione del campo magnetico). Questa "legge" afferma che il sistema reagisce alle perturbazioni creando un campo magnetico indotto la cui variazione di flusso si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Attribuendo come positivo il segno del flusso del campo magnetico esterno attraverso la superficie della spira, si ha che tale flusso diminuisce a causa della riduzione dell'area operata dalla discesa della barretta. Il campo magnetico indotto deve allora avere **lo stesso verso** del campo magnetico esterno, in modo da compensarne la riduzione del flusso. Per la regola della mano destra in versione "ciao ciao" la corrente che crea tale campo indotto deve avere verso antiorario, come già anticipato.

b) Come si scrive l'accelerazione a, ovvero l'equazione del moto, della barretta? [Usate un riferimento verticale orientato **verso il basso** e scrivete una **funzione** dei parametri letterali noti del problema, senza usare valori numerici]

$a =$ …………………………………. $g-((B_0L)^2/(mR))v$ [utilizziamo innanzitutto la legge di Faraday per stabilire l'espressione della corrente che attraversa il circuito, e quindi la barretta. Si ha $I = fem/R$, con da $fem = -d\Phi(\mathbf{B_0})/dt$, dove il flusso del campo magnetico esterno è calcolato attraverso l'area della spira. Poiché il campo è uniforme e diretto ortogonalmente all'area della spira, si ha $\Phi(\mathbf{B_0}) = B_0 A$, con $A = Ly$ area della spira. Derivando rispetto al tempo e notando che per definizione $dy/dt = v$, velocità della barretta, si ha $I = (B_0L/R)v$. Su un elementino $d\mathbf{l}$ di lunghezza della barretta, orientato come la corrente (dunque verso la sinistra di figura), la forza si esprime come $d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B_0}$. La regola della mano destra stabilisce che tale forza è diretta verticalmente verso l'alto, dunque in direzione opposta al moto. Il valore di tale forza può essere ottenuto integrando l'espressione precedente sulla barretta. Dato che il campo magnetico è uniforme ed uniforme si suppone anche l'intensità di corrente nella barretta, l'integrazione fornisce, in modulo, $F = B_0IL = ((B_0L)^2/R)v$, dove abbiamo usato l'espressione di $I(v)$ trovata in precedenza. Da qui la soluzione, in cui il segno negativo è coerente con la scelta del riferimento e, ovviamente, compare anche l'accelerazione costante $\mathbf{g}$, che certamente agirà sulla barretta]

A

4. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 = 0.50 kohm, R_2 = 1.5 kohm, R_3 = 4.0 kohm) e un condensatore (C_1 = 1.0 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 50 V.



a) Quanto valgono, in **condizioni stazionarie**, le intensità di corrente I_1 , I_2 , I_3 che attraversano i resistori R_1 , R_2 , R_3 ?

I_1 = …………………………………… = ……….. A $V_0/(R_1+R_2)$ = 25 mA

[la corrente prodotta dal generatore passa per la serie delle due resistenze R_1 e R_2 , per cui $I_1 = I_2 = V_0/(R_1+R_2)$]

I_2 = …………………………………… = ……….. A I_1 = 25 mA [vedi sopra]

I_3 = …………………………………… = ……….. A 0 [per passare attraverso R_3 la corrente dovrebbe attraversare il condensatore, cosa che in condizioni di equilibrio non è possibile]

b) Quanto vale, **in condizioni stazionarie**, la carica Q accumulata dal condensatore?

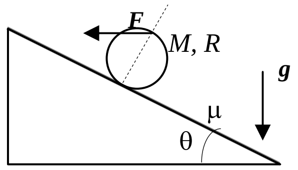
Q = …………………………………… = ... C $C\Delta V = CV_0I_2$ = 37.5x10^{-6} C [la carica sul condensatore dipende dalla differenza di potenziale ΔV ai suoi capi che, poiché non c'è caduta di potenziale attraverso R_3 (non ci passa corrente), è pari a quella che si misura ai capi della resistenza R_2, cioè $\Delta V = R_2I_2$, da cui, usando la definizione di capacità elettrica, la soluzione]

B

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 28/5/2015

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

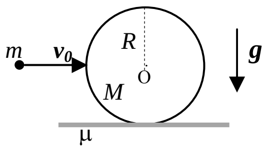
Siete invitati a riportare i risultati, sia "letterali" che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione****. Non tutti i dati riportati nel testo servono per la soluzione!*



1. Un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R si trova su un piano inclinato **scabro** (coefficiente di attrito statico μ noto) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Si vuole che il cilindro si trovi in **equilibrio**: allo scopo si usa una forza $\boldsymbol{F}$ orizzontale applicata, come in figura, a un punto del cilindro che si trova all'intersezione tra la superficie laterale al cilindro e la normale al piano inclinato tracciata dal punto di contatto (più facile vedere la figura che spiegare…). Questa forza ha modulo incognito (da determinare) ed è orientata verso la sinistra della figura. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$ e $sin(\pi/6) = 1/2$]
   a) Supponendo condizioni di equilibrio, determinate direzione e verso della forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ tra superficie del piano e cilindro e stabilite il modulo della forza F applicata che è necessario usare per l'equilibrio. [Spiegate per bene, in brutta, procedimenti e ragionamenti; non c'è bisogno di verificare che il coefficiente di attrito sia tale da permettere effettivamente l'equilibrio, che, appunto, si suppone valido]

   Direzione e verso di $\boldsymbol{F_A}$: ……………………………… Le uniche forze che hanno momento non nullo rispetto al centro di massa del cilindro sono l'attrito e la forza $\boldsymbol{F}$; infatti forza peso (applicata al centro di massa) e reazione vincolare (passante per il centro di massa) hanno entrambi braccio nullo. La forza di attrito ha sicuramente **direzione come il piano inclinato**, in quanto essa tende a bloccare (blocca, di fatto) lo strisciamento del punto di contatto fra cilindro e superficie, che avverrebbe in direzione tangenziale al cilindro, cioè lungo il piano inclinato. Inoltre per garantire equilibrio rotazionale occorre che il momento generato dalla forza di attrito sia tale da far tendere il cilindro a ruotare in verso opposto rispetto al momento della forza $\boldsymbol{F}$. Per come è orientata, quest'ultima tenderebbe a imprimere una rotazione anitoraria al cilindro, per cui il momento della forza di attrito deve tendere a imprimere una rotazione oraria. Questo è possibile solo se la forza di attrito è orientata **verso l'alto del piano inclinato**.

   F = ………………………………… ~ ……… N $Mg\, tg\theta/2 \sim 2.8$ N [il braccio della forza di attrito rispetto al centro di massa è R , mentre il braccio della forza $\boldsymbol{F}$, ovvero la distanza tra il centro di massa e la retta di applicazione della forza stessa, è $R\cos\theta$, come si vede facilmente dalla costruzione geometrica (similitudine triangoli, etc.). Per l'equilibrio rotazionale deve essere $FR\cos\theta = F_A R$, ovvero $F_A = F\cos\theta$. Inoltre deve anche esserci equilibrio traslazionale. Considerando la direzione del piano inclinato (l'unica in cui può eventualmente traslare il centro di massa del cilindro), le forze che agiscono sono la componente del peso $Mg\sin\theta$, diretta verso il basso, la forza di attrito F_A verso l'alto e la componente della forza $\boldsymbol{F}$ lungo la direzione del piano, $F\cos\theta$, diretta pure verso l'alto. Per l'equilibrio deve quindi essere $Mg\sin\theta = F_A + F\cos\theta = 2F\cos\theta$, dove abbiamo usato la relazione trovata in precedenza. Da qui la soluzione]



2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 5.0 kg e raggio R = 80 cm si trova fermo e appoggiato su un pavimento orizzontale **scabro**, che presenta un coefficiente di attrito **statico e dinamico** μ = 0.20. A un dato istante, sulla superficie laterale del cilindro, nel punto indicato in figura, arriva un proiettile puntiforme di massa m = 50 g e velocità di modulo $v_0 = 2.0\text{x}10^2$ m/s orientata orizzontalmente verso la destra della figura: il punto di impatto è tale che la direzione della velocità passa per il centro del cilindro. All'impatto, il proiettile si conficca istantaneamente nel cilindro e il cilindro si mette in movimento. [Nella soluzione potete **trascurare** la massa del proiettile rispetto a quella del cilindro. Inoltre potete considerare "**non impulsiva**" la forza di attrito tra pavimento e cilindro]
   a) Spiegate per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema proiettile+cilindro si conservano e quali non si conservano nell'urto, e perché.

   Spiegazione: …………………………………… L'urto è evidentemente anelastico e dunque non si conserva l'energia cinetica complessiva. Supponendo, come suggerito, che la forza di attrito sia non impulsiva, la quantità di moto totale si conserva, dato che non ci sono forze esterne impulsive che agiscano lungo la direzione orizzontale (che è quella della quantità di moto). Anche il momento angolare totale rispetto al centro del cilindro si conserva: l'unica ipotetica forza esterna impulsiva è infatti la reazione del pavimento, che ha braccio nullo.

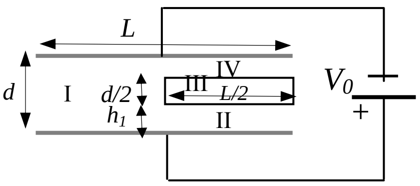
   b) Stabilite per bene, e in modo il più possibile "**quantitativo**", se il moto del cilindro **subito dopo l'urto** è di rotolamento puro o no. [**Suggerimento**: determinate velocità angolare e velocità del centro di massa subito dopo l'urto e traete le debite e motivate conseguenze, tutto da scrivere in modo chiaro in brutta]

   Moto subito dopo l'urto: ………………………… La conservazione della quantità di moto totale implica che il cilindro prenda a traslare con velocità $V_{CM0} = (m/M)v_0$ (notate che, anche se la massa m è trascurabile rispetto a M , la velocità così ottenuta è non trascurabile a causa dell'elevato valore di v_0). La conservazione del momento angolare totale rispetto al centro di massa del cilindro implica che, subito dopo l'urto, esso non abbia alcuna velocità angolare: infatti il momento angolare prima dell'urto è nullo, essendo nullo il "braccio" della quantità di moto iniziale del proiettile. Dunque $\omega = 0$. Per avere rotolamento puro occorre $V_{CM} = \omega R$, che in questo caso non si può verificare, per cui il moto iniziale **non è** di rotolamento puro, ma piuttosto di rotazione.

c) Stabilite per bene e in modo "**quantitativo**" che tipo di moto fa il cilindro **negli istanti successivi** dopo l'urto (per meglio dire, dopo "subito dopo" l'urto…]

Moto negli istanti successivi dopo l'urto: ……………………….……… Il moto del cilindro dopo l'urto è soggetto all'azione della forza di attrito. Essa ha carattere dinamico finché il moto non è di rotolamento puro, cioè finché il cilindro striscia sul pavimento. Dunque le equazioni del moto si scrivono (usiamo un asse orizzontale diretto verso la destra di figura e trascuriamo la massa del proiettile): $a_{CM} = -F_A/M$ e $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(MR)$. Notate che nello scrivere queste equazioni si è tenuto conto che la forza di attrito, dovendosi opporre allo strisciamento del punto di contatto fra cilindro e pavimento (che tende a spostarsi verso la destra della figura) è orientata verso sinistra. Inoltre si è osservato che il braccio della forza di attrito vale R e si è posto un segno positivo all'accelerazione angolare, dato che il momento della forza di attrito tende a far ruotare in verso orario il cilindro, che dunque acquista una velocità angolare positiva quando anche la velocità del centro di massa è positiva. Se c'è strisciamento, si ha attrito dinamico, e quindi $F_A = \mu N = \mu Mg$. Quindi le equazioni del moto diventano: $a_{CM} =- \mu g$ e $\alpha = 2\mu g/R$. A queste equazioni del moto (accelerazioni uniformi e costanti!), tenendo conto delle condizioni di velocità iniziali, corrispondono le leggi orarie delle velocità $V_{CM} = V_{CM0} - \mu gt$ e $\omega = 2\mu gt/R$, con $V_{CM0} = (m/M)v_0$ determinato prima (si è considerato $t = 0$ come istante dell'urto). A un dato istante t' si avrà $\omega(t')R = v_{CM}(t')$. L'istante in questione può essere facilmente calcolato, fornendo $t' = mv_0/(3\mu gM) = 2mv_0\sin\theta/(3M\mu g) = 0.34$ s . Fino a questo istante il moto è di rotolamento, con una velocità di traslazione che aumenta e una velocità angolare che diminuisce. A partire da questo istante il moto di rotolamento diventa puro e la forza di attrito diventa statica. Per garantire la relazione $a_{CM} = \alpha R$, che rappresenta la condizione "dinamica" di rotolamento puro, deve evidentemente essere $F_A = 0$, per cui il moto è di rotolamento puro indefinitamente a partire dall'istante t' .

3. Un condensatore è realizzato con due sottili lamine di materiale ottimo conduttore di spessore trascurabile e forma quadrata di lato L (noto) poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza d (nota). Le due lamine sono collegate ad un generatore di differenza di potenziale V_0 (nota). Nello spazio tra le lamine è inserita una lastra di materiale conduttore di spessore $d/2$ e sezione rettangolare, di lati L e $L/2$, che si trova nella configurazione di figura (la distanza h_1 è nota). La figura, che mostra il sistema in sezione, indica con numeri romani le diverse regioni di spazio in cui la presenza della lastra suddivide il volume interno al condensatore. [Supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter "trascurare gli effetti ai bordi"**]



a) Come si scrivono, in modulo, le espressioni del campo elettrico nelle varie regioni di spazio? [Dovete **necessariamente** spiegare **per bene** in brutta il procedimento e usare i dati noti necessari esprimendoli con i loro simboli]

E_I = …………………………………….... V_0/d [vista la simmetria del problema, i campi elettrici sono tutti orientati ortogonalmente alle armature e uniformi nei rispettivi volumi. Usando la relazione tra campo e d.d.p. si ottiene immediatamente $V_0 = E_I d$, da cui la risposta]

E_{II} = …………………………………….... $2V_0/d$ [applicando il teorema di Gauss a una scatola con asse diretto come l'asse del condensatore e superfici di base una nella regione II e l'altra nella regione IV si ottiene $E_{II} = E_{IV}$. Infatti la carica contenuta nella scatola è quella che si trova nella lastra, che è originariamente e resta sempre scarica. Inoltre all'interno del conduttore il campo è nullo in condizioni di equilibrio. Applicando la relazione tra d.d.p. e campo elettrico su un percorso che attraversa le regioni II, III, IV si ottiene, tenendo conto che i campi sono uniformi, $V_0 = E_{II}h_1 + E_{IV}(d-(h_1+d/2)) = E_{II}(h_1+d-h_1-d/2) = E_{II}d/2$, da cui la risposta]

E_{III} = …………………………………….... 0 [vedi sopra]

E_{IV} = …………………………………….... $E_{II} = 2V_0/d$ [vedi sopra]

b) Come si esprime la differenza di potenziale ΔV_{II} tra lastra e armatura "inferiore" del condensatore?

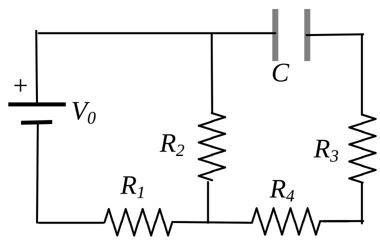
ΔV_{II} = …………………………………….... $E_{II}h_1 = -2V_0h_1/d$ [si usa ancora l'espressione che lega d.d.p. al campo, eseguendo l'integrale di linea dall'armatura inferiore alla lastra (la lastra, essendo un conduttore in equilibrio, è equipotenziale!). Usando l'espressione di E_{II} si ottiene la risposta, dove il segno negativo indica che la lastra si trova a potenziale minore rispetto all'armatura inferiore del condensatore (collegata al polo positivo del generatore)]

c) Come si esprime la capacità C del condensatore nella configurazione considerata, cioè con la lastra "in mezzo"?

C = …………………………………….... $3\varepsilon_0 L^2/(2d)$ [applicando il teorema di Gauss a una scatola con l'asse lungo l'asse del condensatore, una superficie di base all'esterno, dove il campo è nullo, e l'altra alternativamente nella regione I e II si può determinare la carica che si trova sull'armatura "inferiore" del condensatore. Nella parte di armatura corrispondente alla regione I, si trova che la densità di carica superficiale vale $\sigma_I = \varepsilon_0 E_I$, per cui la carica in questa parte dell'armatura vale $Q_I = \sigma_I L^2/2$, essendo $LxL/2 = L^2/2$ la superficie corrispondente. Ragionando allo stesso modo per la parte di armatura corrispondente alla regione II si trova $\sigma_{II} = \varepsilon_0 E_{II}$ e $Q_{II} = \sigma_{II} L^2/2$. Dunque la carica complessivamente depositata sull'armatura "positiva" è $Q = Q_I + Q_{II} = \varepsilon_0(L^2/2)(E_I+E_{II}) = \varepsilon_0(L^2/2)(V_0/d+2V_0/d)$. Tenendo conto che, per definizione, è $C = Q/V_0$ si ottiene la risposta. La soluzione si può ottenere anche per altra via, considerando il sistema come composto da tre condensatori, C_I , C_{II} , C_{IV} , collegati nel parallelo di C_I con la serie di C_{II} e C_{IV} . Dunque $C = C_I + 1/(1/C_{II} + 1/C_{IV})$. Ognuno dei condensatori considerati è a armature piane e parallele. Tutti hanno superficie pari a $L^2/2$ mentre la distanza tra le armature è d , h_1 e $(d-(h_1+d/2)) = (d/2-h_1)$ (per C_I , C_{II} , C_{IV} , rispettivamente). Si ottiene quindi $C = \varepsilon_0 (L^2/2) (1/d+1/(h_1+d/2-h_1)) = \varepsilon_0 (L^2/2) (1/d) (1+2)$, che corrisponde a quanto determinato con il metodo di sopra]

B

4. Un circuito elettrico è costituito da quattro resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 500 ohm, R_4 = 800 ohm) e un condensatore (C_1 = 200 nF) collegati come in figura ad un generatore di differenza di potenziale V_0 = 10.0 V.



a) Quanto vale l'intensità di corrente I erogata dal generatore **in condizioni stazionarie**?
I = …………………………………… = ………… mA $V_0/(R_1+R_2)$ = 20.0 mA
[in condizioni stazionarie la corrente passa solo attraverso la serie delle due resistenze R_1+R_2, dato che l'altro ramo del circuito comprende un condensatore. Applicando la legge di Ohm si trova la soluzione]

b) Quanto vale, **in condizioni stazionarie**, la carica Q accumulata dal condensatore?
Q = …………………………………… = ... C $C\Delta V = CV_0R_2/(R_1+R_2)$ = 1.60x10^{-6} C [in condizioni stazionarie non passa corrente attraverso le resistenze R_3 e R_4, dunque attraverso di esse non c'è caduta di potenziale. Di conseguenza la differenza di potenziale ΔV tra le armature del condensatore è pari a quella che si misura ai capi della resistenza R_2, cioè $\Delta V = R_2I = V_0R_2/(R_1+R_2)$, da cui, usando la definizione di capacità elettrica, la soluzione]