

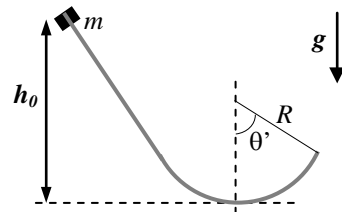
# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 18/12/2015

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. **Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.**

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m$  può scorrere senza attrito essendo infilato su una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma rappresentata in figura: un tratto obliquo è raccordato con un tratto di circonferenza di raggio  $R$ . Come indicato in figura, il tratto di circonferenza sottende un angolo  $\theta' = \pi/3$  (misurato rispetto alla verticale); l'intero percorso è disposto su un piano verticale. Inizialmente il manicotto si trova fermo sulla "sommità" del percorso, a una quota  $h_0 = 2R$  rispetto al "suolo". A un dato istante esso è lasciato andare con velocità iniziale nulla, percorrendo interamente la guida fino a distaccarsene. [Tutti gli attriti si considerano trascurabili; indicate con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità; nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta' = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta' = 1/2$ ]



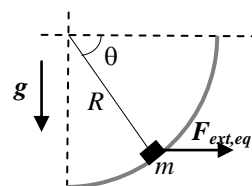
- a) Come si esprime la quota massima  $h_{MAX}$  che il manicotto raggiunge una volta staccatosi dalla guida? [Si intende che tale quota va determinata rispetto al "suolo"]

$h_{MAX} = \dots\dots\dots 13R/8$  [una volta giunto al termine della guida, il manicotto se ne distacca e compie un moto "libero" sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità, che agisce in direzione verticale. AL momento del distacco dalla guida, il manicotto possiede una velocità di modulo  $v'$  orientata nella direzione della parte terminale della guida stessa. La geometria indica che tale direzione forma un angolo  $\theta'$  rispetto all'orizzontale, per cui la velocità ha componenti  $v'\cos\theta'$  e  $v'\sin\theta'$  nelle direzioni rispettivamente orizzontale e verticale. Nell'istante in cui raggiunge la massima quota, il manicotto ha velocità nulla in direzione verticale, mentre la sua velocità in direzione orizzontale è sempre pari a  $v'\cos\theta'$  (in questa direzione non agiscono accelerazioni e il moto è rettilineo uniforme). Per l'assenza di attriti, possiamo scrivere la conservazione dell'energia meccanica considerando come istante iniziale quello di partenza del manicotto (in questo istante il manicotto è fermo) e come istante finale quello di massima quota. Si ha  $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$ , con  $\Delta E_K = (m/2)(v'\cos\theta')^2 = (m/2)v'^2/4$ , dove abbiamo esplicitato il coseno dell'angolo, e  $\Delta U_G = mg(h_{MAX} - h_0) = mg(h_{MAX} - 2R)$ , dove abbiamo usato la relazione tra l'altezza di partenza e il raggio dell'arco di circonferenza data nel testo. Il modulo della velocità  $v'$  al termine della guida può anche essere determinato dalla conservazione dell'energia meccanica, usando come istante finale quello del distacco dalla guida stessa:  $0 = (m/2)v'^2 + mg(h' - h_0)$ , dove  $h'$  è la quota del manicotto al momento del distacco dalla guida. Essa può essere determinata dalla geometria, essendo  $h' = R(1 - \cos\theta') = R/2$ , per cui si ottiene  $0 = (m/2)v'^2 + mg(R/2 - 2R) = (m/2)v'^2 - 3mg/2$ . Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione, che (si lascia per esercizio!) può anche essere determinata usando le leggi del moto per il moto libero del manicotto dopo il distacco dalla guida]

- b) Come si esprime il modulo della reazione vincolare  $N'$  esercitata dal tondino-guida sul manicotto subito prima che esso si distacchi dalla guida? [Ricordate che il manicotto è puntiforme: subito prima significa quando, di fatto, esso è arrivato al termine della guida, ma ancora risente della presenza della guida stessa...]

$N' = \dots\dots\dots 7mg/2$  [il manicotto sta compiendo un moto curvilineo, su una traiettoria circolare di raggio  $R$ , con una velocità  $v'$  determinata alla risposta precedente. Dunque su di esso deve agire una accelerazione centripeta  $a_C = v'^2/R = 3g$ , dove abbiamo usato il risultato trovato sopra. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che agiscono sul manicotto e che hanno direzione radiale, orientata verso il centro del tratto di circonferenza. Queste forze sono la reazione vincolare, che punta verso il centro del tratto di circonferenza e quindi ha componente "centripeta"  $N'$ , e la componente radiale della forza peso, che invece punta verso l'esterno e si esprime  $-mg\cos\theta'$ . Dunque deve essere  $a_C = 3g = N'/m - g\cos\theta' = N'/m - g/2$ , dove abbiamo esplicitato il coseno. Da qui la soluzione]

2. Un oggetto puntiforme di massa  $m$  può muoversi con attrito trascurabile essendo posto su una guida che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio  $R$ , disposta su un piano verticale. Inizialmente l'oggetto si trova in equilibrio nella posizione di figura (l'angolo indicato vale  $\theta = \pi/3$ , misurato rispetto all'orizzontale) essendo sottoposto all'azione di una forza "esterna" orizzontale e di verso come in figura, che ha modulo incognito  $F_{ext,eq}$ . [Indicate con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità; nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta = 1/2$ ]



- a) Come si esprime il modulo della forza  $F_{ext,eq}$ ?

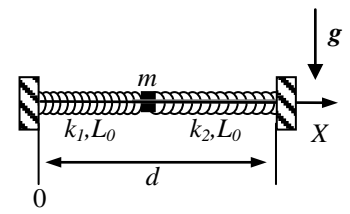
$F_{ext,eq} = \dots\dots\dots mg/\sqrt{3}$  [la presenza della guida vincola l'eventuale moto lungo la direzione tangenziale. Per avere l'equilibrio occorre verificare che l'accelerazione dell'oggetto sia nulla in questa direzione, cioè è sufficiente uguagliare i moduli delle componenti delle forze lungo la direzione considerata. Forze che hanno componenti in questa direzione sono il peso, la cui componente vale  $-mg\cos\theta$  (il segno negativo si intende associato a un asse che punta verso la sommità della guida) e la forza esterna, la cui componente vale  $F_{ext,eq}\sin\theta$ . Da qui, ed esplicitando seni e coseni, si ottiene la soluzione]

- b) Supponete ora che, per magia, il modulo della forza esterna applicata all'oggetto quadruplichi, diventando  $F_{ext} = 4F_{ext,eq}$ , con  $F_{ext,eq}$  determinato sopra. In queste nuove condizioni l'equilibrio non c'è più e l'oggetto prende a muoversi, partendo da fermo, verso il punto più alto della guida. Assumendo che la forza  $F_{ext}$  resti uniforme in modulo, costantemente orizzontale e sempre applicata all'oggetto durante la sua risalita lungo la guida, come si esprime il modulo della velocità  $v'$  con la quale l'oggetto giunge al punto più alto della guida?

$v' = \dots\dots\dots (gR/\sqrt{3})^{1/2}$  [dato che gli attriti sono tutti trascurabili e che sull'oggetto agisce la forza

esterna, si può applicare il bilancio energetico:  $L_F = \Delta E_K + \Delta U_G$ , con  $\Delta E_K = (m/2)v'^2$  (il manicotto è inizialmente fermo) e  $\Delta U_G = mg\Delta s_{vert} = mgR\sin\theta$ , dove  $\Delta s_{vert}$  rappresenta la differenza in quota tra la posizione finale e quella iniziale (l'energia potenziale aumenta perché aumenta la quota). Il lavoro della forza può essere facilmente determinato ricordando la definizione e notando che, nel caso esaminato, la forza è costante e uniforme e diretta in direzione orizzontale. Pertanto  $L_F = F_{ext}\Delta s_{hor}$ , con  $\Delta s_{hor}$  spostamento nella direzione della forza (quella orizzontale). Si trova facilmente che, in modulo, è  $\Delta s_{hor} = R(1 - \cos\theta) = R/2$ , per cui si ha  $L_F = F_{ext}R(1 - \cos\theta) = 4F_{ext,eq}R/2 = 2mgR/\sqrt{3}$ , dove per l'ultimo passaggio abbiamo usato il risultato precedente. Mettendo tutto assieme ed esplicitando i valori delle funzioni trigonometriche si trova la soluzione. Nota: nel testo distribuito agli studenti il modulo della forza esterna raddoppiava, invece di quadruplicare: se ne è tenuto conto nel giudicare gli elaborati]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m$  può muoversi con attrito trascurabile su una guida costituita da un tondino rigido e fisso disposto in direzione orizzontale. Come rappresentato in figura, al manicotto sono vincolati gli estremi di due molle distinte di massa trascurabile, che hanno la stessa lunghezza di riposo  $L_0$  ma costanti elastiche diverse, rispettivamente  $k_1$  e  $k_2$ . Gli altri due estremi di queste molle sono vincolati a due muretti verticali fissi, posti a distanza relativa  $d$  l'uno dall'altro. Si sa che valgono le seguenti relazioni tra alcuni dati noti del problema:  $L_0 = d$  e  $k_1 = 2k_2$ . Nella soluzione doвете usare il riferimento (asse X) di figura, orizzontale, orientato verso la destra e con l'origine nel muretto "di sinistra". La posizione (generica) del manicotto deve essere indicata con la coordinata (generica)  $x$  rispetto a questo riferimento.



a) Come si esprime la posizione di equilibrio  $x_{eq}$  del manicotto?

$x_{eq} = \dots\dots\dots 2d/3$  [sul manicotto, che è vincolato a muoversi sull'asse orizzontale, agiscono le forze elastiche delle due molle, entrambi dirette anche in direzione orizzontale. Le espressioni delle componenti delle due forze (dunque espressioni che hanno un segno!) sono  $F_{ELA1} = -k_1(L_1-L_0)$  e  $F_{ELA2} = k_2(L_2-L_0)$ , dove  $L_1$  e  $L_2$  sono le lunghezze delle due molle e nella seconda espressione abbiamo tolto il segno negativo per tenere conto del fatto che la molla è "orientata" in verso opposto rispetto all'asse X (infatti il vettore che viaggia dall'estremo fisso a quello libero, dove si trova il manicotto, è orientato così). Le lunghezze delle molle possono essere facilmente legate alla coordinata generica  $x$  del manicotto. Infatti è  $L_1 = x$  e  $L_2 = d-x$ . L'equazione del moto del manicotto si scrive allora  $a(x) = -((k_1+k_2)/m)x + (k_1/m)L_0 + (k_2/m)(d-L_0) = -(3k_2/m)x + (k_1/m)d$ , dove sono state tenute in conto le varie relazioni tra le grandezze del problema date nel testo. Notiamo innanzitutto che questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione  $\omega = (3k_2/m)^{1/2}$ , essendo della forma prevista per questo tipo di moto. La posizione di equilibrio si ottiene imponendo  $a(x_{eq}) = 0$ , che conduce alla soluzione]

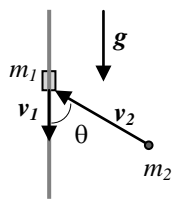
b) Supponete ora che il manicotto venga spostato, da un operatore esterno, nella posizione di coordinata  $x_0 = d/6$  e che da qui venga lasciato andare, all'istante  $t_0 = 0$ , con velocità iniziale nulla. Come si esprime la velocità  $v'$  del manicotto nell'istante in cui esso passa per la posizione di equilibrio?

$v' = \dots\dots\dots (3k_2/m)^{1/2}(d/2)$  [il moto del manicotto è di oscillazione armonica periodica che, essendo gli attriti trascurabili, continua indefinitamente. Per l'assenza di attriti, si può usare la conservazione dell'energia meccanica:  $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA1} + \Delta U_{ELA2}$  prendendo come istante iniziale quello di partenza e come istante finale quello di arresto istantaneo. Poiché il manicotto parte da fermo, è  $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ . Le variazioni di energia elastica delle molle si calcolano facilmente ricordando l'espressione dell'energia elastica di una molla con costante elastica  $k$ , che è  $U_{ELA} = (k/2)\Delta^2$ , con  $\Delta = (L-L_0)$  estensione o compressione della molla. Per la molla 1 si ha evidentemente  $\Delta_{fin} = (x_{eq}-L_0) = 2d/3 - d = -d/3$ , dove abbiamo usato il risultato precedente, e  $\Delta_{in} = (x_0-L_0) = (d/6-d) = -5d/6$ . Dunque  $\Delta U_{ELA1} = (k_1/2)d^2(1/9-25/36) = -(k_1/2)d^2(7/12) = -(k_2/2)d^2(7/6)$ , dove abbiamo usato la relazione tra le costanti elastiche data nel testo. Per la molla 2 è invece  $\Delta_{fin} = ((d-x_{eq})-L_0) = -2d/3$ , dove abbiamo usato il risultato precedente e la relazione fra le grandezze data nel testo, e  $\Delta_{in} = ((d-x_0)-L_0) = -x_0 = -d/6$ . Dunque  $\Delta U_{ELA2} = (k_2/2)(4d^2/9 - d^2/36) = (k_2/2)d^2(5/12)$ . Mettendo tutto assieme si ottiene  $\Delta U_{ELA1} + \Delta U_{ELA2} = (k_2/2)d^2(-7/6+5/12) = -(k_2/2)d^2(3/4)$ . Unendo alla variazione di energia cinetica si ottiene la soluzione]

c) Come si esprime l'istante  $t'$  in cui il manicotto passa per la prima volta nella posizione per la posizione di equilibrio, come da domanda precedente? [Date, in brutta, una spiegazione esauriente della vostra risposta]

$t' = \dots\dots\dots \pi/(2\omega) = (\pi/2)(m/(3k_2))^{1/2}$   
 Spiegazione:  $\dots\dots\dots$  Abbiamo dimostrato in una risposta precedente che il moto è armonico di pulsazione  $\omega = (3k_2/m)^{1/2}$ . Nel moto armonico si assiste all'oscillazione sinusoidale della posizione rispetto alla posizione di equilibrio. Un ciclo completo di oscillazione richiede un tempo pari al periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Lo spostamento considerato è quello che conduce da un estremo dell'oscillazione alla posizione di equilibrio, che vale  $T/4$ . Da qui la soluzione]

4. Un manicotto di massa  $m_1$  può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. A un certo istante il manicotto si muove verso il basso con velocità di modulo  $v_1$ ; in questo stesso istante nel manicotto si conficca un proiettile di massa  $m_2 = m_1/5$  che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità  $v_2$  diretta come in figura (il proiettile arriva "dal basso" e l'angolo, misurato rispetto alla verticale, vale  $\theta = \pi/3$ ) e di modulo  $v_2 = 5v_1$ . [Tenete in debito conto che il processo di urto è praticamente istantaneo; nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta = 1/2$ ]



a) Come si esprime la velocità  $v'$  con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove subito dopo l'urto?

$v' = \dots\dots\dots (5/6)(1-\cos\theta)v_1 = 5v_1/12$  [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione verticale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette in grado di produrre variazioni della quantità di moto. Infatti le forze peso che agiscono sui due oggetti sono per loro natura non impulsive, e quindi non modificano la quantità di moto del sistema nel breve intervallo temporale dell'urto. Pertanto deve essere:  $m_1v_1 - m_2v_2\cos\theta = mv_1(1-\cos\theta) = (m_1+m_2)v' = (6/5)mv'$ , da cui la soluzione, dove il segno ottenuto indica che il moto del sistema prosegue nello stesso verso del moto che inizialmente aveva il manicotto]

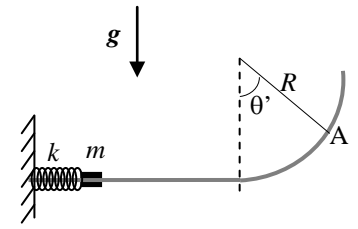
# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 18/12/2015

Nome e cognome: .....

Matricola: .....

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. **Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.**

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m$  può scorrere senza attrito essendo infilato su una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma rappresentata in figura: un tratto orizzontale è raccordato con un quarto di circonferenza di raggio  $R$ . Come indicato in figura, all'inizio del tratto orizzontale si trova un "cannoncino a molla", costituito da una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k$  che inizialmente si trova compressa per un tratto  $\Delta_0$ . Un estremo della molla è vincolato a un muretto verticale, mentre l'altro estremo è posto a contatto con il manicotto (a contatto senza essere vincolato!). A un dato istante la causa che manteneva compressa la molla viene rimossa, e il manicotto si mette in movimento da fermo che era (il cannoncino a molla funziona come il meccanismo del flipper!). Esso percorre la guida e, infine, se ne distacca. [Tutti gli attriti si considerano trascurabili; indicate con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità]



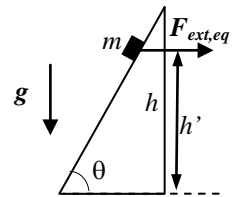
- a) Come si esprime la quota massima  $h_{MAX}$  che il manicotto raggiunge una volta distaccatosi dalla guida? [Si intende che tale quota va determinata rispetto al tratto orizzontale della guida]

$h_{MAX} = \dots\dots\dots (k/(2mg))\Delta_0^2$  [una volta giunto al termine della guida, il manicotto se ne distacca e compie un moto "libero" sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità, che agisce in direzione verticale. Poiché la guida termina con un quarto di circonferenza, è evidente che il manicotto si muoverà solo in direzione verticale e quando raggiunge la quota massima la sua velocità sarà nulla. Per l'assenza di attriti, possiamo scrivere la conservazione dell'energia meccanica considerando come istante iniziale quello di partenza del manicotto (in questo istante il manicotto è fermo) e come istante finale quello di massima quota. Si ha  $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$ , con  $\Delta E_K = 0$  (il manicotto è fermo sia all'inizio che alla fine),  $\Delta U_G = mgh_{MAX}$  e  $\Delta U_{ELA} = -(k/2)\Delta_0^2$ . Infatti per una molla si può definire l'energia elastica come proporzionale al quadrato della compressione o estensione e la molla in questione, che inizialmente è compressa per il tratto  $\Delta_0$ , perde la sua energia al distacco del manicotto dal suo estremo. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

- b) Come si esprime il modulo della reazione vincolare  $N'$  esercitata dal tondino-guida sul manicotto nell'istante in cui questo passa per la posizione A indicata in figura? [L'angolo indicato in figura misura  $\theta' = \pi/3$  rispetto alla verticale; nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta' = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta' = 1/2$ ]

$N' = \dots\dots\dots k\Delta_0^2/R - mg/2$  [il manicotto sta compiendo un moto curvilineo, su una traiettoria circolare di raggio  $R$ , con una velocità  $v'$  che può essere determinata usando la conservazione dell'energia meccanica. In questo caso, l'istante finale è quello in cui il manicotto passa per la posizione A, che si trova a una quota  $h' = R(1 - \cos\theta') = R/2$ , dove abbiamo esplicitato il coseno. Si ha quindi  $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = (m/2)v'^2 + mgR/2 - (k/2)\Delta_0^2$ . Affinché il manicotto possa percorrere la traiettoria curvilinea su di esso deve agire una accelerazione centripeta  $a_C = v'^2/R = (k/(mR))\Delta_0^2 - g$ , dove abbiamo usato il risultato trovato sopra. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che agiscono sul manicotto e che hanno direzione radiale, orientata verso il centro del tratto di circonferenza. Queste forze sono la reazione vincolare, che punta verso il centro del tratto di circonferenza e quindi ha componente "centripeta"  $N'$ , e la componente radiale della forza peso, che invece punta verso l'esterno e si esprime come  $-mg\cos\theta'$ . Dunque deve essere  $a_C = N'/m - g\cos\theta' = N'/m - g/2$ , dove abbiamo esplicitato il coseno. Mettendo tutto assieme si trova la soluzione]

2. Un oggetto puntiforme di massa  $m$  può muoversi con attrito trascurabile su un piano inclinato che forma un angolo  $\theta = \pi/3$  rispetto all'orizzontale e ha un'altezza  $h$ . Inizialmente l'oggetto si trova in equilibrio nella posizione di figura (l'altezza indicata vale  $h' = 3h/4$ ) essendo sottoposto all'azione di una forza "esterna" orizzontale e di verso come in figura, che ha modulo incognito  $F_{ext,eq}$ . [Indicate con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità; nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta = 1/2$ ]



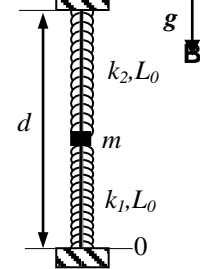
- a) Come si esprime il modulo della forza  $F_{ext,eq}$ ?

$F_{ext,eq} = \dots\dots\dots mgtg\theta = \sqrt{3}mg$  [la presenza del piano inclinato vincola l'eventuale moto lungo la direzione del piano inclinato stesso. Per avere l'equilibrio occorre verificare che l'accelerazione dell'oggetto sia nulla in questa direzione, cioè è sufficiente uguagliare i moduli delle componenti delle forze lungo la direzione considerata. Forze che hanno componenti in questa direzione sono il peso, la cui componente vale  $-mgsin\theta$  (il segno negativo si intende associato a un asse che punta verso la sommità del piano inclinato) e la forza esterna, la cui componente vale  $F_{ext,eq}\cos\theta$ . Da qui, ed esplicitando seni e coseni, si ottiene la soluzione]

- b) Supponete ora che, per magia, il modulo della forza esterna applicata al manicotto si dimezzi, diventando  $F_{ext} = F_{ext,eq}/2$ , con  $F_{ext,eq}$  determinato sopra. In queste nuove condizioni l'equilibrio non c'è più e l'oggetto prende a muoversi, partendo da fermo, verso il punto più basso del piano inclinato. Assumendo che la forza  $F_{ext}$  resti uniforme in modulo, costantemente orizzontale e sempre applicata all'oggetto durante la sua discesa lungo il piano inclinato, come si esprime il modulo della velocità  $v'$  con la quale l'oggetto giunge al punto più basso del piano inclinato?

$v' = \dots\dots\dots (3gh/4)^{1/2}$  [dato che gli attriti sono tutti trascurabili e che sul manicotto agisce la forza esterna, si può applicare il bilancio energetico:  $L_F = \Delta E_K + \Delta U_G$ , con  $\Delta E_K = (m/2)v'^2$  (il manicotto è inizialmente fermo) e  $\Delta U_G = -mgh' = -3mgh/4$ , dove il segno negativo tiene conto del fatto che il manicotto diminuisce la propria quota, e dunque la propria energia potenziale dovuta alla forza peso. Il lavoro della forza può essere facilmente determinato ricordando la definizione e notando che, nel caso esaminato, la forza è costante e uniforme e diretta in direzione orizzontale. Pertanto  $L_F = F_{ext} \Delta s_{hor}$ , con  $\Delta s_{hor}$  spostamento nella direzione della forza (quella orizzontale). Si trova facilmente che, in modulo, è  $\Delta s_{hor} = h'/tg\theta = 3h/(4tg\theta)$ . Osservando che tale spostamento avviene in verso opposto rispetto a quello della forza, si ha  $L_F = -3F_{ext} h/(4tg\theta) = -3 F_{ext,eq} h/(8tg\theta) = -3mgh/8$ , dove per l'ultimo passaggio abbiamo usato il risultato precedente. Mettendo tutto assieme si trova la soluzione]

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa  $m$  può muoversi con attrito trascurabile su una guida costituita da un tondino rigido e fisso disposto in direzione verticale. Come rappresentato in figura, al manicotto sono



vincolati gli estremi di due molle distinte di massa trascurabile, che hanno la stessa lunghezza di riposo  $L_0$  ma costanti elastiche diverse, rispettivamente  $k_1$  e  $k_2$ . Gli altri due estremi di queste molle sono vincolati al pavimento e al solaio, posti a distanza relativa  $d$  l'uno dall'altro. Si sa che valgono le seguenti relazioni tra alcuni dati noti del problema:  $L_0 = d/2$  e  $k_1 = 2k_2$ . Nella soluzione doвете usare il riferimento (asse  $Y$ ) di figura, orizzontale, orientato verso l'alto e con l'origine al pavimento. La posizione (generica) del manicotto deve essere indicata con la coordinata (generica)  $y$  rispetto a questo riferimento. [Usate il simbolo  $g$  per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Come si esprime la posizione di equilibrio  $y_{eq}$  del manicotto?

$y_{eq} = \dots\dots\dots d/2 - mg/(3k_2)$  [sul manicotto, che è vincolato a muoversi sull'asse verticale, agiscono le forze elastiche delle due molle, entrambi dirette anche in direzione verticale, e la forza peso. Le espressioni delle componenti delle due forze (dunque espressioni che hanno un segno!) sono  $F_{ELA1} = -k_1(L_1 - L_0)$  e  $F_{ELA2} = k_2(L_2 - L_0)$ , dove  $L_1$  e  $L_2$  sono le lunghezze delle due molle e nella seconda espressione abbiamo tolto il segno negativo per tenere conto del fatto che la molla è "orientata" in verso opposto rispetto all'asse  $Y$  (infatti il vettore che viaggia dall'estremo fisso a quello libero, dove si trova il manicotto, è orientato così). Le lunghezze delle molle possono essere facilmente legate alla coordinata generica  $x$  del manicotto. Infatti è  $L_1 = y$  e  $L_2 = d - y$ . Inoltre la forza peso è orientata verso il basso e quindi la sua "componente" rispetto all'asse dato si scrive  $-mg$ . L'equazione del moto del manicotto si scrive allora  $a(y) = -((k_1 + k_2)/m)y + (k_1/m)L_0 + (k_2/m)(d - L_0) - g = -(3k_2/m)y + (3k_2/m)d/2 - g$ , dove sono state tenute in conto le varie relazioni tra le grandezze del problema date nel testo. Notiamo innanzitutto che questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione  $\omega = (3k_2/m)^{1/2}$ , essendo della forma prevista per questo tipo di moto. La posizione di equilibrio si ottiene imponendo  $a(y_{eq}) = 0$ , che conduce alla soluzione. Notate che la coordinata determinata potrebbe anche risultare negativa, nel qual caso significherebbe che il manicotto "si appoggerebbe" al pavimento, ma, anche se non esplicitamente detto, si suppone che i valori numerici siano tali da rendere positivo, e quindi "accettabile", il risultato]

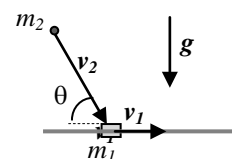
b) Supponete ora che il manicotto venga spostato, da un operatore esterno, nella posizione  $y_0 = 0$  e che poi venga, a un dato istante, lasciato libero di muoversi da questa posizione avendo velocità iniziale nulla. Discutete per bene, in brutta, che tipo di moto compie il manicotto nella sua evoluzione successiva a questo istante.

Discussione:  $\dots\dots\dots$  Come abbiamo già dimostrato alla risposta precedente, il moto è armonico. Dunque il manicotto compie delle oscillazioni armoniche attorno alla posizione di equilibrio determinata sopra.

c) Come si esprime la quota massima  $y_{MAX}$  raggiunta dal manicotto nel suo moto?

$y_{MAX} = \dots\dots\dots 2y_{eq} = d - 2mg/(3k_2)$  [ci sono due strade per arrivare alla soluzione. La più immediata sfrutta la discussione fatta in precedenza. Essendo il moto armonico attorno alla posizione di equilibrio, la quota massima si raggiunge quando il manicotto inverte il verso del suo moto. Questo avviene in una posizione che dista dalla posizione di equilibrio, in modulo, tanto quanto dista la posizione iniziale  $y_0$  da quella di equilibrio, in modulo. Deve quindi essere  $y_{MAX} - y_{eq} = y_{eq} - y_0 = y_{eq}$ , da cui la soluzione. Potete dimostrare per esercizio che alla stessa soluzione si giunge passando per la conservazione dell'energia meccanica]

4. Un manicotto di massa  $m_1$  può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Inizialmente il manicotto si muove con velocità  $v_1$  diretta nel verso positivo dell'asse  $X$  (parallelo alla guida) e di modulo  $v_1$ . A un dato istante nel manicotto si conficca un proiettile di massa  $m_2 = m_1/5$  che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità  $v_2$  diretta come in figura (il proiettile proviene "da sinistra" e l'angolo indicato, misurato rispetto all'orizzontale, vale  $\theta = \pi/3$ ) e di modulo  $v_2$ . [Nell'esprimere la soluzione può farvi comodo ricordare che  $\sin\theta = \sqrt{3}/2$  e  $\cos\theta = 1/2$ ]



a) Come si esprime la velocità  $v'$  con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove subito dopo l'urto?

$v' = \dots\dots\dots (5/6)v_1 + v_2/12$  [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione orizzontale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne (né impulsive né non impulsive) così dirette. Pertanto deve essere:  $m_1v_1 + m_2v_2\cos\theta = m_1(v_1 + v_2/10) = (m_1 + m_2)v' = (6/5)m_1v'$ , da cui la soluzione]