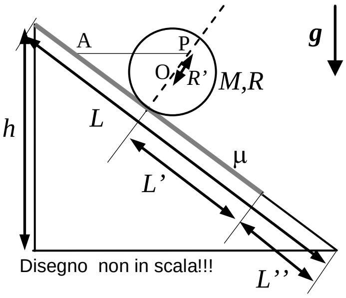
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 30/5/2016

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. ***Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.***



1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 2.0 kg e raggio R = 20 cm si trova su un piano inclinato di altezza h = 3.0 m e "lunghezza" (dell'ipotenusa) L = 5.0 m. La parte "superiore" della superficie del piano è **scabra** e presenta un coefficiente di attrito μ = 0.50 (sia statico che dinamico). La parte "inferiore" della superficie del piano è invece **liscia**. Al punto P del cilindro, che dista $R' = R/2$ dall'asse e si trova sulla normale al piano inclinato che passa per il punto di contatto (vedi figura), è vincolato un estremo di una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è inchiodato in un punto, denominato A, del piano inclinato, come in figura. Nella situazione rappresentata il cilindro si trova **fermo in equilibrio** nella parte "superiore" del piano inclinato (quella scabra). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto valgono, nelle condizioni descritte, i moduli T della tensione della fune e F_A della forza di attrito che si esercita al contatto tra cilindro e superficie del piano inclinato?

T = …………………………………… = ………… N $(2/3)Mg\ tg\theta = Mg/2$ = 9.8 N [il cilindro è un corpo rigido esteso, dunque l'equilibrio deve riguardare sia la rotazione che la traslazione. Per esaminare la rotazione, scegliamo il polo nel punto O, asse del cilindro. Rispetto a questo polo fanno momento solo la tensione della fune $\boldsymbol{T}$ e la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$. I due momenti di queste forze devono essere di segno opposto, cioè devono tendere a provocare rotazioni di verso opposto. Poiché la tensione della fune farebbe ruotare il cilindro nel verso antiorario di figura, la forza di attrito deve essere rivolta verso l'alto del piano inclinato. Inoltre si osserva come la forza di attrito abbia braccio pari a R , mentre il braccio della tensione della fune è, per motivi geometrici semplici da verificare, $R'\cos\theta$, con θ angolo tra piano inclinato e orizzontale. Da semplici considerazioni di goniometria, si trova $\sin\theta = h/L = 3/5$ e $\cos\theta = (1-(h/L)^2)^{1/2} = 4/5$. Uguagliando i moduli dei due momenti delle forze si ottiene allora $F_A R = TR'\cos\theta$, ovvero $F_A = (T/2)\cos\theta = (2/5)T$. Esaminiamo ora l'equilibrio traslazionale, a cui contribuiscono tutte le forze che hanno una componente diretta come il piano inclinato (tensione della fune, forza peso, forza di attrito). Scegliendo un asse parallelo al piano e diretto verso il basso, proiettando le componenti delle forze si ottiene: $0 = Mg\sin\theta - F_A - T\cos\theta$ .Usando la relazione appena trovata tra T e F_A si ottiene $T = (2/3)Mg\ tg\theta$, da cui la soluzione]

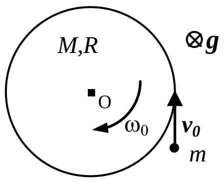
F_A = …………………………………… = ………… N $(2/5)T = Mg/5$ = 4.0 N [vedi sopra]

b) A un dato istante la fune viene tagliata (senza impartire velocità iniziale al cilindro) e il cilindro si mette in movimento. Dimostrate **chiaramente e in modo quantitativo**, in brutta, che il moto è di rotolamento puro.

Dimostrazione: ………………………………… il cilindro prende a muoversi di traslazione (del centro di massa) e di rotazione (attorno al proprio asse) per effetto delle forze rimaste in gioco. Per la rotazione, l'unica forza che produce momento è la forza di attrito, sempre diretta verso l'alto del piano inclinato (deve opporsi al moto, o moto incipiente, del punto di contatto tra cilindro e piano inclinato). L'equazione del moto rotazionale (attorno al polo O) è $\alpha = F_A R/I = F_A R/(MR^2/2) = 2F_A/(MR)$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo per rotazioni attorno al suo asse. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa si scrive invece, rispetto allo stesso asse usato prima, $a_{CM} = g\sin\theta - F_A/M$. In queste equazioni in generale F_A è incognita. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, deve valere la condizione $\alpha = a_{CM}/R$, che costituisce un'ulteriore equazione. Se questa equazione è valida, risolvendo per F_A si ottiene $F_A = Mg\sin\theta/3$. Dobbiamo ora chiederci se questo valore della forza di attrito è compatibile con le condizioni del problema. L'attrito in questione, essendo coinvolto in un moto di rotolamento puro in cui il punto di contatto non striscia rispetto al piano inclinato, deve essere $F_A \le \mu N = \mu Mg\cos\theta$, dove abbiamo esplicitato l'espressione della reazione vincolare esercitata al contatto tra piano inclinato e cilindro. Si ottiene in definitiva una disequazione: $\mu \ge tg\theta/3 = 1/4$, dove abbiamo esplicitato il valore delle funzioni trigonometriche. Questa disequazione è soddisfatta, per cui la forza di attrito necessaria al rotolamento puro può effettivamente essere fornita dal contatto considerato. Ora, poiché il cilindro parte da fermo, la condizione posta sulle accelerazioni traslazionali e rotazionali è sufficiente per garantire che, negli istanti successivi, il moto sia di rotolamento puro.

c) Sapendo che il centro di massa del cilindro percorre un tratto L' = 2.0 m della parte "superiore" (scabra) del piano inclinato e un tratto L'' = 1.0 m della parte "inferiore" (liscia), e supponendo di poter trascurare altre cause di attrito, quanto vale la sua velocità angolare ω nell'istante in cui esso raggiunge la base del piano inclinato?

ω = …………………………………… ~ ………… rad/s $((4/5)\ gL'/R^2)^{1/2}$ ~ 20 rad/s [come appena dimostrato, il cilindro si muove di rotolamento puro nella parte "superiore". Il moto, invece, non può più essere di rotolamento puro nella parte "inferiore". Infatti qui la forza di attrito scompare, la velocità di traslazione aumenta a causa della componente attiva della forza peso, mentre la velocità angolare rimane **costante**. Dunque per rispondere alla domanda è sufficiente calcolare la velocità angolare al termine della parte superiore. Il modo più semplice sfrutta la conservazione dell'energia meccanica, valida a causa del fatto che la forza di attrito nel rotolamento puro è statica e non compie lavoro (e inoltre non ci sono altre forze, oltre al peso, che compiano lavoro). Per la conservazione si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione dell'energia cinetica, che corrisponde all'energia cinetica poiché il cilindro parte da fermo, è la somma di quella legata alla traslazione e quella legata alla rotazione: $\Delta E_K = (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 = (M/2)\ \omega^2 R^2 + (MR^2/4)\omega^2 = (3/4)MR^2\ \omega^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le velocità data dalla condizione di rotolamento puro e abbiamo esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo. La variazione dell'energia potenziale è dovuta alla variazione di quota del centro di massa. Poiché esso percorre **nella direzione del piano** un tratto L' , per la geometria la variazione di quota è $L'h/L = (3/5)L'$, per cui si ha $\Delta U = -(Mg)(3/5)L'$, con un segno negativo a indicare che l'energia potenziale diminuisce (il cilindro scende!). Mettendo tutto assieme si trova la soluzione]

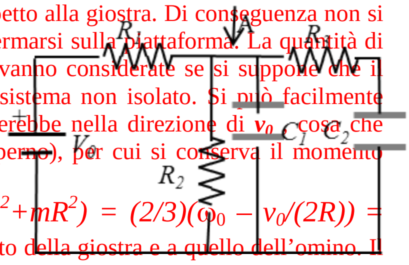


2. In un luna park si trova una giostra realizzata con una piattaforma costituita da un disco pieno e omogeneo di raggio R = 1.0 m e massa M = 2.0x10^2 kg che può ruotare con attrito trascurabile su **un piano orizzontale** attorno a un perno fisso e rigido che passa per il suo asse geometrico (punto O di figura). Inizialmente la giostra è in rotazione (a "folle", cioè non essendo collegata ad alcun motore) con velocità angolare ω_0 = 1.0 rad/s nel verso orario di figura. A un dato istante un omino puntiforme di massa $m = M/4$ = 50 kg ci sale sopra avendo una velocità diretta orizzontalmente come in figura (tangente al disco), di modulo v_0 = 1.0 m/s. Subito dopo essere salito sulla giostra, l'omino rimane fermo (rispetto alla giostra) nel punto in cui si trova.

a) Quanto vale la velocità angolare ω del sistema omino + giostra **subito dopo** che l'omino ci è salito sopra? **Dovete** discutere per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano nel processo descritto sopra, e perché si conservano.

Discussione e spiegazione: …………………………………… Il processo è una sorta di urto anelastico: infatti inizialmente si hanno due oggetti materiali (giostra+omino) che poi diventano uno solo, visto che l'omino è fermo rispetto alla giostra. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica totale, dato che un po' di energia verrà spesa per permettere all'omino di fermarsi sulla piattaforma. La quantità di moto non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, le forze peso), che non vanno considerate se si suppone che il processo sia di breve durata, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Si può facilmente dimostrare che, se si conservasse la quantità di moto, dopo l'urto la giostra con l'omino sopra traslerebbe nella direzione di v_0, cosa che ovviamente non si verifica. Tuttavia tali forze impulsive hanno braccio nullo (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale rispetto a tale polo.

ω = …………………………………… = ………. rad/s $((M/2)R^2\omega_0 - mv_0R)/((M/2)R^2+mR^2) = (2/3)(\omega_0 - v_0/(2R)) =$ 0.33 rad/s [usiamo la conservazione del momento angolare. Prima dell'"urto" esso è dovuto al movimento della giostra e a quello dell'omino. Il momento angolare della giostra vale in modulo $I\omega_0 = (MR^2/2)\omega_0$, dove abbiamo usato il momento di inerzia di un disco pieno omogeneo. Quello dell'omino vale in modulo mv_0R. Questi due momenti angolari, che in realtà sono componenti "assiali" (diretti ortogonalmente al foglio) del momento angolare, hanno chiaramente segni opposti (questo si intuisce guardando i versi della rotazione della giostra e del moto dell'omino). Il momento angolare subito dopo l'urto vale allora $L' = (MR^2/2)\omega_0 - mv_0R$. Questo momento angolare è dato dalla rotazione del sistema giostra + omino, che ha momento di inerzia $I' = (MR^2/2)+mR^2$ (somma di quello della piattaforma e quello dell'omino puntiforme, che si trova a distanza R dall'asse) e ruota alla velocità angolare ω . Quindi deve essere $\omega = L'/I'$, da cui la soluzione]



3. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 =1.0 kohm, R_2 = 4.0 kohm, R_3 = 2.0 kohm) e due condensatori (C_1 = 1.0 μF, C_2 = 2.0 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10 V.
   a) Quanto vale, in **condizioni stazionarie** (cioè "a regime"), l'intensità di corrente I erogata dal generatore?

   I = …………………………………… = ……….. mA $V_0/(R_1+R_2) = 2.0$ mA [in condizioni stazionarie la corrente erogata dal generatore scorre solo nella serie di dei resistori R_1 e R_2. Infatti i condensatori C_1 e C_2, una volta caricati (una volta raggiunte le condizioni stazionarie) non richiedono più corrente. Dalla legge di Ohm si trova quindi $I = V_0/R_{tot}$, da cui la risposta]

   b) Quanto valgono, **in condizioni stazionarie**, la cariche Q_1 e Q_2 accumulate su C_1 e C_2?

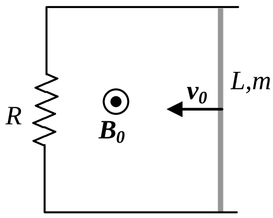
   Q_1 = …………………………………… = ... C $C_1\Delta V = C_1V_0R_2/(R_1+R_2) = 8.0\mathrm{x}10^{-6}$ C [la carica sul condensatore dipende dalla differenza di potenziale ΔV ai suoi capi attraverso la relazione $Q = C\Delta V$. Dato che attraverso R_3 non passa corrente, ed è quindi nulla la differenza di potenziale ai suoi capi, entrambi i condensatori si trovano alla stessa differenza di potenziale ΔV, che è anche la stessa che esiste ai capi di R_2, cioè $\Delta V = R_2I$, da cui la soluzione]

   Q_2 = …………………………………… = ... C $C_2\Delta V = C_2V_0R_2/(R_1+R_2) = 1.6\mathrm{x}10^{-5}$ C [vedi sopra]

   c) Supponete ora che, a un certo istante, il circuito venga **interrotto** nel punto A di figura. Da questo istante in poi, la parte "di destra" del circuito (i due condensatori e R_3) **non è più collegata al resto** (generatore e R_1 , R_2). Discutete, spiegando per bene in brutta, se negli istanti successivi le cariche accumulate sui condensatori si modificano o no.

   Discussione e spiegazione: …………………………………… Nelle condizioni proposte, la serie dei condensatori e della resistenza $R3$ si trova isolata dal resto del circuito. Non esiste alcun collegamento resistivo tra le armature dei condensatori, che pertanto non hanno modo di "scaricarsi". Potrebbe verificarsi uno spostamento delle cariche dall'armatura di un condensatore all'armatura dell'altro, che potrebbe avvenire attraverso R_3 . Tuttavia, affinché questo si verifichi, e necessaria una differenza di potenziale tra le armature superiori dei due condensatori. Essi si trovano inizialmente allo stesso potenziale (vedi sopra) e quindi non si può innescare alcuna corrente. Di conseguenza, le cariche accumulate sui condensatori rimangono inalterate (idealmente in eterno!).

4. Una barretta di materiale ottimo conduttore di lunghezza L e massa m (entrambe **note**) può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale, mantenendo contatto elettrico con due guide fisse e rigide, anch'esse di materiale conduttore. Le due guide sono collegate tra loro attraverso un resistore elettrico con resistenza R **nota**. Un campo magnetico esterno, **uniforme, costante** e di modulo B_0 **noto**, attraversa il piano su cui si muove la barretta (la figura mostra che $\boldsymbol{B_0}$ "esce dal foglio"). La barretta è mossa da un operatore esterno (una manina!), che fa in modo di mantenerla a velocità diretta orizzontalmente, verso la **sinistra** di figura, e avente modulo **costante** v_0 **noto**.



   a) In queste condizioni si osserva che una certa corrente scorre nel circuito (costituito da barretta, guide e resistenza). Spiegate **per bene**, in brutta, che verso ha questa corrente (nella spiegazione deve essere chiaro il verso e il meccanismo che lo determina).

   Spiega: …………………………………… Il verso è **antiorario** (rispetto alla figura) e ci sono due strade che possono essere percorse per spiegare il perché. La prima si basa sulla forza di Lorentz che agisce sui portatori di carica presenti nella barretta. Questi portatori sono "trascinati" dalla barretta stessa, per cui si muovono, in prima approssimazione, orizzontalmente e verso la sinistra di figura. Per la presenza del campo magnetico, sui portatori di carica positivi (per i negativi il verso risultante è ovviamente opposto) la forza di Lorentz risulta agire verso l'alto di figura, da cui il verso della corrente individuato. Altra strada è quella che passa per la legge di Faraday, ovvero per la legge di Lenz (il segno negativo che compare nell'equazione rilevante). Il significato di questa legge è che, se può, il circuito reagisce in modo da minimizzare la variazione di flusso di campo magnetico a esso concatenato. Quando la barretta si muove, si riduce l'area delimitata dal circuito, per cui, supponendo convenzionalmente che il flusso sia positivo in corrispondenza di un campo che "esce" dal foglio il flusso del campo magnetico attraverso il circuito diminuisce. La corrente indotta nel circuito deve allora essere tale da produrre un campo magnetico indotto che annulli questa variazione di flusso. La corrente che circola in senso **antiorario** produce un campo indotto che ha lo stesso verso (e direzione) del campo esterno. Dunque la variazione di flusso sarà minimizzata, poiché il campo magnetico indotto contribuirà con un termine positivo (secondo la convenzione) al flusso totale.

   b) Come si esprime la potenza P che l'operatore deve erogare per mantenere la barretta in moto costante e uniforme? Spiegate per bene, in brutta, i ragionamenti che vi portano alla risposta! [Non avete valori numerici: usate le grandezze necessarie indicandole con i simboli delle grandezze dichiarate note nel testo]

   Spiega: ………………………………….. Cominciamo con l'osservare che, se non ci fosse il campo magnetico (e tutto l'ambaradan di circuito e resistenza), l'operatore non dovrebbe erogare alcuna potenza per mantenere a velocità costante la barretta. Infatti gli attriti sono dichiarati trascurabili, e, speso un certo lavoro iniziale per mettere in moto la barretta, non occorre forza, e quindi potenza, per tenerla a velocità costante. Invece nel circuito, sulla base di quanto appena discusso, circola una corrente elettrica, che si trova ad attraversare la resistenza R . Di conseguenza c'è una potenza che viene "dissipata" per effetto Joule dalla resistenza. Qualcuno deve fornire tale potenza, e, con un semplice ragionamento di bilancio energetico complessivo, questo qualcuno è proprio l'operatore (l'unico agente che può fare lavoro).

   P = …………………………………… $(B_0Lv_0)^2/R$ [la potenza dissipata per effetto Joule si scrive $P = \Delta V\, I = (\Delta V)^2/R$, con ΔV la d.d.p. ai capi della resistenza. Questa è pari alla d.d.p. (o forza elettromotrice, con una brutta espressione) indotta nella spira a lato mobile che stiamo considerando. Per la legge di Faraday, essa si scrive $\Delta V = -d\Phi_S(\mathbf{B_0})/dt$, con $\Phi_S(\mathbf{B_0})$ il flusso del campo magnetico "esterno" calcolato sulla superficie S della spira stessa. Essendo il campo magnetico uniforme e costante, e ortogonale al piano su cui giace la spira con lato mobile, il flusso si scrive $\Phi_S(\mathbf{B_0}) = B_0 S$ (per i segni si è adottata la convenzione accennata in precedenza). La superficie della spira è data dal prodotto tra L e la "distanza" (in direzione orizzontale) della barretta dall'estremo "di sinistra" della spira, ovvero del circuito. Poiché la barretta si muove a velocità costante e uniforme, questa distanza varia linearmente con il tempo. Facendo la derivata temporale richiesta dalla legge di Faraday, l'unico termine che varia nel tempo (e che, quindi, non può essere messo in evidenza) è proprio questo. Si ottiene allora $d\Phi_S(\mathbf{B_0})/dt = B_0 L v_0$, da cui la soluzione]