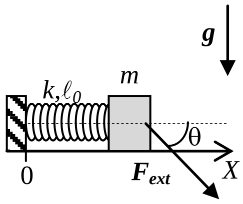
# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1/EXTRA - 7/4/2017

**Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………**

*Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

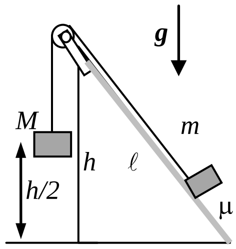
1. Un punto si muove su un piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio $R$ = 50 cm con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante $t_0$ = 0 il punto si trova fermo nella posizione $\theta_0$ = 0 e si sa che all'istante $t_1$ = 2.0 s il punto ha percorso un quarto di giro.
   a) Quanto vale l'istante $t_2$ al quale il punto avrà percorso un giro completo?
   $t_2$ = …………………………………… = ……. s $2\,t_1 = 4.0$ s [il moto angolare è uniformemente accelerato con partenza da fermo, dunque la legge oraria del moto è $\theta(t) = \alpha t^2/2$ . Dai dati del problema si ha $\pi/2 = \alpha t_1^2/2$, da cui si ricava $\alpha = \pi/t_1^2$ . D'altra parte deve anche essere $\theta_2 = 2\pi = \alpha t_2^2/2$ , da cui la soluzione]
   b) Come si esprime, in **modulo**, l'accelerazione $a_2$ del punto all'istante $t_2$?
   $a_2$ = …………………………………= …….. m/s² $(\pi R/t_1^2)(16\,\pi^2+1)^{1/2} = 4.9$ m/s² [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_C(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. Poiché la legge oraria della velocità angolare, considerando che il punto parte da fermo, è $\omega(t) = \alpha t = \pi t/t_1^2$ , all'istante considerato è $a_{C2} = \pi^2 t_2^2 R/\, t_1^4 = 4\pi^2 R/\, t_1^2$ , dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il risultato del quesito precedente. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$ , che è evidentemente costante e vale sempre $a_t = \pi R/\, t_1^2$ . Le due direzioni considerate sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_2 = ((4\pi^2 R/\, t_1^2)^2+(\pi R/\, t_1^2)^2)^{1/2} = (\pi R/\, t_1^2)(16\pi^2+1)^{1/2}$]

2. Un piccolo blocchettino di massa $m$ = 100 g (da considerare come un oggetto puntiforme) può muoversi con **attrito trascurabile** su un piano **orizzontale**. Il blocchettino è agganciato ad una molla di massa trascurabile, lunghezza di riposo $\ell_0$ = 50 cm e costante elastica $k$ = 0.20 N/m, il cui altro estremo è vincolato ad un muretto verticale, rigido ed indeformabile, posto all'origine dell'asse $X$ (si veda la figura). Inoltre, sul blocchettino agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}_{ext}$ costante, diretta come in figura (l'angolo rispetto all'orizzontale vale $\theta = \pi/3$). In queste condizioni si osserva che il blocchettino si trova in equilibrio nella posizione $x_0$ = 80 cm. [Usate l'asse di riferimento $X$ indicato in figura, con origine sul muretto; ricordate che $\cos(\pi/3)$ = ½ e $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ , con $\sqrt{3} \sim 1.73$]




   a) Quanto vale il modulo della forza esterna $F_{ext}$?
   $F_{ext}$ = …………………………………… = .......... N $(k/\cos\theta)(x_0-\ell_0) = 0.12$ N [affinché ci sia equilibrio occorre che forza elastica e componente orizzontale della forza esterna si bilancino, cioè deve essere $0 = -k(x_0-\ell_0)+ F_{ext}\cos\theta$ , da cui la soluzione]
   b) Supponete ora che, a un dato istante, la forza esterna diminuisca improvvisamente il suo modulo al valore $F' = F_{ext}/8$ , con $F_{ext}$ determinato sopra. In conseguenza di questo, il blocchetto comincia a muoversi, partendo da fermo, verso la sinistra di figura. Quanto vale la sua velocità $v'$ nell'istante (detto $t'$) in cui passa per la posizione $x' = \ell_0$ ? [In questo istante, la molla si trova alla propria lunghezza di riposo: si intende che la forza esterna rimane applicata, costante in modulo, direzione e verso, per l'intero processo considerato]
   $v'$= .................................................. = ……… m/s $(x_0-\ell_0)(k/(2m))^{1/2}$ = 0.30 m/s [poiché le forze di attrito sono trascurabili, conviene impiegare il bilancio energetico nella forma $L_{F'} = \Delta E_k + \Delta U$ . In questa espressione, $\Delta E_k = (m/2)v'^2$ , dato che il blocchetto parte da fermo (era in equilibrio). La variazione di energia potenziale è poi dovuta unicamente alla forza elastica, e si può esprimere come $\Delta U= -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$ , dove si è tenuto in conto che, nella configurazione "finale", quando la molla è alla propria lunghezza di riposo, l'energia elastica è nulla e quindi l'unico contributo è quello dell'energia elastica iniziale. Infine, il lavoro della forza esterna, che rimane costante durante il processo, può essere espresso come prodotto tra spostamento del blocchettino e proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento: $L_{F'} = -F'\cos\theta(x_0-\ell_0)$ , dove il segno negativo indica che forza e spostamento sono discordi in verso. Mettendo tutto assieme si ottiene $-F'\cos\theta(x_0-\ell_0) = (m/2)v'^2 -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$ , ovvero, sostituendo $F' = F_{ext}/8 = (k/(8\cos\theta))(x_0-\ell_0)$ , $-(k/4)(x_0-\ell_0)^2 = (m/2)v'^2 -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$ , equazione in cui l'unica incognita è $v'$ . Da qui la soluzione]
   c) Immaginate poi che, proprio all'istante $t'$ di cui al punto precedente, la forza esterna venga definitivamente annullata. Come si scrive la legge oraria del moto, $x(t)$, per $t > t'$ ? [Dovete tenere in debito conto delle condizioni iniziali del problema; non usate valori numerici, ma impiegate i simboli]
   $x(t)$= ................................................ $(v'/\omega)\cos(\omega\,(t-t')+ \pi/2)+ \ell_0 = -(v'/\omega)\sin(\omega\,(t-t'))+ \ell_0$ , con $\omega = (k/m)^{1/2}$
   [il moto avviene sotto l'azione della sola forza elastica, per cui $a(x) = -(k/m)\,(x_0-\ell_0)$ . Questa equazione dà luogo a un moto armonico, con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$ . La legge oraria "generica" del moto è $x(t) = A\cos(\omega(t-t')+\phi) + x_{eq}$ , con $x_{eq} = \ell_0$ posizione di equilibrio e $A$ e $\phi$ da determinare in funzione delle condizioni iniziali. Notate che nella legge oraria si è tenuto in debito conto del fatto che l'istante iniziale del moto considerato è $t'$ (e non zero, come di solito). Le condizioni iniziali stabiliscono che la posizione è proprio quella di equilibrio, $x' = \ell_0$, e la velocità è la $v'$ determinata al punto precedente. In altre parole, deve essere: $x(t') = x' = \ell_0 = A\cos(\phi) + \ell_0$ , ovvero $A\cos(\phi) = 0$ , e $v(t') = v' = \ell_0 = -A\,\omega\,\sin(\phi)$ , dove abbiamo fatto uso della legge oraria della velocità, $v(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega(t-t')+\phi)$ . Una soluzione delle due equazioni conseguenti alle condizioni iniziali è $\phi = \pi/2$ e $A = v'/\,\omega$ (qui si è tenuto conto che la velocità $v'$ è diretta nel verso negativo dell'asse di riferimento). Da qui la soluzione]

3. Una (piccola) cassa di massa $m$ = 6.0 kg può scorrere lungo un piano inclinato di altezza $h$ = 4.0 m e lunghezza $\ell = (5/4)h$ = 5.0 m. Il piano inclinato è scabro e presenta un coefficiente di attrito (dinamico) $\mu$ = 0.50. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa $M = 2m$ = 12 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema; la puleggia può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. [Usate $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità]




a) Quanto vale l'accelerazione $a$ dell'oggetto di massa $M$? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

$a$ = …………………………………… = ……….. m/s$^2$ $g(M-m(4/5+\mu 3/5))/(M+m) = mg(2-11/10)/(3m) = (3/10)g$ = 2.9 m/s$^2$ [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$ , con $T$ modulo della tensione della fune. Se non ci fosse attrito, è evidente che la massa scenderebbe verso il basso e la cassa si muoverebbe verso l'alto del piano inclinato, per cui l'attrito deve essere diretto verso il basso (la direzione è ovviamente quella del piano inclinato). L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche $a$ , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m-F_A/m$, dove $F_A = \mu N = \mu m g\cos\theta$ è il modulo della forza di attrito e $\theta$ è l'angolo tra piano inclinato e orizzontale. Per la trigonometria deve inoltre essere $\sin\theta = h/\ell = (4/5)$ e $\cos\theta = (1-(h/\ell)^2)^{1/2} = (3/5)$ . Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per $a$ si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che la massa $M$ parta da ferma dall'altezza $h_0 = h/2$ dall'orizzontale passante per la base del piano inclinato, quanto vale la velocità $V'$ con cui essa giunge all'orizzontale passante per il piano inclinato? [In sostanza, nel processo considerato la massa $M$ si abbassa di un tratto $h/2$ ; ovviamente, in contemporanea la cassa $m$ percorre un pari tratto risalendo sul piano inclinato]

$V'$ = …………………………………… ~ ………… m/s $(3gh/10)^{1/2}$ ~ 3.4 m/s [conviene utilizzare il bilancio energetico, nella forma $L_{FA} = \Delta E_k + \Delta U$ . In questa espressione, $\Delta E_k = ((m+M)/2)V'^2$ , dato che le due masse si muovono, per l'inestensibilità della fune, con velocità di ugual modulo e che esse partono da ferme. La variazione di energia potenziale è poi dovuta alla forza peso, e può essere espressa tenendo conto della variazione di quota dei due oggetti (qui, ovviamente, considerati puntiformi). La massa $M$ scende per un tratto $h/2$ , la cassa $m$ risale il piano per un tratto di uguale lunghezza (sempre per l'inestensibilità della fune) e quindi aumenta la propria quota di un tratto $(h/2)\sin\theta$ . Dunque si ha $\Delta U = -Mgh/2 + mg(h/2)\sin\theta$ . Infine, il lavoro della forza di attrito (dinamico) può essere convenientemente calcolato moltiplicando il modulo della forza, che ovviamente rimane costante e vale sempre $\mu m g\cos\theta$ , per lo spostamento, che vale $h/2$ avendo cura di usare un segno negativo poiché, ovviamente, l'attrito si oppone allo spostamento. Mettendo tutto assieme, si ha dunque $-\mu m g\cos\theta\,(h/2) = ((m+M)/2)V'^2 - g(h/2)(M-m\sin\theta)$ . Usando l'espressione delle grandezze trigonometriche trovata prima e la relazione tra le masse, questa espressione si riscrive come: $-\mu mg3h/10 = 3mV'^2/2 - 6mgh/10$ , da cui la soluzione]