

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 14/12/2016

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto si trova fermo nella posizione $\theta_0 = 0$ e si sa che all'istante t_1 il punto ha percorso metà giro.

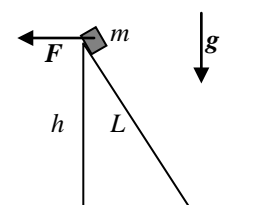
- a) Come si esprime l'istante t_2 al quale il punto avrà percorso un giro completo?

$t_2 = \dots\dots\dots \sqrt{2} t_1$ [il moto angolare è uniformemente accelerato con partenza da fermo, dunque la legge oraria del moto è $\theta(t) = \alpha t^2/2$. Dai dati del problema si ha $\pi = \alpha t_1^2/2$, da cui si ricava $\alpha = 2\pi/t_1^2$. D'altra parte deve anche essere $\theta_2 = 2\pi = \alpha t_2^2/2$, da cui la soluzione]

- b) Come si esprime il **modulo** a_2 dell'accelerazione all'istante t_2 ?

$a_2 = \dots\dots\dots (2\pi R/t_1^2)(16\pi^2+1)^{1/2}$ [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. Poiché la legge oraria della velocità angolare, considerando che il punto parte da fermo, è $\omega(t) = \alpha t = 2\pi t/t_1^2$, all'istante considerato è $a_{c2} = 4\pi^2 t_2^2 R/t_1^4 = 8\pi^2 R/t_1^2$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il risultato del quesito precedente. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$, che è evidentemente costante e vale sempre $a_t = 2\pi R/t_1^2$. Le due direzioni considerate sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_2 = ((8\pi^2 R/t_1^2)^2 + (2\pi R/t_1^2)^2)^{1/2} = (2\pi R/t_1^2)(16\pi^2+1)^{1/2}$

2. Una piccola cassa di massa m (puntiforme) è appoggiata sulla sommità di un piano inclinato liscio (attrito trascurabile) di altezza h e lunghezza L (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). Sulla cassa agisce una forza esterna F applicata in direzione orizzontale, come in figura, di modulo F_{eq} incognito. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



- a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte la cassa rimanga in equilibrio. Come si esprime il modulo della forza F_{eq} ?

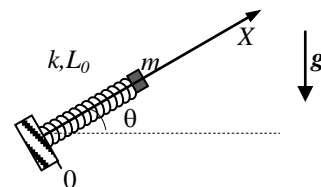
$F_{eq} = \dots\dots\dots mg(h/L)/(1-(h/L)^2)^{1/2} = mg/((L/h)^2-1)^{1/2}$ [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella del piano inclinato) deve essere nulla. Usando un riferimento orientato verso il basso, in questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso (verso il basso) e la componente attiva della forza esterna (verso l'alto, dunque comparirà con segno negativo). Tenendo conto delle proiezioni, e del fatto che, come si può facilmente dedurre da considerazioni geometriche, $\sin\theta = h/L$ e $\cos\theta = (1-(h/L)^2)^{1/2}$, si ottiene il risultato]

- b) Supponete che, a un dato istante, il modulo della forza F si dimezzi rispetto al valore necessario per l'equilibrio, cioè diventi $F' = F_{eq}/2$. In conseguenza di questo, si osserva che la cassa comincia a muoversi partendo da ferma e scendendo verso il basso del piano inclinato. Come si esprime la sua velocità v' (in modulo) nell'istante in cui raggiunge la base del piano inclinato? [Si intende che la forza F , di modulo F' , rimane costantemente orizzontale e applicata alla cassa per tutta la durata del processo considerato]

$v' = \dots\dots\dots (2gh - 2(F'/m)L(1-(h/L)^2)^{1/2})^{1/2} = (gh)^{1/2}$ [poiché gli attriti sono trascurabili,

conviene impiegare il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. Nell'equazione, L_F è il lavoro della forza F . Questo lavoro deve avere un segno negativo, visto il verso della forza e quello dello spostamento (della proiezione dello spostamento, vedi dopo), opposti tra loro. Dato che la forza è costante, il lavoro si calcola semplicemente come prodotto tra modulo della forza e proiezione dello spostamento nella direzione della forza: questa proiezione è il cateto di base del piano inclinato, che ha lunghezza $(L^2-h^2)^{1/2} = h((L/h)^2-1)^{1/2}$; si ha quindi $L_F = -F'h((L/h)^2-1)^{1/2}$. La variazione di energia cinetica è immediata da esprimere, dato che la cassa parte da ferma: $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Infine la variazione di energia potenziale è dovuta solo alla forza peso e alla variazione della quota della cassa: $\Delta U = -mgh$, dove il segno negativo è in accordo con la circostanza che la cassa diminuisce la propria quota. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione, che, usando il risultato del quesito precedente, si semplifica parecchio]

3. Un manicotto (puntiforme) di massa m può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo una direzione che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0 , il cui altro estremo è inchiodato alla base della guida (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X parallelo alla guida (e all'asse della molla) orientato verso l'alto. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} = 1.73$]



- a) Come si esprime la posizione di equilibrio x_{EQ} del manicotto e che tipo di moto compie il manicotto? [Spiegate bene in brutta le motivazioni delle vostre affermazioni]

$x_{EQ} = \dots\dots\dots L_0 - mgsin\theta/k = L_0 - mg/(2k)$ [per trovare la posizione di equilibrio occorre

che sia nulla l'accelerazione del manicotto, ovvero che sia nulla la somma algebrica delle forze nella direzione del moto (quella della guida). Queste forze sono il peso, che ha, nella direzione considerata (quella dell'asse X) ha componente $-mgsin\theta$ (il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse) e la forza elastica, $-k(x-L_0)$. Per $x=x_{EQ}$ la somma deve essere nulla, da cui la soluzione. L'equazione del moto si scrive $a(x) = -(k/m)x + [(k/m)L_0 - gsin\theta]$, che ha la forma richiesta per il moto armonico (il termine fra parentesi quadre è una costante) con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$]

- b) Supponete ora che il manicotto sia stato messo in movimento da qualche causa esterna e che, a un dato istante, esso **passi** per la posizione di equilibrio con una certa velocità v_0 (positiva). Nell'evoluzione successiva del moto, esso

raggiungerà (per infinite volte, essendo il moto periodico) una posizione x' che corrisponde alla massima coordinata nel sistema di riferimento dato, ovvero alla massima distanza dalla base della guida. Come si esprime x' ?

$$x' = \dots\dots\dots x_{EQ} + v_0/\omega = L_0 - mg/(2k) + v_0/(k/m)^{1/2} \quad \text{[ci sono due strade percorribili per}$$

giungere alla risposta. La prima si basa sulle leggi orarie del moto e della velocità per il moto armonico. Tali leggi stabiliscono che la posizione segue l'andamento $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_{EQ}$ e la velocità è $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$, con A e ϕ dipendenti dalle condizioni iniziali. Nel moto armonico, la velocità di passaggio per la posizione di equilibrio è quella massima assunta dall'oggetto che di tale moto è animato, per cui in queste condizioni $\sin(\omega t + \phi) = -1$ (il valore massimo possibile per la funzione, in valore assoluto, e il segno è quello giusto se v_0 è positiva). Dunque deve essere $A = v_0/\omega$. La coordinata massima si ottiene quando, invece, è il termine $\cos(\omega t + \phi)$ che assume il suo valore massimo, per cui $x' = A + x_{EQ}$, da cui la soluzione, dove si è esplicitata la pulsazione secondo quanto stabilito nella risposta precedente. Allo stesso risultato si arriva, con un po' più di fatica, usando la conservazione dell'energia meccanica, valida perché si è in assenza di attriti]

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 14/12/2016

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R con accelerazione **angolare costante e uniforme** (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto passa per la posizione $\theta_0 = 0$ con velocità angolare ω_0 e si sa che esso si ferma (istantaneamente) dopo aver percorso mezzo giro.

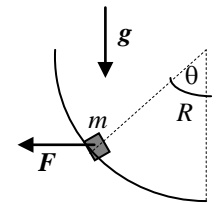
a) Come si esprime l'istante t_1 al quale il punto si ferma?

$t_1 = \dots\dots\dots 2\pi / \omega_0$ [il moto angolare è uniformemente accelerato, evidentemente con accelerazione angolare negativa (il punto si ferma), per cui ci aspettiamo che l'accelerazione angolare esca con un segno negativo (per evitare problemi, non lo imponiamo noi). La legge oraria del moto è $\theta(t) = \omega_0 t + \alpha t^2/2$ e quella della velocità angolare è $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Dai dati del problema, si ha $\theta_1 = \pi = \omega_0 t_1 + \alpha t_1^2/2$, e anche $0 = \omega_0 + \alpha t_1$, che esprime la circostanza che, all'istante specificato, il punto si ferma (la sua velocità è istantaneamente nulla). Da quest'ultima equazione si ricava $\alpha = -\omega_0/t_1$ (il segno negativo indica proprio che il punto rallenta) che, sostituita nella prima, porta a $\pi = \omega_0 t_1 - (\omega_0/t_1)t_1^2/2 = \omega_0 t_1/2$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime il **modulo** a_0 dell'accelerazione del punto all'istante t_0 ?

$a_0 = \dots\dots\dots R\omega_0^2 (1+1/(4\pi^2))^{1/2}$ [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. All'istante considerato, l'accelerazione centripeta è semplicemente $a_{c0} = \omega_0^2 R$. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$, che è evidentemente costante e quindi assume lo stesso valore in qualsiasi istante. L'accelerazione angolare α si ricava da quanto scritto sopra: $\alpha = -\omega_0/t_1 = -\omega_0^2/2\pi$, dove abbiamo sostituito il risultato del quesito precedente. Dunque $a_t = -\omega_0^2 R/2\pi$. Le due direzioni considerate sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_0 = ((\omega_0^2 R)^2 + (-\omega_0^2 R/2\pi)^2)^{1/2} = R\omega_0^2 (1+1/(4\pi^2))^{1/2}$

2. Una piccola cassa di massa m (puntiforme) è appoggiata "a metà strada" di una guida rigida e fissa nello spazio, che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R e presenta una superficie liscia (attrito trascurabile). Sulla cassa agisce una forza esterna F applicata in direzione orizzontale, come in figura, di modulo F_{eq} incognito. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità; l'angolo θ di figura vale $\theta = \pi/4$; ricordate che $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, con $\sqrt{2} = 1.41$]



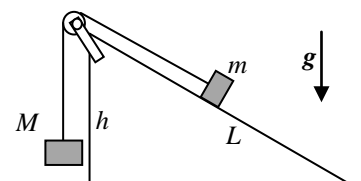
a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte la cassa rimanga in equilibrio. Come si esprime il modulo della reazione vincolare N esercitata dalla guida sulla cassa?

$N = \dots\dots\dots mg\sqrt{2}$ [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella tangenziale della guida) deve essere nulla. Usando un riferimento orientato verso il basso della guida, in questa direzione agiscono la componente attiva della forza peso (verso il basso) e la componente attiva della forza esterna (verso l'alto, dunque comparirà con segno negativo), cioè $0 = -F_{eq}\cos\theta + mg\sin\theta$, da cui, per lo specifico valore dell'angolo considerato, $F_{eq} = mg$. La reazione vincolare serve per impedire che la cassa "penetri" nella guida, cioè a ottenere equilibrio nella direzione radiale. Sia la forza F che la forza peso hanno componenti in questa direzione, entrambi dirette verso l'esterno della guida. La reazione vincolare deve bilanciare la loro somma, cioè $N = F_{eq}\sin\theta + mg\cos\theta$, da cui la soluzione]

b) Supponete che, a un dato istante, il modulo della forza F diventi un quarto del valore necessario per l'equilibrio, cioè diventi $F' = F_{eq}/4$. In conseguenza di questo, si osserva che la cassa comincia a muoversi partendo da ferma e scendendo verso il basso della guida. Come si esprime la sua velocità v' (in modulo) nell'istante in cui essa raggiunge il punto più basso della guida? [Si intende che la forza F , di modulo F' , rimane costantemente orizzontale e applicata alla cassa per tutta la durata del processo]

$v' = \dots\dots\dots (gR(2-\sqrt{2}) - (F'/m)R\sqrt{2})^{1/2} = (2gR(1-(5/8)\sqrt{2}))^{1/2}$ [poiché gli attriti sono trascurabili, conviene impiegare il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. Nell'equazione, L_F è il lavoro della forza F . Questo lavoro deve avere un segno negativo, visto il verso della forza e quello dello spostamento, opposti tra loro. Dato che la forza è costante, il lavoro si calcola semplicemente come prodotto tra modulo della forza e proiezione dello spostamento nella direzione della forza: dalla trigonometria si ottiene subito che questa proiezione è $R\sin\theta$, per cui $L_F = -F'R\sqrt{2}/2$. La variazione di energia cinetica è immediata da esprimere, dato che la cassa parte da ferma: $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Infine la variazione di energia potenziale è dovuta solo alla forza peso e alla variazione della quota della cassa: $\Delta U = -mg\Delta h$, dove il segno negativo è in accordo con la circostanza che la cassa diminuisce la propria quota e $\Delta h = R(1-\cos\theta) = R(1-\sqrt{2}/2)$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione, che, usando il risultato del quesito precedente, si semplifica parecchio]

3. Una (piccola) cassa di massa m può scivolare con attrito trascurabile lungo un piano inclinato di altezza h e lunghezza $L = 2h$. Alla cassa è legata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa $M = 4m$. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile**, che dunque non influisce sulla dinamica del sistema, la quale può ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse ed è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. Cassa e massa (e quant'altro) sono libere di muoversi. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si esprime il modulo T della tensione della fune?

$$T = \dots\dots\dots (6/5)mg$$

[trattandosi di un sistema di due corpi, conviene scrivere separatamente le equazioni del moto per le accelerazioni A e a (con chiaro riferimento alle due masse). Nel farlo, conviene prendere un riferimento verticale verso il basso per M e parallelo al piano inclinato, orientato verso l'alto, per m . In questo modo si sa che, essendo la fune inestensibile, deve essere $A = a$. Inoltre, essendo la puleggia di massa trascurabile, il modulo della tensione T è lo stesso ai due estremi della fune (la tensione punta verso l'alto nel lato di M e verso l'alto del piano inclinato nel lato di m). Si ha quindi: $MA = Mg - T$ e $ma = T - mg\sin\theta$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che, per m , ad agire lungo la direzione del piano inclinato è la componente parallela al piano inclinato stesso della forza peso. Il seno dell'angolo può essere facilmente espresso dalla geometria: $\sin\theta = h/L = 1/2$. Riscriviamo le due equazioni tenendo conto di questo passaggio e anche della relazione fra le masse: $4mA = 4mg - T$; $ma = T - mg/2$. Dalla seconda si ottiene $a = T/m - g/2$ che, sostituita nella prima (ricordate che $A = a$), fornisce $4T - 2mg = 4mg - T$. Risolta per T questa equazione fornisce il risultato]

b) Supponendo che inizialmente la cassa (l'oggetto di massa m) si trovi ferma alla base del piano inclinato (cioè al suo punto più basso) e che la fune sia tesa, quanto vale in modulo la velocità v' con cui la cassa raggiunge la sommità del piano stesso? [Considerate, ovviamente, che non ci siano "ostacoli" di tipo geometrico, ad esempio lunghezza e/o altezza del piano inclinato, che impediscano questo processo e ricordate che gli oggetti considerati sono tutti puntiformi]

$$v' = \dots\dots\dots ((14/5)gh)^{1/2}$$

[non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Poiché all'inizio tutto è fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2$, dove $V'^2 = v'^2$ per l'inestensibilità della fune; pertanto, tenendo anche conto della relazione tra le masse, si ha $\Delta E_K = (5/2)mv'^2$. Inoltre nel processo la cassa m sale di un tratto h mentre la massa M scende di un tratto L (sempre per l'inestensibilità della fune), per cui $\Delta U_G = mgh - MgL = mgh - 4mg(2h) = -7mgh$. Da qui la soluzione]

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 14/12/2016

Nome e cognome:

Matricola:

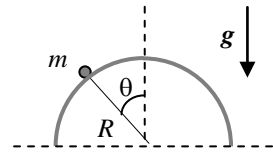
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R con accelerazione **angolare costante e uniforme** α . All'istante $t_0 = 0$ il punto passa per la posizione $\theta_0 = 0$ avendo una velocità angolare ω_0 (incognita). Si sa inoltre che all'istante t_1 il punto ha percorso un giro completo.

- a) Come si esprime la velocità angolare ω_1 che il punto possiede all'istante t_1 , cioè al compimento di un giro completo?
 $\omega_1 = \dots\dots\dots 2\pi/t_1 + \alpha t_1/2$ [il moto angolare è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \omega_0 t + \alpha t^2/2$ e quella della velocità angolare è $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Dai dati del problema si ha $2\pi = \omega_0 t_1 + \alpha t_1^2/2$, da cui si ricava $\omega_0 = 2\pi/t_1 - \alpha t_1/2$. Dunque all'istante richiesto sarà $\omega_1 = 2\pi/t_1 - \alpha t_1/2 + \alpha t_1 = 2\pi/t_1 + \alpha t_1/2$]

- b) Come si esprime il **modulo** a_1 dell'accelerazione all'istante t_1 ?
 $a_1 = \dots\dots\dots R(((2\pi/t_1 + \alpha t_1/2)^2 + \alpha^2)^{1/2})$ [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. All'istante considerato è $a_{c1} = (2\pi/t_1 - \alpha t_1/2)^2 R$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il risultato del quesito precedente. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R$, che è evidentemente costante. Le due direzioni considerate sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_1 = (((2\pi/t_1 - \alpha t_1/2)^2 R)^2 + (\alpha R)^2)^{1/2} = R(((2\pi/t_1 - \alpha t_1/2)^2 + \alpha^2)^{1/2})$ (brutta espressione...)]

2. Una pallina (puntiforme) di massa m si trova inizialmente ferma sulla sommità di una guida semicircolare rigida e fissa di raggio R disposta su un piano verticale (la pallina è "appoggiata" sulla guida e può muoversi con attrito trascurabile su di essa). La posizione della pallina viene indicata attraverso l'angolo θ compreso tra la direzione verticale e quella del "raggio vettore" che, spiccato dal centro della semicirconferenza, raggiunge la pallina (in figura si rappresenta un angolo θ **generico**): la posizione iniziale della pallina corrisponde a $\theta_0 = 0$, che è una posizione di equilibrio. A un dato istante, la pallina si mette in movimento da questa posizione di equilibrio verso la sinistra di figura avendo una **piccolissima** velocità iniziale di modulo v_0 . [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



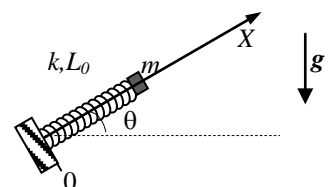
- a) Per un certo tratto della sua discesa, si osserva che la pallina resta a contatto con la guida, cioè percorre una traiettoria circolare. Detto θ il valore generico dell'angolo che indica la posizione della pallina, come si scrive la velocità v della pallina? [Dovete scrivere una sorta di funzione che esprima questa velocità per un valore generico di θ]

$v = \dots\dots\dots (2gR(1-\cos\theta) + v_0^2)^{1/2}$ [nel moto della pallina si conserva l'energia meccanica (non ci sono forze dissipative che compiono lavoro): $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v^2 - (m/2)v_0^2 + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso e si può esprimere come $\Delta U_G = -mg\Delta h$, con Δh variazione di quota della pallina (il segno negativo tiene conto del fatto che la pallina scende, cioè diminuisce la propria quota). Con semplici ragionamenti trigonometrici si ha $\Delta h = R(1-\cos\theta)$, da cui la risposta]

- b) Come si esprime l'angolo θ' per il quale avviene la pallina si distacca dalla guida? [Spiegate bene, in brutta, il ragionamento necessario per giungere alla risposta]

$\theta' = \dots\dots\dots \arccos(2/3 + v_0^2/(3Rg))$ [per compiere la traiettoria semicircolare dettata dalla guida la pallina deve risentire di una accelerazione centripeta $a_c = v^2/R$. Tale accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale (orientate verso il centro della semicirconferenza), ovvero dalle componenti radiali di tutte le forze che agiscono sulla pallina. Tali forze sono il peso, mg , sempre diretto verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare N , sempre diretta radialmente ma **verso l'esterno** (dato che la pallina è "appoggiata" sulla guida). La componente radiale della forza peso, che è diretta verso il centro della semicirconferenza, si esprime come $mg\cos\theta$. Deve quindi essere: $mv^2/R = mg\cos\theta - N$. La velocità può essere espressa in funzione dell'angolo come determinato alla risposta precedente, per cui deve verificarsi: $2mg(1-\cos\theta) + mv_0^2/R = mg\cos\theta - N$, da cui $N = mg(3\cos\theta - 2) - mv_0^2/R$. Notate che questo è il modulo di N , che non può diventare mai negativo (in altre parole, la reazione vincolare aggiusta il proprio valore finché può, ma non può cambiare di segno, cioè di verso, perché la pallina è sempre appoggiata sopra alla guida, finché lo è), e che $\cos\theta$ è una funzione decrescente di θ (per $\theta < \pi$). Quindi si ha un valore di θ a partire dal quale la relazione non può essere soddisfatta, cosa che si verifica proprio dall'istante in cui $N = 0$ (ovvero, subito prima tale istante). Infatti da questo angolo in poi la reazione vincolare si annulla, cioè la pallina si stacca dalla guida. Da qui la soluzione]

3. Un manicotto (puntiforme) di massa m (incognita) può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo una direzione che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0 , il cui altro estremo è inchiodato alla base della guida (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X parallelo alla guida (e all'asse della molla) e orientato verso l'alto. Si sa che la posizione di equilibrio del



manicotto è $x_{EQ} = L_0/2$. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} = 1.73$]

- a) Come si esprime la massa m del manicotto e che tipo di moto esso compie? [Spiegate bene in brutta le motivazioni delle vostre affermazioni]

$m = \dots\dots\dots$ $k(L_0 - x_{EQ})/(g \sin\theta) = 2k(L_0 - x_{EQ})/g = kL_0/g$ [nella posizione di equilibrio è nulla l'accelerazione del manicotto, ovvero è nulla la somma algebrica delle forze nella direzione del moto (quella della guida, cioè l'asse X di figura). Queste forze sono il peso, che ha componente $-mg \sin\theta$ (il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse) e la forza elastica, $-k(x - L_0)$. Per $x = x_{EQ}$ si ha $-mg \sin\theta - k(x_{EQ} - L_0) = 0$, ovvero $-mg/2 - (k/2)L_0$, dove abbiamo esplicitato il valore del seno dell'angolo (dalla geometria $\sin\theta = h/L = 1/2$) e usato la condizione $x_{EQ} = L_0/2$. Da qui la soluzione. L'equazione del moto si scrive $a(x) = -(k/m)x + [(k/m)L_0 - g \sin\theta]$, che ha la forma richiesta per il moto armonico (il termine fra parentesi quadre è una costante) con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$]

- b) Supponete ora che il manicotto sia spostato da qualche causa esterna (una manina) nella posizione $x_0 = L_0/4$ e che da qui venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Nell'evoluzione successiva del moto, esso **passerà** di nuovo per la posizione di equilibrio avendo una certa velocità di modulo v' . Come si esprime v' ?

$v' = \dots\dots\dots$ $(L_0/4)\omega = (L_0/4)(k/m)^{1/2} = (gL_0)^{1/2}/4$ [ci sono due strade percorribili per giungere alla risposta. La prima si basa sulle leggi orarie del moto e della velocità per il moto armonico, che rappresenta un'oscillazione (armonica) attorno alla posizione di equilibrio. All'inizio del moto considerato nel problema, il manicotto si trova evidentemente a un estremo dell'oscillazione, la cui ampiezza A deve evidentemente essere tale che $A = (x_{EQ} - x_0) = L_0/4$ (state attenti ai segni: ci piace che l'ampiezza A sia positiva, per non dover fare strani aggiustamenti sul termine di fase costante ϕ che compare nelle leggi orarie). Quando il manicotto passa per la posizione di equilibrio, come in ogni moto armonico si ha che la velocità assume il valore massimo. Le leggi orarie stabiliscono che la posizione segue l'andamento $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_{EQ}$ e la velocità è $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$, con A e ϕ dipendenti dalle condizioni iniziali: si vede subito che il valore massimo della velocità è $A\omega$, da cui, usando l'ampiezza appena determinata, la pulsazione e l'espressione della massa trovate prima, la soluzione. Alla stessa risposta si arriva, pur se in modo meno immediato dal punto di vista algebrico, usando la conservazione dell'energia meccanica, valida perché si è in assenza di attriti]

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 14/12/2016

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R con accelerazione **angolare costante e uniforme** α (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto è fermo nella posizione $\theta_0 = 0$. Si sa che all'istante t_1 esso ha compiuto mezzo giro.

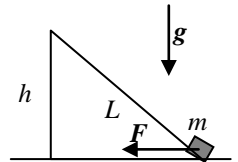
- a) Come si esprime la posizione angolare θ_2 che il punto assume all'istante $t_2 = 2t_1$?

$\theta_2 = \dots\dots\dots 4\pi$ [il moto angolare è uniformemente accelerato con partenza da fermo, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \alpha t^2/2$. Dai dati del problema si ha $\pi = \alpha t_1^2/2$, da cui si ricava $\alpha = 2\pi/t_1^2$. Dunque si ha $\theta_2 = \alpha t_2^2/2 = (2\pi/t_1^2) t_2^2/2$, da cui, posto $t_2 = 2t_1$, la soluzione]

- b) Come si esprime il **modulo** a_2 dell'accelerazione all'istante t_2 ?

$a_2 = \dots\dots\dots (2\pi R/t_1^2)(1+64\pi^2)^{1/2}$ [il moto è circolare, dunque sul punto agisce l'accelerazione centripeta di modulo $a_c(t) = \omega^2(t)R$ che ha direzione radiale. Poiché la legge oraria della velocità angolare è $\omega(t) = \alpha t$, all'istante considerato è $\omega_2 = (2\pi/t_1^2)t_2 = (2\pi/t_1^2)2t_1 = 4\pi/t_1$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il risultato del quesito precedente. Inoltre, essendo il moto accelerato angolarmente, è anche presente l'accelerazione tangenziale $a_t = \alpha R = 2\pi R/t_1^2$, che è evidentemente costante. Le due direzioni considerate sono ortogonali tra loro, dunque il modulo dell'accelerazione si ottiene da $a_2 = ((4\pi/t_1)^2 R^2 + (2\pi R/t_1^2)^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa m (puntiforme) è appoggiata su un piano inclinato liscio (attrito trascurabile) di altezza h e lunghezza $L = 2h$ (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). Inizialmente la cassa è ferma alla base del piano; a un dato istante, su di essa viene applicata una forza esterna F che ha direzione orizzontale, come in figura, e modulo F . Sotto l'azione di questa forza, la cassa prende a muoversi verso la sommità del piano inclinato. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



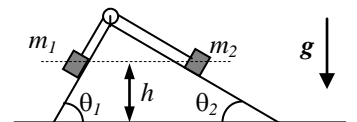
- a) Come si esprime il modulo dell'accelerazione a della cassa? [Date la risposta considerando che la cassa, puntiforme, si trovi proprio all'inizio del piano inclinato, come in figura]

$a = \dots\dots\dots (F/m)\sqrt{3/2-g/2}$ [per determinare l'accelerazione occorre considerare le forze che hanno componente nella direzione del moto, che è quella del piano inclinato. Tali forze sono il peso, che ha componente $mg \sin\theta$ diretta verso il basso del piano inclinato, e la forza esterna, che ha componente diretta verso l'alto del piano inclinato. Scegliendo un asse parallelo al piano e inclinato verso l'alto, si ha $a = (F/m)\cos\theta - g\sin\theta$. Per la geometria si ha $\sin\theta = h/L = 1/2$ e $\cos\theta = (1-(h/L)^2)^{1/2} = \sqrt{3}/2$, da cui il risultato]

- b) Supponete che, mentre la cassa risale sul piano inclinato sotto l'azione della forza F , questa a un dato istante venga "spenta", cioè annullata: immaginate in particolare che questo si verifichi nell'istante in cui la cassa passa per "metà strada" del piano inclinato, cioè quando essa ha percorso un tratto pari a $L/2$ sul piano stesso. Si osserva che, dopo lo spegnimento della forza, la cassa continua a salire sul piano inclinato fino a raggiungere una certa quota h' . Come si esprime h' ? [Si tratta di una quota misurata a partire dall'orizzontale che passa per il punto più basso del piano inclinato]

$h' = \dots\dots\dots Fh\sqrt{3}/(2mg)$ [poiché gli attriti sono trascurabili, conviene impiegare il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. Nell'equazione, L_F è il lavoro della forza F , che viene eseguito solo finché la forza stessa è "accesa". Questo lavoro deve avere un segno positivo, visto il verso della forza e quello dello spostamento (della proiezione dello spostamento nella direzione della forza, vedi dopo), concordi tra loro. Dato che la forza è costante, il lavoro si calcola semplicemente come prodotto tra modulo della forza e proiezione dello spostamento nella direzione della forza: tenendo conto che lo spostamento sul piano inclinato vale $L/2 = h$, questa proiezione è data da $h \cos\theta = h \sqrt{3}/2$, per cui $L_F = F h \sqrt{3}/2$. Visto che la cassa parte da ferma e (istantaneamente) ferma è quando raggiunge la quota massima, si ha semplicemente $\Delta E_K = 0$. Infine, la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso ed è proporzionale alla variazione di quota della cassa, cioè $\Delta U = mgh'$. Da qui la semplicissima soluzione]

3. Due piccoli blocchi (puntiformi) di massa m_1 e $m_2 = m_1/4$ si trovano su due piani inclinati (lisci, fissi, rigidi ed indeformabili) che hanno inclinazioni rispetto all'orizzontale rispettivamente $\theta_1 = \pi/3$ e $\theta_2 = \pi/6$. I due blocchi, che possono scorrere sui piani inclinati con attrito trascurabile, sono collegati tra loro da una fune (inestensibile e di massa trascurabile) che passa per la gola di una puleggia (priva di attriti e di massa trascurabile) come indicato in figura; la fune rimane parallela ai piani inclinati. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} = 1.73$ e $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$]



- a) Come si esprime, in modulo, l'accelerazione a_1 del blocco 1 (quello di massa m_1)?

$a_1 = \dots\dots\dots (g/5)(2\sqrt{3}-1/2)$ [Trattandosi di un sistema di due corpi conviene scrivere separatamente le due equazioni del moto. Rispetto ad un riferimento parallelo ai due blocchi ed orientato verso l'alto per il blocco 2 e verso il basso per il blocco 1, le due equazioni del moto si scrivono: $m_1 a_1 = m_1 g \sin\theta_1 - T_1$, $m_2 a_2 = -m_2 g \sin\theta_2 + T_2$. Per la scelta del riferimento e il fatto che la fune è inestensibile, si ha $a_1 = a_2 = a$; inoltre, essendo la puleggia di massa trascurabile, è, in modulo, $T_1 = T_2 = T$. Usando la relazione tra le masse

ed esplicitando il valore delle grandezze trigonometriche, si trova $4m_2a = 2m_2g\sqrt{3} - T$ e $m_2a = T - m_2g/2$. Sommando membro a membro si "manda via" l'incognita T , ottenendo $5m_2a = m_2g(2\sqrt{3} - 1/2)$, da cui la soluzione]

- b) Immaginate ora di far partire da fermi i blocchi dalla posizione indicata in figura (inizialmente essi si trovano ad altezza h dall'orizzontale). Come si esprime la velocità v_1' con la quale il blocco 1 raggiunge la base del "proprio" piano inclinato?

$v_1' = \dots\dots\dots ((2/5)gh(4-1/\sqrt{3}))^{1/2}$ [poiché gli attriti sono trascurabili, conviene servirsi della conservazione dell'energia meccanica: $\Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia cinetica deve tenere in conto la presenza delle due masse e il fatto che esse partono da ferme: $\Delta E_K = (m_1/2)v_1'^2 + (m_2/2)v_2'^2 = (m_2/2)(4+1)v_1'^2 = (5/2)m_2v_1'^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse e la circostanza che, essendo la fune inestensibile, è $v_2'^2 = v_1'^2$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso ed è legata alla variazione di quota delle due masse. Per la massa m_1 si ha $\Delta U_1 = -m_1gh$, dove il segno negativo è in accordo con il fatto che tale massa diminuisce la sua quota per una lunghezza h . Quando la massa m_1 la massa m_2 ovviamente sale. Detta Δs la distanza percorsa (verso l'alto) sul rispettivo piano inclinato dalla massa m_2 , si ha che la sua variazione di quota è $\Delta h_2 = \Delta s \sin\theta_2 = \Delta s/2$. D'altra parte, poiché la fune è inestensibile, anche la massa m_1 deve aver percorso (verso il basso) la stessa distanza sul rispettivo piano inclinato. La geometria suggerisce allora $\Delta s = h/\sin\theta_1 = 2h/\sqrt{3}$. In definitiva, la variazione di quota della massa m_2 è $\Delta h_2 = h/\sqrt{3}$ e la variazione di energia potenziale è $\Delta U_2 = m_2gh/\sqrt{3}$. Di conseguenza, sommando si ha $\Delta U = gh(-m_1+m_2/\sqrt{3}) = -m_2gh(4-1/\sqrt{3})$. Mettendo tutto assieme, la conservazione dell'energia meccanica porta alla soluzione]

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 14/12/2016

Nome e cognome:

Matricola:

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione**

1. Un punto si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R con accelerazione **angolare costante e uniforme** α (incognita). All'istante $t_0 = 0$ il punto passa per la posizione $\theta_0 = 0$ avendo una velocità angolare ω_0 (incognita). Si sa inoltre che all'istante t_1 il punto si ferma (istantaneamente) avendo percorso un giro completo.

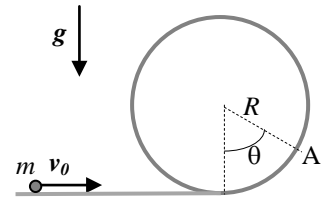
- a) Come si esprime la velocità angolare ω_0 ?

$\omega_0 = \dots\dots\dots 4\pi/t_1$ [il moto angolare è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \omega_0 t + \alpha t^2/2$ e quella della velocità angolare è $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Poiché la velocità angolare diminuisce, ci aspettiamo di trovare un'accelerazione angolare negativa (ma, per evitare problemi, non imponiamo a priori un segno negativo). Dai dati del problema si ha $2\pi = \omega_0 t_1 + \alpha t_1^2/2$ e $0 = \omega_0 + \alpha t_1$, da cui si ricava $\alpha = -\omega_0/t_1$ (notate il segno negativo). Sostituendo nella legge oraria del moto si ottiene $2\pi = \omega_0 t_1 - (\omega_0/t_1) t_1^2/2 = \omega_0 t_1 - \omega_0 t_1/2 = \omega_0 t_1/2$, da cui la soluzione]

- b) Come si esprime il **modulo** a_1 dell'accelerazione all'istante t_1 , istante in cui il punto si ferma? [Attenti ai trabocchetti!]

$a_1 = \dots\dots\dots 4\pi R/t_1^2$ [nell'istante considerato il punto è fermo, per cui esso non ha velocità angolare (si intende che la condizione è istantanea, in seguito a questo istante potrà esserci ancora moto, ma la domanda è riferita proprio a questo istante). Di conseguenza l'accelerazione centripeta è nulla. Tuttavia il moto è uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\alpha = -\omega_0/t_1 = -4\pi/t_1^2$, dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente. Dunque esso ha un'accelerazione tangenziale di **modulo** $|\alpha R|$, da cui la soluzione]

2. Una pallina (puntiforme) di massa m si muove con attrito trascurabile su una guida rigida e fissa trovandosi appoggiata su di essa. La guida ha il tracciato indicato in figura: dopo un tratto orizzontale, essa forma una circonferenza di raggio R disposta su un piano verticale. Si fanno diverse prove in cui la pallina viene lanciata con velocità v_0 (di modulo via via crescente) sul tratto orizzontale: si osserva che solo quando il modulo è $v_0 > v_{0MIN}$ la pallina percorre per intero il "giro della morte". [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



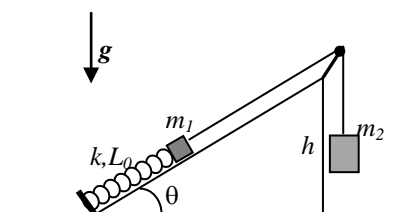
- a) Come si esprime v_{0MIN} ? [Spiegate per bene, in brutta, il ragionamento seguito]

$v_{0MIN} = \dots\dots\dots (5gR)^{1/2}$ [il punto "critico" del giro della morte è quello collocato più in alto. Supponendo che la pallina compia effettivamente il giro della morte, essa deve subire in questa posizione un'accelerazione centripeta $a_c = v^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita da forze che hanno direzione radiale e sono orientate verso il centro della circonferenza. Tali forze sono la forza peso e la reazione vincolare che la guida esercita sulla pallina, cioè $mv^2/R = mg + N$ (sto usando i moduli e il segno di N dipende dal fatto che la pallina è appoggiata sulla guida per cui, nel punto più alto della traiettoria, N ha la stessa direzione e verso di mg). Nella condizione limite si ha $N = 0$ (in queste condizioni la pallina si sta staccando dalla guida!), per cui al limite la velocità nel punto più alto della guida deve essere $v_{MIN}^2 = Rg$. A tale velocità corrisponde una velocità minima v_{0MIN} alla base della guida (sul tratto orizzontale) che può essere espressa con la conservazione dell'energia meccanica (non ci sono forze dissipative che fanno lavoro): $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v_{MIN}^2 - (m/2)v_{0MIN}^2 + mg2R$, da cui la risposta]

- b) Supponete ora che la pallina venga lanciata proprio con la velocità $v_0 = v_{0MIN}$ determinata sopra. Quanto vale in modulo la reazione vincolare N_A che la guida esercita sulla pallina nell'istante in cui essa passa per la posizione A di figura? [L'angolo indicato vale $\theta = \pi/3$; ricordate che $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} \sim 1.73$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$]

$N_A = \dots\dots\dots (9/2)mg$ [nella posizione indicata la pallina ha una componente centripeta dell'accelerazione pari a v_A^2/R . Occorre quindi che su di essa agiscano forze le cui componenti radiali, sommate algebricamente tra loro, risultino in una forza mv_A^2/R diretta verso il centro della circonferenza. Le forze che hanno una componente radiale sono N_A , che contribuisce con un segno positivo essendo orientata verso il centro della circonferenza, e la componente radiale della forza peso, $mg\cos\theta$, che invece compare con un segno negativo essendo evidentemente diretta verso l'esterno della circonferenza. Dunque deve essere: $mv_A^2/R = N_A - mg\cos\theta = N_A - mg/2$, dove abbiamo esplicitato il valore del coseno. D'altra parte la velocità v_A può essere determinata usando la conservazione dell'energia meccanica, come sopra specificato, osservando che la variazione di quota della pallina è $\Delta h = R(1 - \cos\theta) = R/2$ (sempre esplicitando il coseno), che dà luogo a una variazione di energia potenziale positiva poiché la pallina aumenta la sua quota. Dunque deve essere $0 = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v_A^2 - (m/2)v_{0MIN}^2 + mgR/2$, da cui $v_A^2 = v_{0MIN}^2 - gR = 4gR$, dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente. Si ottiene allora $N_A = (m/R)4gR + mg/2$, da cui la soluzione]

3. Due corpi (puntiformi) di massa rispettivamente m_1 e $m_2 = 4m_1$ sono legati fra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile. Come rappresentato in figura, la massa m_1 può muoversi con attrito trascurabile lungo un piano inclinato di altezza h che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale mentre la massa m_2 è libera di muoversi in direzione verticale. La massa m_1 è inoltre attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0 , il cui altro estremo è vincolato al "fondo" del piano inclinato (c'è un opportuno muretto costruito a questo scopo). Come mostrato in figura, la fune può scorrere con attrito trascurabile attorno a un perno



fisso e la configurazione geometrica è tale che l'asse della molla e il tratto di fune tra massa m_1 e perno sono paralleli al piano inclinato. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} = 1.73$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]

a) Come si esprime la lunghezza L_{eq} che la molla assume in condizioni di equilibrio?

$L_{eq} = \dots\dots\dots L_0 + (7/2)(m_1g/k)$ [in condizioni di equilibrio tutte e due le masse devono avere accelerazioni nulle. Poiché la massa m_2 risente della forza peso (verso il basso) e della tensione della fune (verso l'alto), deve essere $T = m_2g$. La fune esercita una tensione dello stesso modulo (diretta come il piano inclinato e orientata verso l'alto) anche sulla massa m_1 , che subisce pure gli effetti della forza elastica e della componente attiva della sua forza peso. Dunque l'equazione del moto per questa massa si scrive, scegliendo un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso l'alto, $a_1 = -(k/m_1)(L - L_0) - g\sin\theta + T/m_1 = -(k/m_1)L + (k/m_1)L_0 - g\sin\theta + (m_2/m_1)g = -(k/m_1)L + (k/m_1)L_0 - g/2 + 4g = -(k/m_1)L + (k/m_1)L_0 + (7/2)g$. All'equilibrio è $a_1 = 0$ e $L = L_{eq}$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che il sistema (la posizione dei due corpi e, di conseguenza, la lunghezza della molla) venga modificato da una qualche causa esterna (una manina) in modo tale che la molla si trovi alla propria lunghezza di riposo L_0 e che da questa configurazione esso sia lasciato libero di evolvere, senza che venga fornita alcuna velocità iniziale ai corpi. In questa evoluzione, i corpi si muovono di moto periodico e, a un certo istante, essi si fermano (istantaneamente) per una prima volta. Come si esprime la lunghezza L' della molla per cui i corpi si fermano?

$L' = \dots\dots\dots L_0 + 7mg/k$ [si potrebbe facilmente dimostrare che il moto delle due masse è armonico e usare le corrispondenti leggi orarie per rispondere al quesito. Tuttavia, per praticità (e a costo di qualche complicazione algebrica aggiuntiva), per questa risposta scegliamo la strada della conservazione dell'energia meccanica, che si può applicare essendo trascurabili gli attriti. Si ha quindi $0 = \Delta E_k + \Delta U$. Cominciamo con la variazione di energia cinetica: essa è nulla, poiché sia all'inizio che alla fine del processo considerato le masse si trovano ferme. Quindi deve essere nulla la variazione di energia potenziale **complessiva**. Essa è data dalla somma dei termini (due) che tengono conto della variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso delle due masse, $\Delta U_G = \Delta U_{G1} + \Delta U_{G2}$, e del termine ΔU_{ELA} che descrive la variazione di energia elastica della molla. Prima di scrivere nei dettagli questi tre termini (la cui somma algebrica, ricordiamo, deve fare zero), vediamo di capire qual è il moto delle due masse. Nella risposta al quesito precedente abbiamo trovato che, all'equilibrio, la molla si trova elongata, cioè $L_{eq} > L_0$. Quindi la manina (o chi per lei) comprime la molla facendo spostare verso il basso la massa m_1 e verso l'alto la m_2 . Nell'evoluzione successiva, in cui la molla riprende la propria lunghezza di riposo, la massa m_1 andrà verso l'alto e la m_2 verso il basso: questa evoluzione andrà avanti finché la molla non raggiungerà la lunghezza massima L' . La variazione di lunghezza della molla nel processo considerato è $\Delta L = L' - L_0$. Poiché la fune è inestensibile, la massa m_2 avrà variato la sua quota proprio del tratto ΔL scendendo verso il basso, per cui è $\Delta U_{G2} = -m_2g(L' - L_0) = -4m_1g(L' - L_0)$, dove abbiamo scelto il segno negativo perché la massa scende, e usato la relazione tra le masse. Nel contempo, la massa m_1 avrà risalito il piano inclinato per il tratto ΔL ; così facendo, essa avrà aumentato la sua quota di un tratto $\Delta L \sin\theta = \Delta L/2$, per cui $\Delta U_{G1} = m_1g(L' - L_0)/2$ e $\Delta U_G = m_1g(L' - L_0)(1/2 - 4) = -(7/2)m_1g(L' - L_0)$. La variazione di energia elastica si calcola facilmente ricordando che l'energia elastica di una molla dipende dalla sua lunghezza L (generica) secondo la $U_{ELA} = (k/2)(L - L_0)^2$: è evidente che all'inizio del processo l'energia elastica è nulla e quindi si ha immediatamente $\Delta U_{ELA} = (k/2)(L' - L_0)^2$, dove il segno positivo indica che alla fine del processo la molla si è allungata aumentando la propria energia. Mettendo tutto assieme si ha $0 = -(7/2)m_1g(L' - L_0) + (k/2)(L' - L_0)^2$. Questa è un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita $(L' - L_0)$. Delle due soluzioni, una, quella per cui $(L' - L_0) = 0$, è da scartare, poiché corrisponde all'istante in cui, dopo un periodo di oscillazione, il sistema ritorna alla configurazione iniziale. L'altra soluzione implica $(k/2)(L' - L_0) = (7/2)m_1g$, da cui la risposta. Ora che abbiamo fatto tutta questa fatica di conti, che era giusto affrontare almeno una volta nelle soluzioni di questa prova di verifica (problemi simili si trovano anche in altre tracce!), lecito fare un semplicissimo ragionamento che porta subito allo stesso risultato. In questo ragionamento supponiamo di poter affermare che il moto delle masse è armonico (come scritto sopra, si può dimostrare ma non è proprio proprio immediato), cioè, per esempio, la massa m_1 compie un'oscillazione armonica attorno alla sua posizione di equilibrio. All'inizio, essa viene praticamente posta in un estremo dell'oscillazione, alla fine, poiché essa è istantaneamente ferma, la posizione è quella corrispondente all'altro estremo di oscillazione. I due estremi sono collocati simmetricamente rispetto alla posizione di equilibrio, e l'ampiezza di oscillazione è evidentemente $A = L_{eq} - L_0 = (7/2)m_1g/k$. La lunghezza massima della molla sarà allora semplicemente $A + L_{eq}$, che porta esattamente alla risposta trovata in modo molto più laborioso]