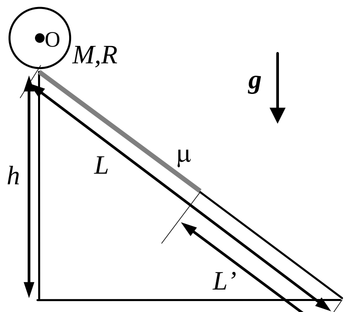
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 30/5/2017

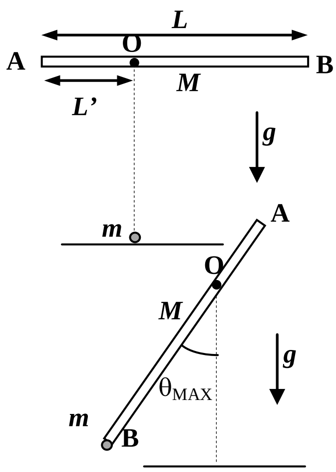
Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Nella prova non sono presenti valori numerici delle grandezze, dunque non potete riportare risultati numerici. Siete tenuti a riportare i risultati "letterali", facendo uso dei simboli che denotano grandezze note (questi simboli sono sottolineati nel testo). Allegate "brutte copie" chiare e dettagliate. ***Le risposte non adeguatamente giustificate "in brutta" non saranno prese in considerazione.***



Disegno non in scala!!!

1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa $\underline{M}$ e raggio $\underline{R}$ parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato di altezza $\underline{h}$ e "lunghezza" (dell'ipotenusa) $\underline{L}$. Il primo tratto del piano inclinato, di lunghezza $\underline{L'} = L/2$, è **scabro** e presenta un coefficiente di attrito μ (sia statico che dinamico); il secondo tratto, anche di lunghezza L' , è invece liscio, cioè presenta attrito trascurabile. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Determinate la condizione che deve sussistere affinché il moto del cilindro nel primo tratto del piano inclinato sia di rotolamento puro. [Spiegate bene in brutta i ragionamenti seguiti]
   Condizione per rotolamento puro: …………………………………… Il cilindro prende a muoversi di traslazione (del centro di massa) e di rotazione (attorno al proprio asse). Per la rotazione, l'unica forza che produce momento è la forza di attrito, diretta verso l'alto del piano inclinato (deve opporsi al moto, o moto incipiente, del punto di contatto tra cilindro e piano inclinato). L'equazione del moto rotazionale (attorno al polo O) è $\alpha = F_A R/I = F_A R/(MR^2/2) = 2F_A/(MR)$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo per rotazioni attorno al suo asse. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa, scritta rispetto a un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso, recita $a_{CM} = g\sin\theta - F_A/M$. In queste equazioni in generale F_A è incognita. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, deve valere la condizione $\alpha = a_{CM}/R$, che costituisce un'ulteriore equazione. Se questa equazione è valida, risolvendo per F_A si ottiene $F_A = Mg\sin\theta/3$. Dobbiamo ora chiederci se questo valore della forza di attrito è compatibile con la massima forza di attrito statico, $F_{A,MAX} = \mu N$, che può esercitarsi al contatto tra cilindro e piano inclinato. Deve quindi essere $F_A \le \mu N = \mu Mg\cos\theta$, dove abbiamo esplicitato l'espressione della reazione vincolare esercitata al contatto tra piano inclinato e cilindro. Si ottiene in definitiva una disequazione: $\mu \ge tg\theta/3$. A questo punto occorre esprimere il valore dell'angolo θ (tra piano inclinato e orizzontale) in funzione dei dati noti del problema. La trigonometria mostra che $tg\theta = \sin\theta/\cos\theta = h/(L^2-h^2)^{1/2}$, per cui la condizione cercata può essere posta nella forma $\mu \ge h/(3(L^2-h^2)^{1/2})$
   b) Supponendo che la condizione di cui sopra sia effettivamente soddisfatta, e che quindi il moto nel primo tratto del piano inclinato sia di rotolamento puro, come si scrive la forza di attrito F_A che agisce al contatto tra piano inclinato e cilindro nel primo tratto?
   F_A = ………………………………… $mg\sin\theta/3 = mgh/(3L)$ [le equazioni del moto sono quelle scritte per la risposta precedente e, assieme alla condizione di rotolamento puro, esse formano un sistema di tre equazioni e tre incognite. Risolvendo per F_A si ottiene la risposta]
   c) Come si scrivono la velocità del centro di massa v_{CM}' e la velocità angolare ω' raggiunte dal cilindro nell'istante in cui esso ha percorso l'**intero** piano inclinato, cioè tutti e due i tratti scabro e liscio? [Fate attenzione e spiegate per bene in brutta]
   v_{CM}' = …………………………………… $(5gh/3)^{1/2}$
   ω' = …………………………………… $(2gh/(3R^2))^{1/2}$ [per rispondere alla domanda occorre spezzare il moto del cilindro nei due tratti. Nel primo tratto il moto è di rotolamento puro, come stabilito sopra. Conviene usare la conservazione dell'energia meccanica per determinare le velocità al termine del tratto: $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\,\omega^2$ (il cilindro parte da fermo). D'altra parte in questo primo tratto si ha, per il rotolamento puro, $\omega = v_{CM}/R$ per cui, tenendo anche conto dell'espressione del momento di inerzia per il cilindro pieno e omogeneo, è $\Delta E_K = (3m/4)v_{CM}^2$. D'altra parte la variazione di energia potenziale è dovuta solo alla variazione di quota, per un tratto $h/2$, del centro di massa del cilindro, per cui $\Delta U = -mgh/2$, dove il segno negativo è in accordo con il fatto che il cilindro "scende" verso il basso. Di conseguenza, alla fine del primo tratto del piano inclinato si ha $v_{CM} = (2gh/3)^{1/2}$ e $\omega = v_{CM}/R = (2gh/(3R^2))^{1/2}$. Nel secondo tratto il moto non è più di rotolamento puro, dato che non esiste più il momento della forza di attrito necessario per variare la velocità angolare. In effetti l'accelerazione angolare in questo tratto è nulla, essendo nullo il momento delle forze rispetto al polo O (posto sull'asse del cilindro), per cui la velocità angolare non può più cambiare. Di conseguenza è $\omega' = \omega$. La velocità del centro di massa, invece, continua ad aumentare a causa della forza peso. Si può ancora applicare la conservazione dell'energia meccanica, dove, però, stavolta è $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}'^2 - (m/2)v_{CM}^2 = (m/2)v_{CM}'^2 - (m/2)(2gh/3)$. Infatti stavolta l'energia cinetica dovuta alla rotazione, che non è zero, non varia e quindi non compare nel computo della variazione. Inoltre nella variazione di energia cinetica abbiamo tenuto conto del fatto che "inizialmente", cioè all'inizio del secondo tratto di piano inclinato, il cilindro non è fermo, avendo la velocità v_{CM} determinata sopra. La variazione di energia potenziale, invece, mantiene la stessa espressione, per cui alla fine si ottiene $0 = (m/2)v_{CM}'^2 - (m/2)(2gh/3) - mgh/2$, da cui la soluzione]

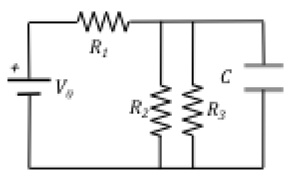


2. Una sottile asta omogenea di massa $\underline{M}$ e lunghezza $\underline{L}$ è imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile sul piano verticale. Il perno, indicato con O , passa per un punto posto a distanza $\underline{L'} = L/3$ da un'estremità dell'asta, indicata con A . Inizialmente l'asta è ferma in direzione orizzontale, come rappresentato in figura: da tale posizione essa viene lasciata libera di ruotare con velocità iniziale nulla. Quando, nell'evoluzione successiva del moto, l'asta si trova in posizione verticale, la sua estremità indicata con B in figura urta anelasticamente un corpo puntiforme di massa $\underline{m} = M/4$ inizialmente fermo su un piano orizzontale, che dunque rimane attaccato all'estremità B. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Come si scrive l'accelerazione angolare α con cui l'asta **comincia** a ruotare?
   α = …………………………………… $3g/(2L)$ [l'asta si mette in rotazione a causa del momento della forza peso rispetto al polo O . Poiché l'asta è omogenea, il suo centro di massa si trova a distanza $L/2$ dalle estremità, ovvero a distanza $L/6$ da O. Dato che la forza perso è verticale e l'asta orizzontale, il braccio è semplicemente $L/6$ e il momento della forza si scrive $MgL/6$. Per l'equazione del moto rotazionale, tale momento è pari al prodotto $I\alpha$. Il momento di inerzia dell'asta può essere facilmente determinato usando il teorema degli assi paralleli: $I = I_{CM} + Md^2$. Per l'asta sottile omogenea è $I_{CM} = ML^2/12$, mentre la distanza d tra i due assi paralleli è pari alla distanza tra centro di massa e perno, che è stata determinata prima come $d = L/6$. Si ha dunque $I = ML^2(1/12+1/36) = ML^2/12(4/3) = ML^2/9$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

b) Dopo aver urtato il corpo puntiforme, si osserva che l'asta ruota finché non viene raggiunto un certo angolo θ_{MAX} (l'angolo è misurato tra direzione dell'asta e verticale, come in figura), al quale la rotazione si arresta istantaneamente. Come si esprime θ_{MAX}? [È consigliabile scrivere l'espressione di $cos(\theta_{MAX})$; state attenti a ragionare bene e a illustrare i ragionamenti in brutta]

$cos(\theta_{MAX})$ = …………………………………… 3/4 [per rispondere alla domanda occorre esaminare separatamente la fase di rotazione dell'asta fino alla direzione verticale (qui la chiamiamo fase di "discesa"), l'urto anelastico, la fase di "salita". Nella prima fase si conserva l'energia meccanica del sistema, essendo gli attriti trascurabili. Questo consente di determinare la velocità angolare ω' dell'asta subito prima dell'urto. Si ha infatti $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = (I/2)\,\omega^2$, con I determinato prima. La variazione di energia potenziale è dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta che, come si può facilmente verificare, vale $\Delta h = L/6$, per cui $\Delta U = -MgL/6$, dove il segno negativo tiene in debito conto della diminuzione di quota del centro di massa. Si ottiene, facendo i "conti", $\omega = (3g/L)^{1/2}$. Nella fase dell'urto, che è anelastico, si conserva solo il momento angolare totale del sistema. Infatti la quantità di moto totale non può conservarsi a causa delle forze impulsive che agiscono sul perno, che rendono il sistema non isolato. Tuttavia, poiché tali forze agiscono sul perno, il loro momento rispetto al perno stesso è nullo, per cui si conserva il momento angolare. Subito prima dell'urto il momento angolare è dovuto solo all'asta che ruota e può essere espresso come $I\omega$. Subito dopo l'urto si forma un sistema composto da asta e da corpo puntiforme attaccato all'estremità B. Questo determina un nuovo momento di inerzia, la cui espressione è $I' = I + m(2L/3)^2 = I + (M/4)(2L/3)^2 = ML^2/9 + ML^2/9 = 2ML^2/9$, dove abbiamo usato un po' di matematica, oltre all'espressione prima determinata di I e anche alla constatazione che il corpo puntiforme si trova a distanza $2L/3$ rispetto al perno. Per la conservazione del momento angolare deve quindi essere $I\omega = I'\omega'$, da cui si ottiene la velocità angolare del sistema asta+corpo puntiforme subito dopo l'urto. La conservazione del momento angolare consente di determinare $\omega' = \omega/2 = (3g/(4L))^{1/2}$. Nella terza fase si può di nuovo applicare la conservazione dell'energia meccanica. Stavolta si ha $\Delta E_K = -(I'/2)\omega'^2 = -MgL/12$, dato che all'inizio del processo il sistema sta ruotando con velocità angolare ω' mentre alla fine del processo il sistema è (istantaneamente) fermo. La variazione di energia potenziale può ancora essere legata alla variazione di quota del centro di massa, $\Delta U = (M+m)g\Delta h_{CM} = (5M/4)g\Delta h_{CM}$, dove abbiamo considerato che il sistema ha massa complessiva data dalla somma delle due masse. Naturalmente subito dopo l'urto la posizione del centro di massa si sposta dalla metà dell'asta a causa delle presenza del corpo puntiforme. La nuova posizione del centro di massa può essere determinata ricordando la definizione di posizione del centro di massa: $x'_{CM} = (Mx_{CM}+mL)/(M+m) = 3L/5$, dove l'asse X parte dall'estremità A ed è diretto verso l'estremità B dell'asta, e nei conti abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo e posto $x_{CM} = L/2$. Dalla geometria si ottiene facilmente $\Delta h_{CM} = (x'_{CM}-L/3)(1-cos\theta_{MAX}) = (4L/15)(1-cos\theta_{MAX})$. Mettendo tutto assieme si ottiene $0 = -MgL/12+(5M/4)g(4L/15)(1-cos\theta_{MAX}) = -MgL/12+(MgL/3)(1-cos\theta_{MAX})$, da cui la soluzione (corrisponde a un angolo di circa 41.4 gradi)]

3. Un circuito elettrico è costituito da tre resistenze, $\underline{R_1}$, $\underline{R_2} = 2R_1$, $\underline{R_3} = 4R_1$, e un condensatore $\underline{C}$ collegati come nello schema di figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale $\underline{V_0}$.



a) Come si esprime, in **condizioni stazionarie**, la carica Q accumulata nel condensatore?

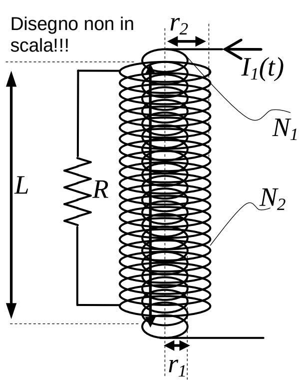
Q = …………………………………… $(4/7)CV_0$ [per definizione di capacità elettrica, la carica è $Q = C\Delta V_C$, dove ΔV_C è la d.d.p. ai capi del condensatore. Essa è pari alla d.d.p. ai capi delle resistenze R_2 e R_3 , ovvero pari alla d.d.p. prodotta dal generatore meno la d.d.p. ("caduta di potenziale") ai capi di R_1 , cioè $\Delta V_C = V_0 - R_1 I$. Il simbolo I indica l'intensità della corrente che passa attraverso la resistenza R_1 , che è evidentemente pari a tutta la corrente erogata dal generatore. Pertanto si ha $I = V_0/R_{TOT}$, con R_{TOT} resistenza totale del circuito. Nel suo computo si deve non considerare il condensatore che, a regime (condizioni stazionarie), si comporta come un circuito aperto (non può passarvi corrente), per cui R_{TOT} risulta dalla serie di R_1 con il parallelo di R_2 e R_3 . Tale parallelo vale $R_{PAE} = R_2 R_3 /(R_2 + R_3) = (4/3)R_1$, dove abbiamo usato la relazione tra resistenze data nel testo. Pertanto $R_{TOT} = R_1 + R_{PAR} = (7/3)R_1$, $I = (3/7)V_0/R_1$ e $\Delta V_C = V_0(1-3/7)=4V_0/7$, da cui la soluzione]

b) Come si esprimono le intensità di corrente I_{R2} e I_{R3} che passano rispettivamente attraverso le resistenze R_2 e R_3 **in condizioni stazionarie**?

I_{R2} = …………………………………… $\Delta V_C/R_2 = 4V_0/(14R_1) = 2V_0/(7R_1)$

I_{R3} = …………………………………… $\Delta V_C/R_3 = 4V_0/(28R_1) = V_0/(7R_1)$ [le due resistenze formano un partitore di corrente, cioè la corrente si ripartisce fra di loro in misura inversamente proporzionale al valore della resistenza. Ai loro capi si trova la d.d.p. che abbiamo prima indicato come ΔV_C . La legge di Ohm applicata alle due resistenze conduce alla soluzione]

4. Due solenoidi, composti rispettivamente da $\underline{N_1}$ e $\underline{N_2}$ spire di filo ottimo conduttore (di resistività trascurabile), hanno la stessa lunghezza $\underline{L}$ e sono coassiali l'uno rispetto all'altro. Come rappresentato in figura, il solenoide 1 è "interno" al solenoide 2; infatti i raggi sono $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2} = 2\underline{r_1}$ (con $r_1, r_2 << L$). Il solenoide 1 è collegato a un generatore che eroga una corrente $I_1(t)$ variabile nel tempo. In particolare si sa che la corrente è nulla per $t < t_0 = 0$, e quindi **aumenta linearmente nel tempo** fino al valore $\underline{I_0}$ all'istante $\underline{t'}$, per poi rimanere costante. Il solenoide 2 è collegato a una resistenza $\underline{R}$. [Indicate con μ_0 la costante di permeabilità magnetica del vuoto; notate che, vista la geometria, entrambi i solenoidi possono essere bene approssimati come se fossero di lunghezza "infinita"]



a) Scrivete esplicitamente la funzione del tempo che descrive l'andamento dell'intensità di corrente $I_1(t)$ nel solo intervallo di tempo $0 < t < t'$.

$I_1(t)$ = ………………………….. $I_0 t/t'$ [l'andamento lineare nel tempo implica che il grafico della funzione $I_1(t)$ sia, nell'intervallo di tempo considerato, una retta con espressione generica $I_1 = mt+q$. Questa retta deve passare per lo zero all'istante $t = 0$ e per I_0 all'istante $t = t'$. Come si ottiene facilmente risolvendo il corrispondente sistema di equazioni algebriche, deve essere $q = 0$ e $mt' = I_0$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime l'intensità di corrente $I_2(t)$ che viene indotta a circolare nel solenoide 2? [Considerate solo l'intervallo di tempo $0 < t < t'$]

$I_2(t)$ = ………………………….. $-\pi r_1^2 \mu_0 N_1 N_2 I_0/(LRt')$ [nell'intervallo di tempo considerato la corrente che circola nel solenoide 1 aumenta la sua intensità. Di conseguenza aumenta l'intensità del campo magnetico B_1 prodotto dal solenoide stesso. Infatti, assumendo valida l'approssimazione di solenoide infinito, si ha $B_1 = \mu_0 (N_1/L) I_1$, che diventa quindi una funzione del tempo secondo la $B_1(t) = \mu_0 (N_1/L) I_0\, t/t'$. Anche il flusso del campo magnetico prodotto dal solenoide 1 aumenta nel tempo; se si considera la sezione del solenoide 2, tale flusso è dato dalla relazione $\Phi(\mathbf{B_1}) = \pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0\, t/t'$. Notate che in questa espressione compare il raggio del solenoide 1 e non quello del solenoide 2. Infatti, supponendo il solenoide infinito, si ha che il campo magnetico è nullo per $r > r_1$ per cui, anche integrando sull'intera sezione del solenoide 2, il contributo per $r > r_1$ è nullo. Secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta **in una singola** spira del solenoide 2 si trova come $\Delta V_{spira} = -d\Phi(\boldsymbol{B_1})/dt = -\pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 t'$, come si ottiene immediatamente derivando rispetto al tempo l'espressione del flusso scritta prima. Le N_2 spire che compongono il solenoide 2 sono tutte, dal punto di vista elettrico, collegate in serie. Quindi la forza elettromotrice ai capi dell'intero solenoide 2 è data da $\Delta V_2 = N_2 \Delta V_{spira}$. Infine, poiché il solenoide 2 è chiuso sulla resistenza R , l'intensità di corrente indotta si trova attraverso la legge di Ohm come $I_2 = \Delta V_2/R$, da cui la risposta. Il segno negativo che vi compare (che potrebbe benissimo essere rimosso, volendo indicare solo l'intensità della corrente indotta) indica che la corrente indotta nel solenoide 2 ha verso opposto a quello della corrente che scorre, aumentando di intensità, nel solenoide 1]

c) Quanto vale la potenza P'' "dissipata" per effetto Joule nel resistore R all'istante $t'' = 2t'$? [Attenti a leggere bene la domanda!]

P'' = ………………………….. 0 [l'istante t'' è chiaramente successivo all'istante t' e dunque cade in un intervallo temporale in cui la corrente che fluisce nel solenoide 1 è costante. Di conseguenza, è costante anche il flusso del campo magnetico e quindi è nulla la differenza di potenziale indotta nel solenoide 2. Questo vuol dire che in questo solenoide non c'è passaggio di corrente, e quindi non c'è neanche dissipazione per effetto Joule sulla resistenza R]