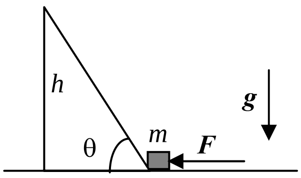
Corso di Laurea STCia □ Chimica c.a. □ – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 7/4/2008

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una piccola cassa di massa m = 5.0 kg si trova alla base di un piano inclinato di altezza h = 4.9 m che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). A partire dall'istante t_0 = 0, sulla cassa, inizialmente ferma, viene applicata una forza esterna ***F* costante e uniforme** diretta orizzontalmente nel verso indicato in figura e di modulo $F = 1.0\mathrm{x}10^2$ N. Per effetto della forza, la cassa sale lungo il piano inclinato fino a raggiungerne la sommità. [Considerate la cassa come un oggetto puntiforme; usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3)$ = 1/2]



a) Supponendo di poter trascurare ogni forma di attrito, quanto vale, in modulo, la velocità v' con cui la cassa arriva in cima al piano inclinato?

v' = …………………………………… ~ .... m/s $(2Fh/(m\,tg\theta) - 2gh)^{1/2} \sim 4.1$ m/s [per il bilancio energetico deve essere $L = \Delta E_K + \Delta U_g = (m/2)v'^2 + mgh$, dove L rappresenta il lavoro della forza ***F***: $L = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = Fcos\theta\ (h/sin\theta) = Fh/tg\theta$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che la forza è costante (e uniforme), che l'angolo tra la sua direzione e quella dello spostamento (che avviene lungo il piano inclinato) è θ e che la lunghezza dello spostamento è $(h/sin\theta)$. Ovviamente si arriva allo stesso risultato moltiplicando il modulo della forza per lo spostamento orizzontale della cassa, che vale $h/tg\theta$]

b) A quale istante t' la cassa raggiunge la sommità del piano inclinato?

t' = …………………………………… ~ .... s $v'/a = (2Fh/(m\,tg\theta) - 2gh)^{1/2} / (Fcos\theta/m - gsin\theta) \sim$ 2.7 s [il moto è unifomrmemente accelerato dato che avviene con accelerazione costante $a = Fcos\theta/m - gsin\theta$, dove il primo termine rappresenta la componente lungo il piano inclinato dell'accelerazione dovuta alla forza ***F*** ed il secondo termine è la componente attiva dell'accelerazione di gravità lungo il piano inclinato, che compare con un segno negativo essendo ovviamente orientata verso la base del piano inclinato stesso. Per la legge oraria della velocità in presenza di accelerazione costante ed uniforme si ha $v' = at'$. Ovviamente allo stesso risultato si arriva anche considerando la legge oraria dello spostamento. Poiché la lunghezza totale percorsa è $L = h/sin\theta$, deve essere $h/sin\theta = (a/2)t'^2$, con a appena determinato, da cui, risolvendo per t' , si ottiene la soluzione]

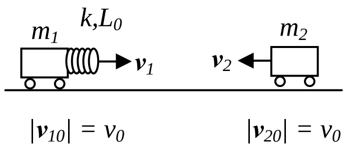
c) Nel caso in cui tra cassa e piano inclinato fosse presente dell'attrito dinamico con coefficiente μ_D, come si scriverebbe l'equazione del moto $a(t)$? [Per questa risposta **non** usate valori numerici ma esprimete la risposta servendovi dei dati letterali dei parametri noti del problema; commentate anche su come potrebbero cambiare le soluzioni delle domande precedenti, in particolare se sicuramente la cassa arriverebbe in cima al piano]

$a(t)$ = …………………………………… $Fcos\theta/m - gsin\theta - N\mu_D/m = Fcos\theta/m - g(sin\theta + \mu_D cos\theta)$

[nell'equazione del moto compare il termine dell'attrito dinamico, orientato in modo da opporsi allo spostamento]

Commento: .... in funzione del valore di μ_D l'espressione dell'accelerazione determinata sopra potrebbe diventare negativa. Questo ovviamente non ha senso, poiché se l'accelerazione fosse negativa significherebbe che la cassa scenderebbe giù per il piano (e, tra l'altro, il segno della forza di attrito dovrebbe cambiare), È però possibile che l'accelerazione si annulli: in queste condizioni la cassa non arriverebbe alla sommità del piano!

2. Due carrellini di massa rispettivamente $m_1 = m$ = 10 kg e $m_2 = 2m$ = 20 kg si muvono con attrito trascurabile su un binario orizzontale. Il carrello 1 è dotato di un "respingente" costituito da una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 2.0\mathrm{x}10^2$ N/m e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m. Inizialmente i carrelli si muovono con velocità di verso opposto ed uguale modulo v_0 = 3.0 m/s, come rappresentato schematicamente in figura. Ad un dato istante essi urtano ed il respingente comincia ad essere compresso fino a raggiungere un valore di massima compressione. [Trascurate ogni forma di attrito]



a) Quanto vale (in valore assoluto) la compressione massima Δ_{MAX} della molla del respingente?

Δ_{MAX} = …………………………………… = ……….. m $((3mv_0^2(1-1/9))/k)^{1/2} \sim 1.1$ m/s [nella condizione di massima compressione della molla i due carrelli devono avere velocità relativa nulla, cioè $v_1 = v_2 = v$ Non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica totale del sistema. Quindi $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ela} = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 - (m_1/2)v_0^2 - (m_2/2)v_0^2 + (k/2)\Delta_{MAX}^2 = (3/2)m(v^2 - v_0^2) + (k/2)\Delta_{MAX}^2$. D'altra parte, il sistema è isolato lungo la direzione del moto, dato che non vi agiscono forze esterne. Dunque la componente della quantità di moto totale in questa direzione si conserva, cioè $m_1v_0 - m_2v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$, dove si è notato che le **componenti** delle velocità iniziali hanno segno opposto. Quindi si ha $-v_0 = 3v$. Inserendo questa espressione nell'equazione precedente si ottiene la soluzione]

b) Come si scrivono l'equazione del moto **relativo** $a_{REL}(t) = a_2(t) - a_1(t)$ dei due carrelli e l'equazione del moto del **centro di massa** a_{CM} del sistema nella fase di compressione della molla? [**Non** usate valori numerici per questa risposta, che deve essere espressa usando i dati letterali del problema! Fate riferimento ad un asse orizzontale orientato verso la destra di figura]

a_{REL} = …………………………………… $F_{INT}/\mu = -k(x_2-x_1-L_0)(1/m_1+1/m_2)=-(3k/(2m))(x_2-x_1-L_0)$
[dall'equazione del moto relativo, notando che la forza di interazione è di tipo elastico e che si è usata la massa ridotta; nello scrivere la lunghezza effettivas della molla come $x_2 - x_1$ si sono supposti i carrellini come puntiformi. Se così non fosse, si tratterebbe di indicare con x_1 ed x_2 le posizioni degli estremi ("in contatto") dei due carrellini]

a_{CM} = …………………………………… 0 [dall'equazione del moto del centro di massa, notando che il sistema è isolato nella direzione orizzontale, quella del moto, e quindi non ci sono forze esterne]

c) Detto t_0 =0 l'istante in cui ha inizio la compressione della molla, a quale istante t' si raggiunge la compressione Δ_{MAX}?

t' = …………………………………… ~ .... s $T/4 = \pi/2\omega = \pi/(2(k/\mu)^{1/2}) = (\pi/2)(2m/(3k))^{1/2}$ ~ 0.29 s [il moto (relativo!) è di tipo armonico, essendo l'equazione del moto di tipo elastico; il tempo necessario a raggiungere la massima compressione a partire dall'istante in cui essa ha inizio (quando i due carrelli si incontrano) è pari a $T/4$. Il periodo si determina osservando l'equazione del moto relativo dove, ovviamente, la massa da considerare è la massa ridotta del sistema]

d) Dopo un tempo sufficientemente lungo, i due carrelli si separano (e la molla torna alle sue condizioni iniziali); quanto vale la velocità v'_{CM} del centro di massa del sistema dei due carrelli quando questi si sono separati?

v'_{CM} = …………………………………… = ... m/s $v_{CM,0} = (m_1v_0-m_2v_0)/(m_1+m_2) = -v_0/3$ = -1.0 m/s
[essendo il sistema isolato, la velocità del centro di massa non cambia durante l'intero processo, ed è quindi pari a quella inziale, $v_{CM,0}$ che può essere facilmente determinata dai dati del problema]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 7/4/2008 Firma:

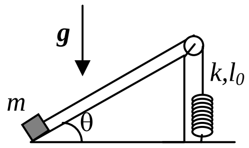
B

Corso di Laurea STCia □ Chimica c.a. □ – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 7/4/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una cassa di massa m = 2.0 kg può scivolare con attrito trascurabile sulla superficie di un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Alla cassa è attaccata una fune instensibile e di massa trascurabile che, dopo essere passata per la gola di una puleggia di massa trascurabile, termina all'estremità di una molla di costante elastica k = 50 N/m e lunghezza di riposo l_0 = 50 cm. L'altro estremo della molla è fissato su un pavimento rigido ed indeformabile secondo lo schema indicato in figura. Inizialmente la cassa è tenuta ferma alla base del piano inclinato da un chiodo; corrispondentemente, la lunghezza della molla è l_I = 1.0 m. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e trascurate ogni forma di attrito; ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune in queste condizioni?
T = …………………………….. = ... N $k(l_1-l_0)$ = 25 N [la fune "trasmette" la forza elastica generata dalla molla elongata]

b) All'istante t_0 = 0 il chiodo viene rimosso e la cassa comincia a risalire lungo il piano, fino ad arrestarsi dopo aver percorso una distanza pari ad L. Quanto vale L?
L = …………………………….. = ... m $2(l_1-l_0)-2(mg/k)sin\theta$ = 0.61 m [nel problema sono presenti solo forze conservative, per cui si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \Delta U_{ela} = 0 + mgLsin\theta + (k/2)(l'-l_0)^2-(k/2)(l_1-l_0)^2$, dove abbiamo indicato con $Lsin\theta$ la variazione di quota (in direzione verticale!) della cassa, usato la relazione $U_{ela}=(k/2)(l-l_0)^2$, valida per esprimere l'energia potenziale della molla per una lunghezza l generica, e posto l' la lunghezza della molla quando la cassa si ferma (ovviamente $\Delta E_K = 0$ poiché la cassa è ferma sia all'inizio che alla "fine" del processo!). Essendo la fune inestensibile, deve anche essere $l_1 - l' = L$, cioè $l'=l_1 - L$. Si ottiene quindi: $0 = mgLsin\theta + (k/2)((l_1-L-l_0)^2-(l_1-l_0)^2)= mgLsin\theta + (k/2)L(L-2l_1+2l_0)$, da cui la soluzione]

c) A quale istante t' la cassa si arresta? [Notate che l'arresto della cassa è solo "temporaneo", nel senso che il suo movimento prosegue anche dopo questo istante!]
t' = …………………………… = ... s $T/2= \pi/(k/m)^{1/2}$ = 0.63 s [essendo presente una forza elastica, è facile verificare che il moto è periodico. Infatti, scelto un asse parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso, l'equazione del moto si scrive, tenendo conto dell'inestensibilità della fune, $a = gsin\theta - (k/m)(x-l_0)$. Osservate che questa equazione è la stessa che si avrebbe se la molla fosse fissata alla sommità del piano: infatti la presenza della puleggia (di massa e attrito trascurabili!) non modifica il problema, ed in pratica è come se prendessimo un riferimento, centrato sul pavimento, che segue la direzione della fune. Questa equazione del moto ha una soluzione oscillatoria con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Per rispondere alla domanda è sufficiente notare che, come in ogni moto oscillatorio, la massa, che parte da ferma da una posizione di non equilibrio, si arresta dopo un intervallo pari a metà del periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$]

2. Due ioni di carica unitaria opposta e massa rispettivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ si muovono lungo la stessa direzione; inizialmente essi hanno velocità di pari modulo, v_0, e verso opposto e si trovano a grandissima distanza l'un l'altro (praticamente la distanza è "infinita"). Essi si muovono dunque l'uno contro l'altro fino a collidere facendo un urto di tipo "centrale" (cioè la velocità dopo l'urto ha la stessa direzione di quelle prima dell'urto). In seguito alla collisione si forma un composto neutro stabile di massa $M = m_1+m_2$. [Trascurate ogni forma di attrito nel moto delle particelle e ogni effetto della forza peso; in questo problema **non** si richiedono risposte numeriche: dovete esprimere i risultati in funzione dei dati letterali noti del problema, indicando con e la carica unitaria e con κ la costante del campo elettrico nel vuoto]

a) Come si esprime la velocità V del composto che si forma dopo l'urto?
V= …………………………………… $-v_0/3$, considerando come positivo il verso della velocità iniziale dello ione 1 [il sistema è isolato e quindi si conserva la quantità di moto totale, cioè $m_1v_{10} + m_2v_{20} = m(v_0-2v_0) = (m_1+m_2)V = 3mV$. In altre parole, è ovvio che siamo di fronte ad un tipico esempio di urto completamente anelastico!]

b) Come si esprime l'energia ΔE coinvolta nel processo di formazione del composto?
ΔE = …………………………………… $-(4/3)mv_0^2$ [in un urto anelastico non si conserva l'energia cinetica. L'energia di formazione del composto può essere considerata pari alla differenza di energia cinetica del sistema, cioè $\Delta E = (M/2)V^2-(m_1/2)v_0^2 - (m_2/2)v_0^2$. Sostituendo l'espressione di V trovata sopra e tenendo conto delle relazioni tra le massa si ottiene la soluzione, dove il segno negativo indica che il processo è "endotermico". Notate che la differenza di energia che abbiamo considerato è relativa ad istanti che sono subito dopo e subito prima dell'urto. Infatti il composto si forma proprio tra questi due istanti. Pertanto altre forme di energia (ad esempio l'energia di interazione elettrostatica) non subiscono cambiamenti, osservazione che supporta la stima di energia di formazione come differenza di energia cinetica]

c) Detta $D(t)=x_2(t)-x_1(t)$ la distanza relativa tra i due ioni ad un istante generico t **prima dell'urto**, come si scrive l'equazione del moto relativo $a_{REL}(t)=a_2(t)-a_1(t)$ di uno ione rispetto all'altro?

$a_{REL}(t)$ = …………………………………… $F_{INT}/\mu = -(\kappa e^2/D^2(t))(3/(2m))$ [per l'equazione del moto relativo, tenendo conto che la forza di interazione è quella elettrica che si esercita tra cariche puntiformi; la scelta dei segni si riferisce ad un'orientazione dell'asse tale che la velocità iniziale è positiva per lo ione 1 e negativa per il 2]

d) Commentate su come si può esprimere la velocità v_1 dello ione 1 in funzione della distanza relativa $D(t)$? [Trascurate ogni forma di attrito!]

Commento: …………………………………… prima dell'urto, non essendoci dissipazioni, deve conservarsi l'energia meccanica totale del sistema, cioè deve essere $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ele}$. Dato che nella configurazione iniziale l'energia elettrostatica era nulla a causa della grande distanza relativa fra gli ioni, la differenza di energia elettrostatica è $\Delta U_{ele} = -L_{ele} = -\int_\infty^{D(t)} \mathbf{F}_{ele} \cdot d\mathbf{s}$ **.** La forza elettrica si esercita lungo la congiungente tra gli ioni, quindi lungo un certo asse che possiamo chiamare X, per cui si ha $\Delta U_{ele} = -\int_\infty^{D(t)} F_{ele}\, dx = -\int_\infty^{D(t)}(-\kappa_{ele} e^2/x^2)\, dx = -\kappa e^2(1/x)|_\infty^{D(t)} = -\kappa e^2/D(t)$. Quindi si può scrivere: $0=(m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2-(m_1/2)v_0^2-(m_2/2)v_0^2-\kappa e^2/D(t)$. D'altra parte la conservazione della quantità di moto impone, in ogni istante, $m_1v_1+m_2v_2 = m_1v_0-m_2v_0$. Le due equazioni danno la possibilità di detrminare le due incognite v_1 e v_2. (al costo di un po' di algebra!)]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 7/4/2008 Firma:

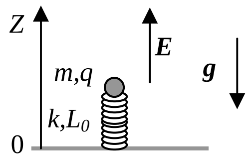
C

Corso di Laurea STCia □ Chimica c.a. □ – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 7/4/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme di massa m = 10 g è dotato di una carica elettrica $q = 1.0\text{x}10^{-2}$ C. L'oggetto è poggiato su una molla di costante elastica $k = 2.0\text{x}10^{-1}$ N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm disposta con il suo asse in direzione verticale ed appoggiata ad un pavimento rigido ed indeformabile, come indicato in figura. Sempre in direzione verticale, è presente un campo elettrico ***E*** costante ed uniforme, orientato verso l'alto ed avente modulo E = 5.0 N/C. Il sistema è inizialmente in equilibrio. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e considerate trascurabili tutte le forme di attrito]



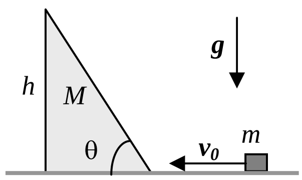
a) Quanto vale la compressione Δ_0 della molla all'equilibrio? [Esprimete la compressione in valore assoluto]
Δ_0 = …………………………………… = ………… m $|-mg+qE|/k$ = 0.24 m [riferendoci ad un asse verticale orientato verso l'alto, all'equilibrio la forza elastica, che vale in modulo $k\Delta_0$, bilancia forza peso e forza elettrica, cioè in modulo $|-mg+qE|$, da cui la soluzione]

b) Come si scrive l'equazione del moto del corpo, $a(t)$? [indicate la posizione del corpo rispetto ad un asse Z diretto verticalmente verso l'alto con origine sul pavimento, come indicato in figura, e **non** usate valori numerici per questa risposta!]
$a(t)$ = …………………………………… $-(k/m)(z(t)-L_0)+qE/m-g$ [vedi sopra!]

c) Supponete che all'istante t_0 = 0 il campo elettrico venga spento istantaneamente: il corpo non si trova più in condizioni di equilibrio e comincia a muoversi. Quanto vale la sua velocità v' quando la molla ripassa per la propria lunghezza di riposo? [Considerando il riferimento di figura, la domanda chiede di determinare la velocità del corpo quando la sua posizione è $z'=L_0$. Trascurate ogni forma di attrito nel moto del corpo e supponete che esso rimanga appoggiato, cioè solidale, all'estremità della molla., Attenti ai trabocchetti!!]
v' = …………………………………… ~ .... m/s $((k/m)\Delta_0^2-2g\Delta_0)^{1/2}$ ~ impossibile! [essendo assenti forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \underline{\Delta U_{ela}}$ (il campo elettrico è spento e quindi non compare l'energia potenziale elettrica). Si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$;. inoltre $\Delta U_g = mg(L_0-z_0)$, dove z_0 rappresenta la posizione iniziale del corpo nel riferimento impiegato; questa posizione è quella corrispondente alla compressione della molla determinata al punto a), per cui $\Delta U_g = mg\Delta_0$. Infine $\Delta U_{ela} = 0 - (k/2)\Delta_0^2$ (l'energia elastica è nulla quando la molla è alla lunghezza di riposo!). Sommando le variazioni si ottiene il risultato, da cui si osserva che, essendo l'argomento della radice quadrata negativo, la soluzione richiesta non esiste! Infatti la posizione di equilibrio a campo elettrico spento è $z_{EQ} = L_0-mg/k$, cioè si trova più in basso della posizione iniziale del corpo nel problema proposto. Dunque quando il corpo viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla esso si muove verso il basso!]

d) Commentate sul moto del corpo (tipo, tempi caratteristici, etc.).
Commento: …………………………………… l'equazione del moto è $a(t) = -(k/m)(z(t)-L_0)$. La legge oraria è quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$: $z(t) = A\cos(\omega t+\phi)+z_{EQ}$, con $z_{EQ} = L_0-mg/k$. I parametri A e ϕ si trovano con le condizioni iniziali, che forniscono ϕ = 0 e $A = L_0-\Delta_0-z_{EQ} = -qE/k + 2mg/k$, dove abbiamo preso il valore di Δ_0 determinato al punto a). Si ha quindi: $z(t) = (2mg/k-qE/k)\cos(\omega t)-(L_0-mg/k)$. Può essere interessante notare che la legge oraria della velocità si scrive: $v(t) = -\omega(2mg/k - qE/k)\sin(\omega t)$. Visti i dati numerici del problema, si nota che la velocità nei primi istanti del moto è negativa, cioè, come anticipato nella risposta al punto precedente, il corpo si muove verso il basso e quindi la molla non passa mai per la posizione di riposo! Nella correzione degli elaborati si tiene conto del fatto che nel testo effettivamente consegnato per la prova di verifica il trabocchetto era un po' troppo "nascosto"!

2. Un piano inclinato è realizzato con un blocco di materiale che ha massa M (h e θ sono rispettivamente l'altezza e l'angolo rispetto all'orizzontale del piano). Questo blocco può **scorrere con attrito trascurabile** su una superficie orizzontale ed è inizialmente fermo. Su questa stessa superficie si nuove un oggetto puntiforme di massa $m = M/2$ che inizialmente si possiede una velocità $\boldsymbol{v_0}$ orientata verso la base del piano inclinato, come mostrato in figura. L'oggetto raggiunge la base del piano e lo risale completamente; intanto anche il blocco di cui è costituito il piano **si muove** nella stessa direzione (e verso). [In questo problema **non** ci sono valori numerici: esprimete le risposte in funzione dei dati letterali noti, indicando con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si esprimono le velocità v e V rispettivamente dell'oggetto e del blocco quando l'oggetto raggiunge la sommità del piano? [Come già specificato, si supponga che, per le condizioni del problema, la massa m abbia velocità iniziale sufficiente a percorrere interamente il piano inclinato]
v= …………………………………… $(2v_0\cos\theta - (4v_0^2\cos^2\theta - 4((2-\cos^2\theta)(4gh-v_0^2))^{1/2}/(2(2-\cos\theta))$
[non essendoci dissipazioni, si conserva l'energia meccanica complessiva del sistema, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_g = (m/2)v^2 + (M/2)V^2 - (m/2)v_0^2 + mgh$. Tenendo conto della relazione tra le masse espressa nel testo ed usando un po' di algebra, la conservazione dell'energia

meccanica si scrive: $0 = v^2 + 2V^2 - v_0^2 + 2gh$. Inoltre, in direzione orizzontale non agiscono forze esterne sul sistema (attenzione: le forze esterne al sistema, cioè il peso e la reazione vincolare che la superficie esercita sulla base di appoggio del blocco, sono tutte verticali!) e quindi si conserva la quantità di moto totale in direzione orizzontale, cioè: $mv_0 = mv_{hor} + MV$, dove v_{hor} è la componente della velocità dell'oggetto in direzione orizzontale. Per la geometria del problema, si ha chiaramente $v_{hor} = v\cos\theta$, da cui $V = (m/M)(v_0 - v\cos\theta) = (v_0 - v\cos\theta)/2$. Le due equazioni costituiscono un sistema a due incognite, v e V, una delle cui soluzione fornisce la risposta. Notate infatti che delle due soluzioni dell'equazione del secondo ordine che si scrive, va scelta quella che fornisce un valore di v minore di v_0, come fisicamente ci si aspetta (l'altra soluzione si riferisce alla situazione opposta, quella in cui l'oggetto scende lungo il piano inclinato invece di salire)]

$V =$ …………………………………… $(v_0 - v\cos\theta)/2$ [vedi sopra]

b) Come si scrive l'equazione del moto del centro di massa, $a_{CM}(t)$, del sistema costituito dai due corpi? [Scrivetela lungo la direzione orizzontale di figura, riferendovi ad un asse orientato verso la destra]

$a_{CM}(t) =$ …………………………………… 0 [il sistema è isolato in direzione orizzontale e quindi il centro di massa non ha alcuna accelerazione!]

c) Come si può cercare di stabilire di quanto si è spostato il blocco al termine del processo (cioè quando l'oggetto puntiforme ha raggiunto la sommità del piano)? Commentate.

Commento: …………………………………… in base alla risposta precedente, il centro di massa si muove in direzione orizzontale di moto rettilineo uniforme, con velocità costante $v_{CM} = mv_0/(m+M) = v_0/3$, pari alla velocità iniziale del centro di massa Considerando come inizio del processo l'istante in cui l'oggetto inizia la sua salita e come termine quello in cui esso raggiunge la sommità del piano inclinato e chiamando Δx_{CM} lo spostamento del centro di massa in questo intervallo, si può scrivere: $\Delta x_{CM} = (M\Delta X + m\Delta x)/(M+m) = v_{CM}\Delta t$, dove Δt rappresenta il tempo necessario alla salita. D'altra parte lo spostamento (orizzontale!) dell'oggetto vale $\Delta x = h/tg\theta + \Delta X$, dove si è tenuto conto che lo spostamento relativo al blocco è $h/tg\theta$ e lo spostamento "assoluto" (rispetto ad un riferimento fisso) è dato dalla somma algebrica di spostamento relativo e spostamento del blocco, ΔX. Allora lo spostamento del blocco, ΔX, può essere ricavato una volta che sia stato calcolato l'intervallo l'intervallo di tempo Δt necessario all'oggetto per risalire completamente il piano inclinato. Se consideriamo lo spostamento dell'oggetto in direzione verticale, che è uniformemente accelerato con accelerazione $-g$ e velocità iniziale $v_0 \sin\theta$, possiamo ricavare il tempo Δt dalla legge oraria del moto: $h = v_0 \sin\theta\Delta t - (g/2)(\Delta t)^2$, e quindi risolvere il problema (cosa che algebricamente è piuttosto complicata!)

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 7/4/2008 Firma:

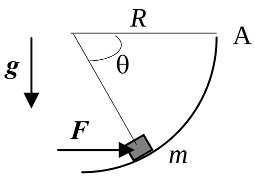
D

Corso di Laurea STCia □ Chimica c.a. □ – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 7/4/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una piccola cassa di massa m = 5.0 kg può muoversi con attrito trascurabile lungo una guida (fissa, rigida ed indeformabile) disposta su un piano verticale; la sezione della guida, che rappresenta un quarto di circonferenza di raggio R = 2.0 m, è mostrata in figura. Sulla cassa agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ diretta orizzontalmente nel verso indicato in figura e di modulo F (incognito); questa forza mantiene la cassa in equilibrio nella posizione $\theta = \theta_0 = \pi/3$. [Considerate la cassa come un oggetto puntiforme; usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



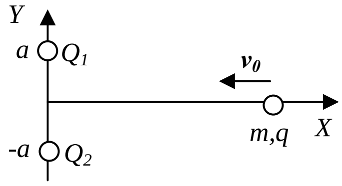
   a) Quanto vale il modulo F della forza che permette l'equilibrio della cassa?
   F = …………………………………… ~ .... N $mgcos\theta_0/sin\theta_0 \sim 29$ N   [a cassa ferma si deve avere equilibrio sia in direzione radiale che tangenziale. Per l'equilibrio in direzione tangenziale, la componente tangenziale della forza $\boldsymbol{F}$, $Fsin\theta_0$, deve equilibrare la componente tangenziale della forza peso, $mgcos\theta_0$, da cui il risultato]

   b) Quanto vale, nelle stesse condizioni di equilibrio, il modulo N della reazione vincolare esercitata dalla guida sulla cassa?
   N = …………………………………… ~ .... N $Fcos\theta_0 + mgsin\theta_0 = mg(cos^2\theta_0/sin\theta_0 + sin\theta_0) = mg(1/sin\theta_0 - sin\theta_0 + sin\theta_0) = mg/sin\theta_0 \sim 58$ N   [si ottiene imponendo equilibrio in direzione radiale]

   c) Supponete ora che, all'istante t_0 = 0, la forza $\boldsymbol{F}$ venga decuplicata in modulo, cioè che sulla cassa agisca una forza **costante ed uniforme** di modulo $F'=10F$ sempre diretta orizzontalmente: per effetto di questa forza la cassa, inizialmente ferma, sale lungo la guida fino a raggiungerne il bordo superiore (punto A di figura). Quanto vale la velocità v con cui essa raggiunge questo punto? [Trascurate ogni forma di attrito!]
   v = …………………………………… ~ .... m/s $(2F'R(1-cos\theta_0)/m - 2gRsin\theta_0)^{1/2} = (20FR(1-cos\theta_0)/m - 2gRsin\theta_0)^{1/2} = (20mgcos\theta_0\ R(1-cos\theta_0)/(msin\theta_0) - 2gRsin\theta_0)^{1/2} = (2gR(10cos\theta_0 - 10cos^2\theta_0 - sin^2\theta_0)/sin\theta_0)^{1/2} \sim 8.9$ m/s   [per il principio del bilancio energetico, detto L il lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$, deve essere: $L = \Delta E_K + \Delta U_g = (m/2)v^2 + mgRsin\theta_0$, essendo $Rsin\theta_0$ la differenza di quota tra la posizione finale e quella iniziale della cassa. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$, che è costante e sempre orizzontale, vale $L = F'\Delta s_{hor}$, essendo lo spostamento orizzontale pari a $\Delta s_{hor} = R - Rcos\theta_0$, da cui la soluzione]

   d) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N esercitata dalla guida sulla cassa quando questa si trova a passare per il punto A di figura? [Considerate le condizioni espresse alla domanda c) e notate che la cassa si sta muovendo!]
   N = …………………………………… ~ .... N $mv^2/R \sim 2.0\mathrm{x}10^2$ N   [essendo la forza peso verticale, nel punto A la reazione vincolare fornisce da sola l'accelerazione centripeta v^2/R alla cassa, da cui la soluzione]

2. Una particella dotata di carica elettrica q e massa m si trova inizialmente nella posizione $x = x_0$, y = 0 di un sistema di riferimento (il piano XY è orizzontale). Supponete che x_0 sia così grande da poter essere considerato "infinito" e che la carica q abbia una velocità iniziale v_0 diretta nel verso negativo dell'asse X, come in figura. Due cariche puntiformi $Q_1 = q$ e $Q_2 = q$ (tutte e tre le cariche hanno lo stesso segno e lo stesso valore) si trovano **fisse** nello spazio nelle posizioni $x_1 = 0$, $y_1 = a$ ed $x_2 = 0$, $y_2 = -a$, con $a << x_0$. Si osserva che, ad un dato istante, successivo a quello iniziale, la particella q si arresta momentaneamente. [Trascurate gli effetti della forza peso e di ogni forma di attrito. In questo problema **non** ci sono dati numerici: dovete esprimere le risposte usando i dati letterali noti del problema; indicate con κ la costante del campo elettrico nel vuoto]



   a) Come si esprime la differenza di potenziale elettrico ΔV tra la posizione iniziale della particella e la posizione in cui essa si arresta?
   ΔV = …………………………………… $(m/2)v_0^2/q$ [poiché sulla particella non agiscono forze dissipative, l'energia meccanica si conserva, cioè $0 = \Delta E_\kappa + \Delta U$, dove ΔU è la differenza di energia potenziale della particella stessa nelle posizioni "finale" (quando si ferma) ed "iniziale" (quando si trova a grandissima distanza dalle cariche Q_1 e Q_2). L'unica energia potenziale in gioco è quella dovuta al campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, e quindi, per definizione di differenza di potenziale, si ha $\Delta U = q\Delta V$; inoltre $\Delta E_k = 0-(m/2)v_0^2$, da cui la soluzione]

   b) Come si esprime la coordinata x' del punto di arresto della particella?

$x' =$ .... $((2\kappa q/(mv_0^2)^2 - a^2)^{1/2}$ [sulla base di quanto affermato sopra, deve essere $-\Delta E_K/q = \Delta V$. La differenza di potenziale è dovuta al campo delle dua cariche Q_1 e Q_2, cioè, ricordando che i potenziali, come le energie, si sommano algebricamente come scalari, si ha $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, con ovvio significato dei pedici. Considerando il campo di una carica puntiforme, è facile scrivere: $\Delta V_1 = -\kappa Q_1(1/x_0 - 1/(x'^2+a^2)^{1/2}) = \kappa Q_1/(x'^2+a^2)^{1/2}$, passaggio dovuto al fatto che x_0 può essere considerato matematicamente "infinito". Il calcolo per ΔV_2 porta a $\Delta V_2 = \kappa Q_2/(x'^2+a^2)^{1/2}$, cioè, essendo le cariche di ugual valore (q) e segno, le due differenze di potenziale sono uguali. Riarrangiando si ottiene la soluzione, dove si suppone che i dati del problema, in accordo con la descrizione del testo, garantiscano che l'argomento della radice quadrata sia positivo, cioè che la coordinata x' sia reale! Se non ricordate l'espressione della differenza di potenziale per il campo creato da una carica puntiforme q posta, ad esempio, nella posizione $(0,a)$ (si tratta della carica Q_1, per la Q_2 si ottiene lo stesso risultato), potete facilmente calcolarla in questo modo: $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{x0}^{x'} E_x dx = -\int_{x0}^{x'} (\kappa q/(x^2+a^2)) \cos\theta \, dx = -\kappa q \int_{x0}^{x'} 1/(x^2+a^2)^{3/2} x \, dx = -(\kappa q/2) \int_{\xi 0}^{\xi'} \xi^{-3/2} d\xi$, dove abbiamo: scelto per il calcolo del lavoro uno spostamento lungo l'asse X (essendo il campo conservativo, non dipende dalla traiettoria!); trovato la componente X del campo (necessaria: ricordate che l'espressione del lavoro contiene un prodotto scalare!) moltiplicandone il modulo per il coseno dell'angolo θ compreso tra l'asse X e la congiungente tra la posizione della carica ed il punto (generico!) dell'asse X considerato nell'integrale; espresso questo $\cos\theta$ come $x/(x^2+a^2)^{1/2}$, come ci suggerisce la trigonometria (ovviamente l'angolo cambia mano a mano che si compie l'integrazione, ed infatti dipende da x); eseguito il cambio di variabile $\xi = (x^2+a^2)$ e notato che $xdx = d\xi/2$. L'integrale si può facilmente calcolare tra gli estremi $\xi_0 = (x_0^2+a^2)$ e $\xi' = (x'^2+a^2)$, ottenendo infine: $\Delta V = -(\kappa q/2)\, \xi^{-1/2}/(-1/2) = \kappa q(\xi'^{-1/2} - \xi_0^{-1/2}) = \kappa q(1/(x'^2+a^2)^{1/2} - 1/(x_0^2+a^2)^{1/2}) = \kappa q(1/(x'^2+a^2)^{1/2})$, dove abbiamo usato il fatto che x_0 è "infinito", cioè si ottiene proprio l'espressione che abbiamo prima usato e che potevate anche ricordare]

c) Dopo essersi momentaneamente arrestata, la particella torna ad allontanarsi dalle cariche fisse, muovendosi nel verso positivo dell'asse X. Come si scrive la velocità della particella v'' quando essa è nuovamente a grandissima distanza (praticamente infinita) dalle cariche fisse?

$v'' =$ .... $-v_0$ [per la conservazione dell;'energia meccanica nell'intero processo, notando che anche in questa situazione l'energia di interazione elettrica è nulla e l'energia è solo di tipo cinetico associata al movimento della particella. Formalmente si ha quindi $0 = \Delta E_K$, da cui $v''^2 = v_0^2$. In modulo la velocità è la stessa, ma, ovviamente, cambia di segno]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 7/4/2008 Firma:

E

Corso di Laurea STCia □ Chimica c.a. □ – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 7/4/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un semplicissimo (ed irrealistico) modello "planetario" di atomo di idrogeno prevede che un protone di carica $q = 1.6\text{x}10^{-19}$ C sia **fisso** nello spazio, e che attorno a lui ruoti, su un'orbita **circolare** di raggio $R = 0.50\text{x}10^{-10}$ m, un elettrone di carica $-q$ e massa $m = 9.0\text{x}10^{-31}$ kg. [Usate il valore $\kappa = 9.0\text{x}10^{9}$ Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica; trascurate ogni effetto della forza peso ed ogni forma di attrito nel moto dell'elettrone]

a) Se, per qualche causa esterna, il raggio dell'orbita raddoppia, cioè diventa $R' = 2R = 1.0\text{x}10^{-10}$ m, quanto vale la variazione della **sola** energia cinetica ΔE_K? [Esprimete il risultato in eV]

ΔE_K = ……………………………………..= .... eV $(m/2)(v'^2-v^2) = (m/2)(\omega'^2R'^2-\omega^2R^2) = (\kappa q^2/2)(1/R' - 1/R) = -(\kappa q^2/(4R)) = -1.1\text{x}10^{-18}$ J = -7.2 eV [l'orbita circolare viene percorsa grazie alla presenza della forza attrattiva dell'interazione elettrica ; dunque l'accelerazione centripeta deve essere, in modulo, $a_C = \omega^2 R = \kappa q^2/R^2$, da cui $\omega^2 = \kappa q^2/R^3$. Questa relazione è valida per valori generici di ω ed R, da cui la soluzione. Per la soluzione numerica, ricordate che 1 eV = $1.6\text{x}10^{-19}$ J !]

b) Quanto vale la differenza di energia elettrostatica ΔU_{ele} dell'elettrone quando il raggio della sua orbita passa da R a R'?

ΔU_{ele}= …………………………………….. = ... eV $- L_E = \int_R^{R'} \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} = - \int_R^{R'} (-\kappa\, q^2/r^2)\, dr = \kappa\, q^2 \int_R^{R'} 1/r^2\, dr = -\kappa\, q^2(1/R' - 1/R) = \kappa\, q^2/(2R) = -2\Delta E_K = 2.2\text{x}10^{-18}$ J = 14 eV [nel calcolo fate attenzione ai segni: è necessario ricordare che la forza tra cariche di segno opposto è attrattiva, cioè diretta in verso opposto rispetto a quello di integrazione]

c) Quanto vale l'energia di ionizzazione I del sistema ? Discutete come si può determinare e valutatela. [Considerate l'energia di ionizzazione del sistema legato che si trova ad avere il raggio R di cui al punto a)]

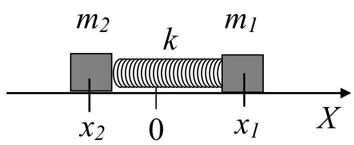
I= …………………………………….. = ... eV $-(m/2)v^2 + \kappa q^2/R = \kappa q^2/(2R) = 2.2\text{x}10^{-18}$ J = 14 eV [sulla base di quanto specificato nel commento seguente, si ha $I = \Delta E_{TOT} = \Delta E_K + \Delta U_E = -(m/2)v^2 - \int_R^\infty \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} = -(m/2)\omega^2R^2 + \int_R^\infty \kappa q^2/r^2 dr = -\kappa q^2/(2R) - \kappa q^2 (1/r)|_R^\infty = -\kappa q^2/(2R) + \kappa q^2/R$ da cui il risultato (nei vari passaggi si è fatto uso delle considerazioni svolte nelle risposte ai punti precedenti. Notate incidentalmente che il valore trovato in questa risposta è identico a quello determinato nella risposta al punto b), ed osservate anche che, avendo usato come raggio dell'orbita il raggio di Bohr per lo stato fondamentale dell'idrogeno, il risultato trovato è grosso modo proprio quello che si trova nella tavola periodica!]

Commento: …………………………………….. per ionizzare l'atomo occorre fornire un'energia sufficiente a portare l'elettrone a distanza molto grande, praticamente infinita, dal protone. Pertanto occorre fornire un'energia uguale e opposta al lavoro della forza elettrica per uno spostamento da $r=R$ a $r=\infty$. Per quanto riguarda la variazione di energia cinetica, in linea di principio essa potrebbe essere indeterminata, dato che l'elettrone portato ad inifinita distanza dal protone potrebbe continuare a muoversi. Tuttavia è ragionevole considerare l'energia di ionizzazione come la quantità **minima** di energia da fornire al sistema per passare da una condizione legata ad una non legata; tale valore minimo richiede che, una volta spostato all'infinito, l'elettrone non abbia energia cinetica, cioè sia fermo

d) Come si deve correggere il modello se si vuole considerare la possibilità che il protone si possa muovere nello spazio? Commentate!

Commento: …………………………………….. occorre tenere conto del fatto che l'accelerazione centripeta è un'accelerazione **relativa** , per cui $\mu a_C = \kappa q^2/R^2$, con μ massa ridotta del sistema, tale che $1/\mu = 1/m + 1/m_P$. Questo comporta una correzione ai risultati che, tuttavia, essendo la massa del protone $m_P >> m$, è praticamente trascurabile, per cui le affermazioni dei punti precedenti restano ancora valide, a meno di piccole correzioni

2. Due blocchettini di alluminio, di massa m_1 = 100 g e $m_2 = 2m_1$ = 200 g e dimensioni trascurabili, sono poggiati su un piano orizzontale privo di attrito. Essi sono uniti da una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 10.0 N/m, che inizialmente è tenuta **compressa** per un tratto $|\Delta_0|$ = 10.0 cm tramite un filo. Rispetto al riferimento di figura, le posizioni dei due blocchettini, inizialmente **fermi**, sono x_1 = 100 mm ed x_2 = - 50.0 mm. [Il problema è ovviamente unidimensionale]



a) All'istante t_0 = 0 il filo viene tagliato istantaneamente ed i blocchettini cominciano ad allontanarsi l'un l'altro. Quanto vale, **subito dopo** il taglio del filo, l'accelerazione **relativa** (di un blocchetto rispetto all'altro) $a_{rel} = a_2 - a_1$?

a_{rel} = ……………………… = …… m/s² $F_{int}/\mu = -k|\Delta_0|(1/m_1+1/m_2) = -15.0$ m/s² [l'equazione del moto relativo recita $a_{rel} = F_{int}/\mu$, dove $F_{int} = k|\Delta_0|$ è la forza "interna" al sistema (cioè quella che agisce sul blocchettino 2 per effetto della molla collegata al blocchettino 1) e μ è la massa ridotta del sistema. Ricordando che $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$ si ottiene la soluzione. Notate che nello scrivere la forza abbiamo tenuto conto dei segni in modo congruente con la definizione di accelerazione relativa impiegata. Infatti si ha ovviamente $a_2<0$ (il blocchettino 2 inizialmente si muove verso la sinistra della figura) e $a_1 > 0$ (il blocchettino 1 va verso destra), per cui a_{rel} è sicuramente negativa, e negativa risulta anche l'espressione data]

b) Durante l'allontanamento dei due blocchettini, la molla si estende fino a raggiungere un valore massimo di estensione $|\Delta_{max}|$; quanto vale la velocità v_2 del blocchetto di massa m_2 nell'istante di massima estensione?

v_2 = ……………………….. = …… m/s 0 [nell'istante di massima estensione le velocità dei due blocchetti devono essere uguali, cioè $v_2 = v_1$. D'altra parte, essendo il sistema isolato in direzione X, la quantità di moto del sistema deve conservarsi, cioè deve essere sempre nulla (essendo nulla all'inizio), per cui: $0 = m_1v_1+m_2v_2$. Questa equazione può essere soddisfatta solo se $v_1=v_2=0$, da cui la soluzione]

c) In quale istante t' si realizza la condizione di cui al punto precedente, cioè la molla assume la sua massima estensione?

t' = ……………………….. ~ …… s $\pi/\omega = \pi/(k(1/m_1+1/m_2))^{1/2} = \pi(2m/(3k))^{1/2} \sim$ 0.26 s [il moto (relativo) dei due blocchetti è di tipo armonico ed avviene con pulsazione $\omega = (k/\mu)$; infatti, secondo quanto stabilito nella risposta al punto a), l'equazione del moto relativo è proprio quella di una molla con costante k che agisce sulla massa ridotta. Affinché la molla assuma la massima estensione a partire dalla massima compressione (e con i blocchetti che partono da fermi), occorre un intervallo di tempo pari a mezzo periodo. Ricordando che $T = 2\pi/\omega$, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 7/4/2008 Firma: