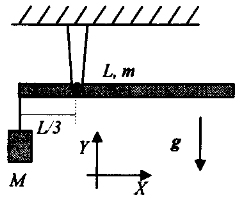
Corso di Laurea STC ☐ Chim C.A. ☐ – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 28/5/2008

Nome e cognome: .... Matricola: ....

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. **Una trave omogenea di lunghezza L = 4.9 m e massa m = 2.0 kg è imperniata in modo da ruotare senza attrito su un piano verticale. Come mostrato in figura, il perno si trova a distanza $d = L/3$ rispetto ad un estremo della trave, attaccato al quale c'è una massa M incognita (il collegamento avviene con una corda di massa trascurabile). Inizialmente il sistema si trova in equilibrio con la trave in direzione orizzontale, come in figura. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]**



a) **Quanto valgono le componenti lungo gli assi X ed Y di figura della forza di reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dal perno sulla trave?**

R_X = ... = ... N   0

R_Y = ... = ... N $(m+M)g = (3/2)mg$ = 29 N   [per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse deve essere $mg(L/2-L/3) = MgL/3$, dove $(L/2-L/3)$ rappresenta il braccio della forza peso della trave (applicata al centro di massa) e $L/3$ quello della massa incognita M. Da questo si ottiene il valore della massa $M = m/2$. Per l'equilibrio traslazionale deve poi essere $\boldsymbol{R} + (m+M)\boldsymbol{g} = 0$, da cui la soluzione]

b) **Ad un dato istante la massa M viene staccata dalla trave (si taglia la corda di collegamento) e si osserva che la trave comincia a ruotare in senso orario (rispetto alla figura). Sapendo che il momento di inerzia della trave vale $I = mL^2/108$ $\cancel{= 1.8\times10^{2}\ kg}$, quanto vale il modulo dell'accelerazione angolare α subito dopo il taglio della corda?**

α = ... = ... **rad/s^2** $mg(L/2-L/3)/I = mg(L/6)/(mL^2/108) = (108/6)g/L = 18g/L$ = 36 rad/s^2 [per l'equazione del moto di rotazione si ha $I\alpha = \tau = mg(L/2-L/3)$, dove si considera solo il momento della forza peso e si suppone che, subito dopo il taglio della corda, la trave non abbia ancora subito alcuna rotazione significativa]

c) **Quanto vale la velocità angolare ω della trave quando questa passa per la posizione verticale (cioè il suo asse lungo si trova in direzione verticale)?**

ω = ... ~ .... rad/s $(2mg(L/2-L/3)/I)^{1/2} = (2mg(L/6)/(mL^2/108))^{1/2} = 6(g/L)^{1/2}$ ~ 8.5 rad/s   [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta U_g + \Delta E_K = mg(L/3-L/2) + (1/2)I\omega^2$, da cui la soluzione]

2. **Un "condensatore cilindrico" è costituito da un lungo e stretto cilindro pieno di materiale buon conduttore di raggio a = 10 mm ed altezza h = 1.0 m, coassiale ad un guscio cilindrico spesso, sempre realizzato di materiale buon conduttore, con raggio interno b = 20 mm, raggio esterno c = 25 mm ed altezza sempre pari ad h. Si consideri inizialmente vuoto lo spazio tra le due armature e si supponga che le due armature siano collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 30 V. Il polo positivo del generatore è collegato all'armatura interna, mentre quello positivo è collegato sia all'armatura esterna che alla terra. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto ed impiegate tutte le approssimazioni che consentono di considerare trascurabili gli "effetti ai bordi", cioè supponete valida l'approssimazione di simmetria cilindrica]**

a) **Quanto valgono le cariche Q_a, Q_b, Q_c presenti, in condizioni stazionarie, sulle superfici cilindriche di raggio rispettivamente a, b, c? [Illustrate bene, in brutta, il procedimento impiegato]**

Q_a = ... ~ .... C $V_0 2\pi\varepsilon_0 h/(\ln(b/a))$ ~ 2.4x10^{-9} C   [applicando Gauss ad una scatola cilindrica di raggio r generico con $a<r<b$, si ha che il campo elettrico, che ha direzione radiale e dipende solo da r , si esprime come $E(r) = Q_a/(2\pi\varepsilon_0 hr)$. D'altra parte deve anche essere $-V_0 = -\int_a^b E\, dr$, da cui la soluzione]

Q_b = ... ~ .... C $-Q_a$ ~ -2.4x10^{-9} C   [applicando Gauss ad una scatola cilindrica di raggio $b<r<c$ si trova che il flusso del campo deve essere nullo essendo nullo il campo (ci si trova all'interno di un conduttore all'equilibrio!). Quindi la carica interna alla scatola deve essere nulla, da cui la soluzione]

Q_c = ... ~ C   0   [al di fuori del sistema di cilindri il campo deve essere nullo, essendo nulla la differenza di potenziale con l'"infinito". Applicando Gauss ad una scatola cilindrica di raggio $r>c$ si trova che nulla deve essere la carica interna a questa scatola, dato che nullo è il flusso del campo. Da qui, tenendo conto delle risposte alle domande precedenti, la soluzione]

b) **Immaginate ora che lo spazio tra le due armature sia riempito con un materiale debolmente conduttore dotato di resistività elettrica ρ_C = 1.0x10^9 ohm m. Quanto vale l'intensità di corrente I fornita in condizioni stazionarie dal generatore?**

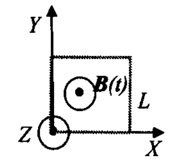
I = ... ~ .... A $j(r)\ 2\pi rh = E(r)\ 2\pi rh/\rho_C = Q/(\rho_C\varepsilon_0) = V_0 2\pi h/(\rho_C \ln(b/a))$ ~ 0.27x10^{-6} A [per definizione la densità di corrente è $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E}/\rho_C$, dove $\boldsymbol{E}$ è il campo tra le armature determinato nella risposta precedente. L'intensità di corrente si trova calcolando il flusso di $\boldsymbol{j}$ attraverso una superficie cilindrica coassiale con il sistema e di raggio (generico) $a<r<b$. Poiché il campo, e quindi la densità di corrente, sono uniformi sulla superficie cilindrica (essi dipendono solo da r) , il flusso è dato semplicemente dal prodotto tra superficie (laterale) del cilindro e modulo della densità di corrente, da cui la soluzione]

c) **Ora supponete che il generatore di differenza di potenziale continua sia sostituito da un generatore, altrettanto ideale, alternato, che cioè fornisce una differenza di potenziale $V(t) = V'_0\cos(\omega t)$, con V'_0 costante. Come si scrive l'intensità di corrente $I'(t)$ fornita dal generatore in queste condizioni? Commentate sulla dipendenza della soluzione dal valore di ω. [Per la risposta a questa domanda non usate valori numerici! Inoltre considerate una pulsazione ω in ogni caso sufficientemente piccola da rendere trascurabile eventuali effetti di irraggiamento elettromagnetico]**

$I(t)$ = ... $V(t)/R + dQ(t)/dt = V(t)/R + C\ dV(t)/dt = (V'_0/R)(\cos(\omega t) - \omega RC\sin(\omega t))$, dove $R = V_0/I$ ~ 1.1x10^6 ohm e $C = Q_a/V_0$ ~ 8.0x10^{-12} F   [il sistema equivale, dal punto di vista circuitale, al parallelo di una resistenza R e di un condensatore C , dove i valori possono essere facilmente dedotti dalle risposte alle domande precedenti. In condizioni alternate la corrente passa in parte attraverso la resistenza, restando in fase con il generatore, ed in parte va sulle armature del condensatore, dove si misura una carica sfasata rispetto al generatore per la presenza della derivata temporale]

Commento: ....   a "basse frequenze", cioè per $\omega << 1/(RC)$ ~ 1.1x10^5 rad/s il termine "resistivo" prevale, mentre ad "alte frequenze", cioè nella condizione opposta, prevale il termine "capacitivo". Questo vuol dire che nei due casi la corrente preferisce passare rispettivamente attraverso la resistenza o "verso" le armature, dove, in condizioni di alta frequenza, non si raggiungono mai condizioni stazionarie o quasi-stazionarie.

3. **Una spira quadrata di lato L è disposta sul piano XY di un sistema di riferimento come in figura. La spira è realizzata con un filo conduttore di resistenza elettrica R . È inoltre presente un campo magnetico esterno uniforme (non varia punto per punto!) diretto lungo l'asse Z ; inizialmente l'ampiezza di questo campo vale B_0 . All'istante $t=0$ l'ampiezza comincia a diminuire in modo lineare con il tempo (linearmente proporzionale al tempo), fino ad annullarsi (e rimanere nullo) all'istante $t=t'$. [Non usate valori numerici per la risposta a questa domanda, che va espressa in funzione dei dati letterali noti del problema; supponete che la variazione del campo sia sufficientemente lenta da poter trascurare effetti legati ad autoinduzione della spira]**



a) **Come si scrive e che verso ha l'intensità di corrente indotta sulla spira $I(t)$? [Spiegate bene!]**

$I(t)$ = ... $-(d\Phi_S(\boldsymbol{B})/dt)/R = B_0L^2/(Rt')$ [la corrente è sicuramente nulla per $t<t_0$ e per $t>t'$. Per la legge di Faraday, notando che, essendo il campo magnetico **uniforme**, il flusso interno alla spira è dato semplicemente dal prodotto dell'ampiezza del campo stesso per l'area L^2 della spira. La dipendenza temporale dell'ampiezza del campo si trova sfruttando l'informazione del testo, che, tradotta analiticamente, significa $B = B_0(1-t/t')$. Derivando e notando che la resistenza della spira è R si ottiene la soluzione. Notate che la corrente determinata è costante nel tempo a causa della dipendenza lineare del]

Verso (rispetto alla figura):   X ☐ Orario   ☐ Antiorario   ☐ Variabile periodicamente

Spiegazione: ....   per la legge di Lenz, cioè per la presenza del segno "meno" nella legge di Faraday, si ha che la corrente indotta deve avere un verso tale che il campo magnetico da essa prodotto deve avere una variazione temporale di flusso che si oppone a quella del campo esterno. Poiché questo diminuisce con il tempo, la corrente indotta deve essere tale da produrre un "rafforrzamento" del campo esterno. Per la regola della mano destra questo significa che la corrente deve scorrere in verso orario (rispetto alla figura)

b) **Come si esprime l'energia totale "dissipata" dal filo E_{diss} nell'intervallo di tempo che va da $t = t_0$ a $t = t'$?**

E_{diss} = ... $\int_{t0}^{t'} RI^2(t)dt = B_0^2 L^2/(Rt'^2) \int_{t0}^{t'} dt = B_0^2 L^2/(Rt')$ [la **potenza** dissipata per effetto Joule si esprime come $RI^2(t)$. Per trovare l'energia occorre **integrare** nel tempo. Notando che la corrente che scorre nella spira è costante, l'integrazione è banale e fornisce il risultato]

c) Quali sono gli "effetti meccanici" (forze e/o momenti di forza) che vi aspettate sulla spira o sui componenti (lati) della spira stessa? Commentate!

Commento: .... visto che il campo è ortogonale al piano della spira, e quindi parallelo al suo momento di dipolo magnetico, non si hanno momenti di forza. Invece esistono forze (uguali ed opposte a coppie) tra i lati opposti della spira. Visto il verso della corrente, queste forze tendono a separare i lati opposti, tendendo quindi a "dilatare" la spira stessa (che si suppone sufficeintemente rigida). A rigore esistono poi anche forze tra lati adiacenti, la cui espressione, però, è più complessa.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 28/5/2008

Firma:

FOGLIETTO

Densità di massa: $\rho_m = \frac{dm}{dV}$

Eq. Moto rot.: $\alpha = \Sigma\tau / I$

CM: $\vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm$

Mom. Inerzia (discr.): $I = \Sigma m_i r_i^2$

Teo. Assi par.: $I = I_{CM} + MD^2$

Eq.moto trasl.: $\vec{a} = \Sigma\vec{F} / M$

Mom. Inerzia (cont.): $I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho_m dV$

Mom. Ang (part. Sing.).: $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$

En. Cin. Rot.: $E_{k,rot} = I\omega^2 / 2$

Mom. Ang. (corpo rig.): $L = I\omega$

Mom. Forza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Cons. Mom. Ang.: $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$

$\vec{j} = \rho\vec{v} = ne\vec{v}$ Dens.corr.in conduttore.

$\vec{j} = \sigma_C \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho_C}$

$\sigma_C = \frac{ne^2 \tau_C}{m}$ Conducibilità secondo Drude.

$I = \Phi_S(\vec{j}) = \int \vec{j} \cdot \hat{n} dS$ Corrente/dens.corr.

$V = RI$ Legge di Ohm

$W = VI$ Effetto Joule

$Q = CV$ Capacità

$\tau = RC$ Tempo di scarica Condensatore su resistenza

$U_E = CV^2 / 2$ Energia condensatore

$\vec{F}_E = q\vec{E}$ Def. campo elettrico/forza elettrica

$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Def. d.d.p.

$\vec{E} = \frac{\kappa_E Q}{r^2} \hat{r}$ Campo in r di carica puntiforme/sferica Q

$d\vec{E} = \frac{\kappa_E dq}{r^2} \hat{r}$ Relazione costitutiva campo el.

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{E}) = \int_{S,chiusa} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ Teorema di Gauss

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ Circuitazione campo elettrico (statico)

$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ Forza di Lorentz

$d\vec{F}_M = Id\vec{l} \times \vec{B}$ Forza su elemento di filo

$\vec{p}_M = SI\hat{n}$ Momento dipolo magnetico per spira di superf S e corrente I

$\vec{\tau} = \vec{p}_M \times \vec{B}$ Momento delle forze su spira

$d\vec{B} = \frac{\kappa_B d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ Relazione costitutiva campo magn.

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{B}) = \int_{S,chiusa} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ Flusso campo magn.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concat}$ Teor. Ampere (statico).