

Corso di Laurea Ing. EA – “Compito per casa di Fisica” n. 1

Nome e cognome:

Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

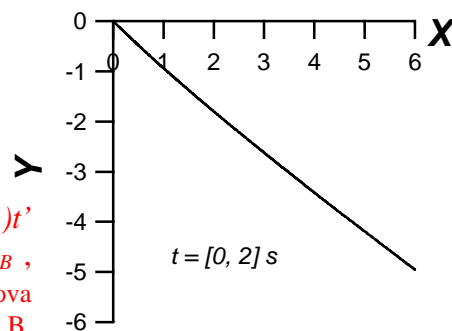
1. Il moto di un punto, denominato A, si svolge sul piano cartesiano XY con un'accelerazione $\mathbf{a} = (1.7, -1.0)$ m/s² [l'espressione fra parentesi indica le componenti (a_x, a_y) dell'accelerazione lungo le due direzioni cartesiane]. All'istante $t_0 = 0$ il punto A passa per l'origine del sistema di riferimento ed ha una velocità $\mathbf{v}_0 = (2.0, -2.0)$ m/s.

a) Che traiettoria percorre il punto A? Provate a disegnarla qualitativamente nel piano riportato qui sotto.
 rettilinea parabolica “varia” (cioè né l'una né l'altra)

Spiegazione sintetica della risposta: la traiettoria è determinata dalla direzione del vettore velocità che, istante per istante, forma un angolo (misurato rispetto ad X) la cui tangente è $v_y/v_x = (v_{0y} + a_y t)/(v_{0x} + a_x t)$; questo rapporto non resta costante e quindi la traiettoria non è rettilinea e non si tratta neppure di una parabola (si verifica facilmente). Quindi la traiettoria è “varia” (a tempi piccoli, quando domina la velocità iniziale, è rettilinea lungo la bisettrice del quarto quadrante, dato che la tangente vale -1, ma a tempi lunghi, quando il termine at tende a dominare, si dispone lungo il segmento che forma un angolo di 330 gradi, ovvero -30 gradi, rispetto all'asse X, dato che la tangente vale $-1/1.7$)

b) Sullo stesso piano si muove anche un altro punto, denominato B. Il moto di B avviene con una velocità diretta lungo il verso positivo dell'asse X e di modulo v_B ; all'istante t_0 il punto B si trova a passare nel punto $\mathbf{r}_B = (0, -6.0)$ m. Quanto deve valere v_B se volete che i due punti si incontrino?

$v_B = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s $v_{0x} + (a_x/2)t'$
 = 3.4 m/s, essendo t' una delle due soluzioni dell'eq. $v_{0y}t' + (a_y/2)t'^2 = y_B$, con y_B coordinata Y iniziale del punto B [si ottiene in due passaggi: prima si trova l'istante “di impatto” t' imponendo che la coordinata Y del punto A coincida con quella di B, costante; quindi, dalla condizione che anche le coordinate X dei due punti devono coincidere, si determina il valore ammissibile di v_B]



c) Come si esprime, in funzione del tempo, la velocità \mathbf{v}'_A del punto A in un sistema di riferimento cartesiano X'Y' solidale al punto B? [Notate che questo sistema di riferimento è inerziale, ed esprimete la velocità componente per componente; scrivete solo l'espressione “letterale”!]

$v'_{AX} = \dots\dots\dots v_{0x} + a_x t - v_B$
 $v'_{AY} = \dots\dots\dots v_{0y} + a_y t$ [dalla composizione vettoriale delle velocità]

2. Vi trovate sdraiati al suolo ad una distanza $d = 9.45$ m da un sottile muro verticale di altezza $h = 7.00$ m (e spessore trascurabile). Da questa posizione scagliate una pallina (da approssimare con un punto materiale!) con una velocità iniziale v_0 che forma un angolo $\theta = 45$ gradi rispetto all'orizzontale. Per determinare il moto, considerate i soli effetti dell'accelerazione di gravità diretta verticalmente verso il basso e di modulo $g = 9.80$ m/s², cioè trascurate ogni forma di attrito!

a) Quanto vale il valore **minimo** del modulo della velocità v_0 affinché la pallina possa scavalcare il muro? [Ricordate che $\cos\theta = \sin\theta = 0.707$]

$v_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s $d(g/(2\cos\theta (d\sin\theta - h\cos\theta)))^{1/2} = 9.45$
 m/s [si determina il tempo $t' = d/(v_0\cos\theta)$ che occorre alla pallina perché la sua coordinata orizzontale corrisponda a quella del muro; quindi si impone che la sua coordinata verticale a questo istante sia (almeno) pari all'altezza del muro, cioè $h = v_0\sin\theta t' - (g/2)t'^2$; da qui si ricava v_0]

b) Quanto vale la componente verticale della velocità della pallina, v_y , nell'istante in cui essa scavalca il muro?

$v_y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s $v_0 \cos\theta - gt' = v_0 \cos\theta - gd/(v_0\cos\theta)$
 = -7.18 m/s [attenzione: la velocità verticale non è nulla, ma negativa, perché la pallina si trova nella fase di discesa nell'istante in cui supera il muro! Provate a fare un disegno per capire perché]

3. Una “strana” legge oraria del moto per un punto che si muove lungo l’asse X (moto unidimensionale) è del tipo: $x(t) = A \exp(-t/\tau)$. [Nota: l’espressione $\exp(a)$ equivale a e^a , dove con e si indica la “base dei logaritmi naturali”, cioè quel numero il cui logaritmo naturale vale 1, $\ln(e) = 1$; provate a graficare la funzione!].
- a) Sapendo che all’istante iniziale $t_0 = 0$ il punto occupa la posizione $x(t_0) = x_0 = -2.0$ m, quanto vale il coefficiente A ? [Esprimetene anche l’unità di misura!]
 $A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots x_0 = -2.0$ m [notate che $\exp(0) = 1!$]
- b) Come si scrivono le leggi orarie della velocità $v(t)$ e dell’accelerazione $a(t)$? [Per rispondere a questa domanda fa comodo ricordare che per la derivata della funzione esponenziale vale la regola: $d\exp(f(x))/dx = df(x)/dx \exp(f(x))$, dove con $f(x)$ si indica una funzione di x , variabile indipendente generica; state attenti a cosa scrivete: è semplice!]
 $v(t) = \dots\dots\dots dx(t)/dt = -(A/\tau) \exp(-t/\tau)$
 $a(t) = \dots\dots\dots dv(t)/dt = (A/\tau^2) \exp(-t/\tau)$
- c) Sapendo che il “tempo caratteristico” vale $\tau = 5.0$ s, quanto valgono velocità ed accelerazione all’istante iniziale, v_0 e a_0 ? Commentate brevemente sui segni.
 $v_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s $-(A/\tau) = 4.0 \times 10^{-1}$ m/s
 $a_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $(A/\tau^2) = -8.0 \times 10^{-2}$ m/s²
Breve commento: $\dots\dots\dots$ il punto si muove nel verso positivo delle X e “sta rallentando”
4. Un punto si muove sul piano XY seguendo le equazioni del moto: $d^2x(t)/dt^2 = -Ax(t)$; $d^2y(t)/dt^2 = -Ay(t)$ con $A = 4.0$ s⁻².
- a) Sapendo che all’istante $t_0 = 0$ il punto si trova nel punto $x_0 = 0$, $y_0 = -3.0$ m con velocità iniziale $v_{0X} = 8.0$ m/s e $v_{0Y} = 0$, scrivete le leggi orarie del moto per le due coordinate, $x(t)$ e $y(t)$, che sono soluzioni delle equazioni del moto di cui sopra.
 $x(t) = \dots\dots\dots - (v_{0X}/\omega) \sin(\omega t)$, con $\omega = A^{1/2}$
 $y(t) = \dots\dots\dots y_0 \cos(\omega t)$ [esce imponendo le condizioni al contorno alla « soluzione generica omogenea » $\alpha \cos(\omega t + \delta)$, che va scritta per le due direzioni]
- b) Quanto vale, in funzione del tempo t , il modulo del vettore posizione $r(t)$ del punto?
 $r(t) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $(x^2 + y^2)^{1/2} = ((v_{0X}/\omega)^2 + y_0^2)^{1/2} = \text{cost.} = 5.0$ m
- c) Descrivete qui sotto la traiettoria del punto:
 $\dots\dots\dots$ essendo costante la somma $x^2 + y^2$, la traiettoria è una circonferenza di raggio r centrata nell’origine, che viene percorsa con velocità angolare costante $\omega = A^{1/2} = 2.0$ rad/s e verso antiorario. All’istante iniziale il punto si trova nella posizione angolare $\theta = (3/2)\pi$ ed ha la velocità tangenziale specificata nel testo
5. Dato un asse Z nello spazio tridimensionale, per identificare la posizione di un punto si può usare un sistema di riferimento **cilindrico**, in cui le coordinate sono R , θ , z (le prime due sono le ordinarie coordinate di un sistema polare sul piano ortogonale all’asse, mentre z rappresenta la coordinata lungo l’asse). In questo sistema il moto di un punto è descritto dalle coordinate: $R = R_0$; $\theta = \omega t$; $z = (a/2)t^2$, con $R_0 = 10$ cm, $\omega = 6.3$ rad/s, $a = 3.2$ m/s².
- a) Descrivete la traiettoria del punto:
 $\dots\dots\dots$ è un “elica” che si avvolge nel verso positivo dell’asse z , il moto di rotazione essendo antiorario; il “passo dell’elica” non è costante, ma aumenta con il tempo!
- b) In che posizione si trova il punto all’istante $t = 0.25$ s? [Dovete esprimere la posizione in coordinate **cartesiane**, x , y , z]
 $x = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $z = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $(R_0 \cos(\omega t), R_0 \sin(\omega t), (a/2)t^2) = (0, 1.0 \times 10^{-1}, 1.0 \times 10^{-1})$ m [notate che il tempo t è circa un quarto di periodo]
- c) Quanto vale, in componenti **cilindriche** a_R , a_θ , a_Z , l’accelerazione del punto allo stesso istante?
 $a_R = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $a_\theta = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $a_Z = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $(-\omega^2 R_0, 0, a) = (-4.0, 0, 3.2)$ m/s² [nel piano ortogonale all’asse l’accelerazione è centripeta e lungo Z l’accelerazione è uniforme]
- d) Quanto vale, in componenti **cartesiane** a_x , a_y , a_z , l’accelerazione del punto allo stesso istante?
 $a_x = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $a_y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $a_z = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $(0, -\omega^2 R_0, a) = (0, -4.0, 3.2)$ m/s² [viene in modo semplice se si considera come è disposto il vettore posizione all’istante considerato! Notate che l’accelerazione non è solo centripeta, e il vettore accelerazione ha una direzione che non è solo radiale]