

Corso di Laurea Ing. EA – “Compito per casa di Fisica” n. 5/06

Nome e cognome: Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un’asta di massa $M = 10.0 \text{ Kg}$, lunghezza $L = 3.00 \text{ m}$ e sezione di area $A = 10.0 \text{ cm}^2$, è realizzata con un materiale disomogeneo.

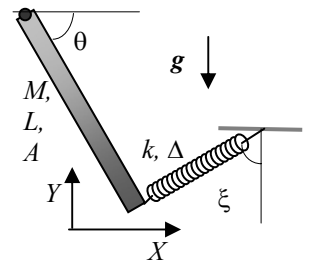
a) Sapendo che, detta x la distanza da un estremo dell’asta, la densità di massa varia in funzione di x secondo la legge $\rho(x) = \rho_0 x^2/L^2$, quanto vale il coefficiente ρ_0 ?

$\rho_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ Kg/m}^3$ $ML^2/(S \int_0^L x^2 dx) = 3M/(SL) = 1.00 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$
 [per definizione di densità di massa, deve essere $M = \int_{VOL} \rho(x) dV = \int_0^L \rho(x) S dx = \int_0^L \rho_0 x^2 (S/L^2) dx = \rho_0 (S/L^2) \int_0^L x^2 dx = \rho_0 SL/3$, dove l’elemento di volume è stato scritto come $dV = S dx$ coerentemente con la geometria lineare del sistema]

b) A quale distanza x_{CM} misurata rispetto all’estremo $x = 0$ dell’asta si trova il suo centro di massa?

$x_{CM} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m}$ $(\int_0^L x \rho(x) S dx)/M = \rho_0 S L^2/(4M) = (3M/(SL))(SL^2/(4M)) = 3L/4 = 2.25 \text{ m}$

c) Supponete ora che questa asta possa ruotare **senza attrito** su un piano verticale e attorno ad un perno passante per il suo estremo $x = 0$. Supponete anche che all’altro estremo dell’asta sia attaccata una molla, di massa trascurabile e costante elastica $k = 30.0 \text{ N/m}$ e che l’altro estremo della molla sia vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. La figura rappresenta la situazione di equilibrio, che si verifica quando la molla è diretta **ortogonalmente** all’asta, mentre l’asta forma un angolo $\theta = 60$ gradi rispetto all’orizzontale. Quanto vale l’allungamento Δ della molla in queste condizioni? [Usate il valore numerico $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ per il modulo dell’accelerazione di gravità]



$\Delta = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ m}$ $Mg x_{CM} \cos\theta / (kL) = 3Mg \cos\theta / (4k) = 2.45 \text{ m}$

m [viene dall’equilibrio dei momenti delle forze rispetto al perno di rotazione, notando che le forze che danno un momento non nullo sono la forza peso Mg , applicata al baricentro e quindi con un braccio $x_{CM} \cos\theta$ rispetto al perno, e la forza elastica, di modulo $k\Delta$ e braccio L , essendo diretta ortogonalmente all’asta]

d) Quanto valgono, in queste condizioni di equilibrio, le componenti “orizzontali” e “verticali”, rispettivamente N_X ed N_Y , della reazione vincolare esercitata dal perno sull’asta? [Usate il sistema di riferimento XY indicato in figura e state attenti a esprimere bene le componenti delle forze!]

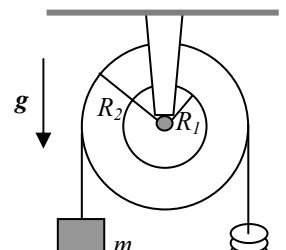
$N_X = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots \text{ N}$ $-k\Delta \sin\xi = -k\Delta \sin\theta = -k \sin\theta (3Mg \cos\theta / (4k)) = -3Mg \sin\theta \cos\theta / 4 \sim -31.8 \text{ N}$

$N_Y = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots \text{ N}$ $Mg - k\Delta \cos\xi = Mg - k\Delta \cos\theta = Mg - k \cos\theta (3Mg \cos\theta / (4k)) = Mg(1 - 3\cos^2\theta / 4) \sim 42.9 \text{ N}$ [si ottiene dall’equilibrio delle forze agenti sull’asta; per le proiezioni della forza elastica $k\Delta$ lungo le direzioni X ed Y , può fare comodo riferirsi all’angolo ξ di figura e notare che, per la geometria, si ha $\xi = \theta$]

e) Supponete ora che, ad un dato istante, la molla si spezzi **istantaneamente**: l’asta non è più in equilibrio e comincia a ruotare attorno al perno. Quanto vale, in modulo, l’accelerazione **lineare** a (cioè riferita al moto di traslazione, per intenderci quella che si misura in m/s^2) che possiede l’estremo $x = L$ dell’asta subito all’inizio del suo moto?

$a = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots \text{ m/s}^2$ $\alpha L = \tau/L = Mg x_{CM} \cos\theta / I = Mg(3L/4) \cos\theta L / (Sp_0 L^3/5) = 15 MgL^2 \cos\theta / (12ML^2) = (5/4)g \cos\theta = (5/8)g = 6.12 \text{ m/s}^2$ [infatti il moto di **rotazione** dell’asta ha luogo a causa del momento della forza peso, $\tau = Mg x_{CM} \cos\theta$, che non è più bilanciato dalla momento della forza della molla. L’equazione cardinale per le rotazioni dice che $\tau = I \alpha$, dove il momento di inerzia (vedi sopra per il calcolo dell’integrale) vale $I = \int \rho_0 (S/L^2) x^2 dx = \rho_0 S L^3/5$; da qui, tenendo anche conto della risposta al punto a), si ricava il valore di $\alpha = (5/4)g \cos\theta / L$. D’altra parte la geometria del sistema indica che l’accelerazione **lineare** dell’estremo dell’asta è $a = \alpha L$, da cui il risultato]

2. Due dischi omogenei di identico spessore e raggio diverso, R_1 ed $R_2 = 2R_1$, sono montati faccia a faccia, concentrici e solidali l’un l’altro. Due corde inestensibili e di massa trascurabile sono avvolte attorno alle superfici laterali dei due dischi, e le



condizioni sono tali che queste corde non slittano sulle superfici laterali quando il sistema costituito dai due dischi ruota, **senza attrito**, attorno ad un perno passante per l'asse dei due dischi. L'intero sistema dei due dischi è appeso ad un solaio indeformabile, come rappresentato in figura dove si dà una vista frontale del tutto (è la situazione tipica di una "carrucola a doppio raggio"). La corda avvolta attorno al disco di raggio R_1 termina con una massa puntiforme m , mentre la corda avvolta al disco di raggio R_2 è attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k vincolata al pavimento (vedi figura). [Il problema non ha valori numerici, e quindi dovete dare le risposte in funzione dei parametri letterali noti]

- a) Sapendo che il disco di raggio R_1 ha momento di inerzia I_1 e supponendo che i dischi siano **omogenei** e fatti **dello stesso materiale**, quanto vale I_2 ? [Considerate momenti di inerzia per rotazioni rispetto all'asse dei dischi, ricordate che, dal testo del problema, $R_2 = 2R_1$, e notate che la densità di massa è la stessa nei due casi]

$$I_2 = \dots\dots\dots I_1 R_2^4/R_1^4 = 16 I_1 \quad \text{[detta } \rho \text{ la densità, incognita, e scegliendo al solito l'elemento di volume } dV = 2\pi h r dr, \text{ con } h \text{ spessore del disco (lo stesso per i due dischi), si ha, per un disco di raggio } R \text{ generico, } I = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho R^4/4, \text{ da cui la risposta}]$$

- b) Quanto vale all'equilibrio l'allungamento Δ della molla?

$$\Delta = \dots\dots\dots mgR_1/(kR_2) = mg/(2k) \quad \text{[per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse dei dischi, dovute alla forza peso } mg \text{ e alla forza elastica } k\Delta]$$

- c) Immaginate ora di prendere in mano il corpo puntiforme, e di spostarlo dalla sua posizione di equilibrio verso il basso per un tratto $L=2\Delta$ per poi lasciarlo andare con **velocità iniziale nulla**; esso, come vi suggerisce il buon senso, si sposterà verso l'alto. Quanto vale la velocità angolare ω dei dischi quando il corpo ripassa per la posizione di equilibrio (quella determinata al punto precedente)? [Ricordate che il moto avviene con attriti trascurabili!]

$$\omega = \dots\dots\dots ((2mgL+k((\Delta+L)^2-\Delta^2))/(mR_1^2+I_1+I_2))^{1/2} = (4mg\Delta + 8k\Delta^2) / (mR_1^2+17I_1) = 4(mg)^2/(k(mR_1^2+17I_1)) \quad \text{[per la conservazione dell'energia meccanica, somma della cinetica della massa e dei dischi, gravitazionale della massa ed elastica della molla: } 0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = (m/2)v^2 + (I_1/2)\omega^2 + (I_2/2)\omega^2 - mgL - (k/2)((\Delta+L)^2-\Delta^2); \text{ notate che, nell'espressione precedente, } v \text{ indica la velocità del corpo puntiforme quando passa per l'equilibrio, che, poiché la corda non slitta, vale } v = \omega R_1]$$

3. Un cerchione di bicicletta di raggio $R = 20$ cm e massa $M = 0.40$ Kg (approssimabile come un sottile guscio cilindrico, cioè, in pratica, come una circonferenza su cui è distribuita omogeneamente la massa) è "appesantito" con un piombino, di massa $m = 100$ g, attaccato in un punto della circonferenza.

- a) Quanto vale il momento di inerzia I_{TOT} del sistema?

$$I_{TOT} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ Kg m}^2 \quad (M+m)R^2 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2 \quad \text{[per la definizione di momento di inerzia!]}$$

- b) Indicate ora con θ l'angolo compreso tra il raggio che unisce il centro del cerchione al piombino e la verticale e supponete che il sistema cerchione+piombino sia poggiato su una superficie piana su cui può muoversi senza strisciare, cioè con un moto di **rotolamento puro**. Quanto vale l'angolo (o gli angoli) θ_0 per cui il sistema si trova in equilibrio? Date anche una spiegazione sintetica della risposta.

$$\theta_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ gradi } 0$$

Spiegazione sintetica della risposta: il CM del sistema si troverà lungo il raggio considerato, ad una certa distanza dal centro; la posizione $\theta_0=0$ garantisce momento nullo per la forza peso, essendo nullo il braccio, e quindi equilibrio rotazionale; l'eq. traslazionale del centro di massa è anch'esso garantito grazie alla presenza delle forze di reazione vincolare esercitate dalla superficie di appoggio sul sistema

- c) Se il cerchione viene fatto ruotare di un **piccolo** valore θ' rispetto alla posizione di equilibrio, e poi lasciato andare con velocità iniziale nulla, che tipo di moto si determinerà? Commentate:

..... non essendo più $\theta = \theta_0$, il momento delle forze rispetto al centro del cerchione sarà $\tau = (m+M)gr_{CM} \sin\theta'$, dove $r_{CM} = mR/(m+M)$ è la distanza tra il centro del cerchione e la posizione del CM, che, come detto, si trova per simmetria lungo il raggio che punta al piombino; questo momento delle forze determina un'accelerazione angolare α del cerchione. Per $\theta \ll 1$, si ha $\sin\theta \sim \theta$, e, ponendo $\alpha = d^2\theta/dt^2$ e facendo attenzione ai segni, si vede che il moto di rotazione è oscillatorio e periodico; per la condizione di rotolamento puro, questo moto è accompagnato da un moto di traslazione del CM, anch'esso oscillatorio ed ugualmente periodico, essendo $a_{CM} = \alpha R$