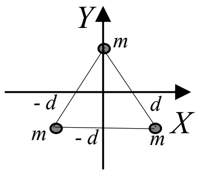
Corso di Laurea Ing. EA – “Compito per casa di Fisica” n. 5 - 17/3/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Il sistema materiale di figura è costituito da tre corpi puntiformi identici di massa m = 0.60 Kg, tenuti insieme da un sistema di aste **rigide di massa trascurabile**. Nel sistema di riferimento indicato in figura, i tre corpi giacciono sul piano z = 0 e si trovano rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{r_1} = (-d,-d)$, $\mathbf{r_2} = (0, d)$, $\mathbf{r_3} = (d,-d)$, con d = 30 cm. [Notate che i tre corpi si trovano ai vertici di un triangolo isoscele "indeformabile"]



a) Qual è la posizione $\mathbf{r_{CM}} = (x_{CM}, y_{CM})$ del centro di massa del sistema?

x_{CM}= …………………………………… = ……….. m $(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)/(m_1+m_2+m_3)$ = 0 [come si poteva vedere dal fatto che l'asse Y è un asse di simmetria del sistema]

y_{CM}= …………………………………… = ……….. m $(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)/(m_1+m_2+m_3)=-d/3$=-0.10 m

b) Quanto vale il momento di inerzia I_0 per una rotazione del sistema attorno all'asse Z?

I_0 = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2= m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)+m_3(x_3^2+y_3^2)= 5md^2$ = 0.27 Kg m^2

c) Quanto vale il momento di inerzia I' per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del corpo 1?

I' = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $m_1r'^2_1+m_2r'^2_2+m_3r'^2_3= m_1((x_1-x_1)^2+(y_1-y_1)^2)+ m_2((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)+ m_3((x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2)= 0 + m_25d^2 + m_34d^2 = 9md^2$ = 0.49 Kg m^2 [notate che la massa 1 non "contribuisce" al momento di inerzia, dato che la sua distanza dall'asse di rotazione, r'_1, è in questo caso nulla; tuttavia $I'>I_0$ dato che le masse m_2 ed m_3 vengono a trovarsi relativamente distanti dall'asse di rotazione]

d) Quanto vale il momento di inerzia I_{CM} per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del centro di massa? [Ricordate che potete anche usare il "teorema degli assi paralleli", che recita: $I = I_{CM} + MD^2$, dove il significato dei vari termini dovete saperlo voi!]

I_{CM} = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $m_1r_{CM1}^2+m_2r_{CM}^2+m_3r_{CM3}^2= m_1((x_1-x_{CM})^2+(y_1-y_{CM})^2)+ m_2((x_2-x_{CM})^2+(y_2-y_{CM})^2)+ m_3((x_3-x_{CM})^2+(y_3-y_{CM})^2)= m_1((x_1-0)^2+(y_1+d/3)^2)+ m_2((x_2-0)^2+(y_2+d/3)^2)+ m_3((x_3-0)^2+(y_3+d/3)^2)= (14/3)\ md^2$ = 0.25 Kg m^2 [il risultato si ottiene ovviamente sia applicando il teorema degli assi paralleli che calcolando direttamente il momento di inerzia rispetto al polo passante per il CM; per il teorema, potete verificare il risultato prendendo notando che deve, per esempio, essere: $I_{CM} = I_0 - 3m(x_{CM}^2+y_{CM}^2)$, dato che la distanza tra il polo a cui è riferito I_0 (l'origine) e il CM vale $D = (x_{CM}^2+y_{CM}^2)^{1/2}$ e la massa totale è $M = 3m$]

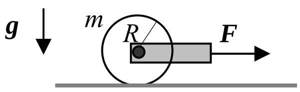
e) Supponete ora che sui tre corpi agiscano rispettivamente le forze (costanti) $\mathbf{F_1} = (-f,0)$, $\mathbf{F_2} = (f, f)$, $\mathbf{F_3} = (f,0)$, con f = 1.8 N. Cosa potete dire del moto del sistema? Quanto valgono l'accelerazione del centro di massa, $\mathbf{a_{CM}}$, e l'accelerazione angolare α per rotazioni attorno al centro di massa?

Commento: ……………………………………. il sistema è sottoposto ad un moto di traslazione, dovuto alla risultante delle forze che agiscono sul CM, e di rotazione, dovuto alla presenza di momenti delle forze.

$\mathbf{a_{CM}}$ = (……, ……) = ……….. m/s^2 $(\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\mathbf{F_3})/(3m) = (f, f)/(3m)$ = (1.0, 1.0) m/s^2 [il CM si muove di moto uniformemente accelerato e traiettoria rettilinea diretta lungo la bisettrice del primo quadrante]

α = …………………………………… ~ ……….. rad/s^2 $(|\tau_1+ \tau_2+\tau_3|)/I_{CM} = -|\tau_2|/I_{CM} = -2df/(3I_{CM}) = -f/(7md) \sim$ - 1.4 rad/s^2 [dalla legge cardinale del moto rotatorio attorno al CM: $\tau = I_{CM}\ \alpha$, dove τ indica la risultante dei momenti delle forze, che è pari al solo momento τ_2 dato che i momenti delle forze sulle masse 1 e 3 si annullano a vicenda per ragioni di simmetria; notate che il segno negativo è stato aggiunto ad hoc per indicare che l'accelerazione tende a far ruotare il sistema in senso orario. Per il calcolo di τ_2 potete usare la regola del prodotto vettoriale $\tau_2 = \mathbf{r_{2CM}} \times \mathbf{F_2}$, stando attenti a scrivere nel modo corretto il vettore posizione della massa 2 rispetto al centro di rotazione, $\mathbf{r_{2CM}} = \mathbf{r_2} + \mathbf{r_{CM}}$, e calcolando il prodotto vettoriale ad esempio tramite la "regola del determinante", consigliata quando si conoscono le componenti dei vettori da "moltiplicare" fra loro; notate che l'evoluzione temporale di questo moto non è facilmente deducibile, poichè il momento cambia con il tempo anche se siete in presenza di forze costanti]

2. Un cilindro omogeneo di massa m = 10 Kg e raggio R = 10 cm è poggiato su un piano orizzontale scabro, caratterizzato da un certo coefficiente di attrito statico μ_S. Il cilindro rotola **senza attrito** attorno ad un mozzo passante per il suo asse geometrico, che è collegato rigidamente ad un giogo (vedi figura); mozzo e giogo hanno massa trascurabile. Il cilindro è inizialmente fermo e, all'istante t_0 = 0, viene applicata al giogo una forza F = 30 N costante e diretta orizzontalmente.



a) Supponendo che il cilindro, sotto l'azione della forza, si muova di moto di **rotolamento puro** (cioè che la sua superficie laterale non strisci sul piano di contatto), quanto vale l'accelerazione a del suo centro di massa? [Fate attenzione a considerare *tutte* le forze che agiscono sul sistema, incluse quelle che provocano la rotazione del cilindro! Se non avete voglia di ricalcolarvelo, ricordate che il momento di inerzia per un cilindro omogeneo di massa m e raggio R in rotazione attorno al suo asse è $I = mR^2/2$]

a = …………………………………… = ... m/s^2 $F/(m+I/R^2) = (2/3)\ F/m = 2.0$ m/s^2 [si ottiene considerando che c'è una forza di attrito **statico** F_A al punto di contatto tra generatrice del cilindro e piano orizzontale; questa forza, che si oppone al moto incipiente di strisciamento, produce un momento delle forze F_AR rispetto al polo di rotazione. Per la legge cardinale del moto di rotazione, si ha $I\alpha = F_AR$. Per la condizione di rotolamento puro, deve essere $\alpha = a/R$, per cui l'equazione del moto traslazionale per il centro di massa si scrive: $ma = F - F_A = F - Ia/R^2$, da cui, risolvendo, esce la soluzione]

b) Quanto vale la velocità angolare di rotazione ω del cilindro all'istante t_1 = 10 s?

ω = …………………………………… = ... rad/s $a\ t_1\ /\ R = (2/3)Ft_1/(mR) = 2.0\times10^1$ rad/s [per ovvia conseguenza di quanto derivato nella soluzione al punto precedente]

c) Quanto vale il lavoro L compiuto dalla forza F dall'istante iniziale all'istante t_1? [Suggerimento: cercate di ragionare in termini di bilancio energetico ...]

L = …………………………………… = ... J $(m/2)v^2 + (I/2)\omega^2 = (m/2)(\omega R)^2 + (mR^2/4)\ \omega^2 = (3/4)(mR^2)\ \omega^2 = 30$ J [per il bilancio energetico, $L = \Delta E_K$; notate che, nell'espressione precedente, v indica la velocità del centro di massa all'istante t_1 , che, per il rotolamento puro, vale $v = \omega R$]

d) Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico μ_S affinché sia possibile il moto di rotolamento puro del cilindro nelle condizioni del problema considerato?

$\mu_S \geq$ …………………………………… $I\alpha\ /\ (mgR) = Ia/(mgR^2) = 0.10$ [viene ricordando che il valore **massimo** della forza di attrito che agisce sulla generatrice del cilindro è $N\mu_S = mg\mu_S$]

3. Un motore di potenza **costante** W mette in rotazione su un piano orizzontale un disco di momento di inerzia I e massa m inizialmente fermo (la rotazione avviene attorno all'asse del disco e ogni forma di attrito può essere **trascurata**). [Non avendo valori numerici, scrivete risposte in termini dei dati letterali del problema!]

a) Sapendo che il motore agisce per un intervallo di tempo Δt, quanto vale la velocità angolare ω raggiunta dal disco?

ω = …………………………………… $(2\ W\ \Delta t\ /I)^{1/2}$ [per il bilancio energetico, notando che il lavoro compiuto dal motore sul disco vale $W\Delta t$]

b) Dopo l'intervallo Δt il motore viene scollegato dall'asse del disco, che quindi rimane in moto **libero** di rotazione rispetto al suo asse. Dato che, come detto, gli attriti sono trascurabili, quanto vale in funzione del tempo t il momento angolare $\boldsymbol{L}(t)$ del disco? [Calcolatelo rispetto al centro del disco, indicatene modulo L e direzione, e state attenti ai trabocchetti!]

$L(t)$ = …………………………………… $I\omega$ [è costante nel moto, dato che si deve conservare l'energia meccanica del disco!]

Direzione: …………………………………… lungo l'asse del disco (il verso dipende dal senso di rotazione, che non ho specificato]

c) Ad un dato istante, un corpo puntiforme di massa m cade dall'alto sul disco, colpendone un punto della sua circonferenza. In seguito all'urto, il corpo rimane conficcato nel disco, cioè l'urto è anelastico. Sapendo che subito prima dell'urto la velocità di caduta (verticale) del corpo puntiforme vale v_0 e che il raggio del disco è R, quanto vale la velocità angolare ω' del disco dopo l'urto? [Ovviamente si intende che il disco continua ad essere vincolato a ruotare attorno al suo asse e rispetto a questo asse dovete calcolare la velocità angolare; anche qui attenzione ai trabocchetti, e a ragionare bene in termini di conservazioni ...]

ω' = …………………………………… $L/(I+mR^2)$ [nell'urto si sviluppano forze interne, che danno un contributo nullo in termini di momenti delle forze; d'altra parte le sole forze esterne che possono agire sul disco passano per il suo asse, e pertanto hanno momento nullo rispetto al polo considerato. Quindi il momento angolare, in particolare la sua componente "verticale", dell'intero sistema deve conservarsi; poiché il moto del corpo prima dell'urto è verticale, il contributo a questa componente del momento angolare del sistema è nullo, e la componente verticale del momento angolare **del sistema** prima dell'urto è solo dovuta al disco, e vale L. Dopo l'urto il momento di inerzia **del sistema** diventa $I' = I+mR^2$ a causa della presenza della massa m sulla circonferenza. Il risultato esce allora dalla conservazione della componente verticale del momento angolare]