Corso di Laurea Ing. EA – "Compito per casa di Fisica" n. 6 - 18/3/2006

Nome e cognome: …………………………………………………………… **Matricola: ……………**

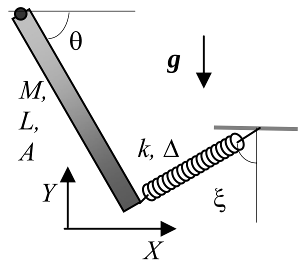
Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un'asta di massa M = 10.0 Kg, lunghezza L = 3.00 m e sezione di area A = 10.0 cm^2, è realizzata con un materiale disomogeneo.

   a) Sapendo che, detta x la distanza da un estremo dell'asta, la densità di massa varia in funzione di x secondo la legge $\rho(x) = \rho_0\, x^2/L^2$, quanto vale il coefficiente ρ_0?
   ρ_0 = …………………………………… = ……….. Kg/m^3 $ML^2/(S\int_0^L x^2 \mathrm{d}x) = 3M/(SL)$ = 1.00x10^4 Kg/m^3 [per definizione di densità di massa, deve essere $M = \int_{VOL} \rho(x)\, \mathrm{d}V = \int_0^L \rho(x)\, S\mathrm{d}x = \int_0^L \rho_0 x^2\, (S/L^2)\, \mathrm{d}x = \rho_0 (S/L^2) \int_0^L x^2\, \mathrm{d}x = \rho_0\, SL/3$, dove l'elemento di volume è stato scritto come $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ coerentemente con la geometria lineare del sistema]

   b) A quale distanza x_{CM} misurata rispetto all'estremo x = 0 dell'asta si trova il suo centro di massa?
   x_{CM} = …………………………………… = ……….. m $(\int_0^L x\ \rho(x)\ S\ \mathrm{d}x)/M = \rho_0\ S\ L^2/(4M) = (3M/(SL))(\,S\,L^2/(4M)\,) = 3L/4$ = 2.25 m

   c) Supponete ora che questa asta possa ruotare **senza attrito** su un piano verticale e attorno ad un perno passante per il suo estremo x = 0. Supponete anche che all'altro estremo dell'asta sia attaccata una molla, di massa trascurabile e costante elastica k = 30.0 N/m e che l'altro estremo della molla sia vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. La figura rappresenta la situazione di equilibrio, che si verifica quando la molla è diretta **ortogonalmente** all'asta, mentre l'asta forma un angolo θ = 60 gradi rispetto all'orizzontale. Quanto vale l'allungamento Δ della molla in queste condizioni? [Usate il valore numerico g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



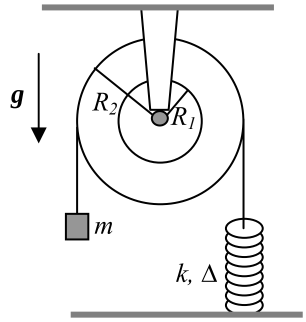
   Δ = …………………………………… = ……….. m $Mg\, x_{CM}\cos\theta\ /\ (kL) = 3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k)$ = 2.45 m [viene dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto al perno di rotazione, notando che le forze che danno un momento non nullo sono la forza peso Mg, applicata al baricentro e quindi con un braccio $x_{CM}\cos\theta$ rispetto al perno, e la forza elastica, di modulo $k\Delta$ e braccio L , essendo diretta ortogonalmente all'asta]

   d) Quanto valgono, in queste condizioni di equilibrio, le componenti "orizzontali" e "verticali", rispettivamente N_X ed N_Y, della reazione vincolare esercitata dal perno sull'asta? [Usate il sistema di riferimento XY indicato in figura e state attenti a esprimere bene le componenti delle forze!]
   N_X = …………………………………… ~ ……….. N $-k\Delta\sin\xi = -k\Delta\sin\theta = -k\sin\theta\ (3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k)) = -\ 3Mg\ \sin\theta\cos\theta\ /\ 4$ ~ - 31.8 N
   N_Y = …………………………………… ~ ……….. N $Mg\ -\ k\Delta\cos\xi = Mg\ -\ k\Delta\cos\theta = Mg\ -k\cos\theta\ (3Mg\ \cos\theta\ /\ (4k)) = Mg(1 - 3\cos^2\theta\ /\ 4)$ ~ 42.9 N [si ottiene dall'equilibrio delle forze agenti sull'asta; per le proiezioni della forza elastica $k\Delta$ lungo le direzioni X ed Y, può fare comodo riferirsi all'angolo ξ di figura e notare che, per la geometria, si ha ξ = θ]

   e) Supponete ora che, ad un dato istante, la molla si spezzi **istantaneamente**: l'asta non è più in equilibrio e comincia a ruotare attorno al perno. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **lineare** a (cioè riferita al moto di traslazione, per intenderci quella che si misura in m/s^2) che possiede l'estremo $x = L$ dell'asta subito all'inizio del suo moto?
   a = …………………………………… ~ ……….. m/s^2 $\alpha L = \tau L/I = Mgx_{CM}\cos\theta L/I = Mg(3L/4)\cos\theta L/(S\rho_0 L^3/5) = 15\ MgL^2\cos\theta\ /\ (12ML^2) = (5/4)g\cos\theta = (5/8)g$ = 6.12 m/s^2 [infatti il moto **di rotazione** dell'asta ha luogo a causa del momento della forza peso, $\tau = Mgx_{CM}\cos\theta$, che non è più bilanciato dalla momento della forza della molla. L'equazione cardinale per le rotazioni dice che $\tau = I\,\alpha$, dove il momento di inerzia (vedi sopra per il calcolo dell'integrale) vale $I = \int \rho_0\ (S/L^2)\ x^2\ x^2\ \mathrm{d}x = \rho_0\ S\ L^3/5$ = ; da qui, tenendo anche conto della risposta al punto a), si ricava il valore di $\alpha = (5/4)g\cos\theta/L$. D'altra parte la geometria del sistema indica che l'accelerazione **lineare** dell'estremo dell'asta è $a = \alpha L$, da cui il risultato]

2. Due dischi omogenei di identico spessore e raggio diverso, R_1 ed $R_2 = 2R_1$, sono montati faccia a faccia, concentrici e solidali l'un l'altro. Due corde inestensibili e di massa trascurabile sono avvolte attorno alle superfici laterali dei due dischi, e le

condizioni sono tali che queste corde non slittano sulle superfici laterali quando il sistema costituito dai due dischi ruota, **senza attrito**, attorno ad un perno passante per l'asse dei due dischi. L'intero sistema dei due dischi è appeso ad un solaio indeformabile, come rappresentato in figura dove si dà una vista frontale del tutto (è la situazione tipica di una "carrucola a doppio raggio"). La corda avvolta attorno al disco di raggio R_1 termina con una massa puntiforme m, mentre la corda avvolta al disco di raggio R_2 è attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k vincolata al pavimento (vedi figura). [Il problema non ha valori numerici, e quindi dovete dare le risposte in funzione dei parametri letterali noti]



a) Sapendo che il disco di raggio R_1 ha momento di inerzia I_1 e supponendo che i dischi siano **omogenei** e fatti **dello stesso materiale**, quanto vale I_2? [Considerate momenti di inerzia per rotazioni rispetto all'asse dei dischi, ricordate che, dal testo del problema, $R_2 = 2R_1$, e notate che la densità di massa è la stessa nei due casi]

I_2 = ... $I_1 R_2^4/R_1^4 = 16\, I_1$ [detta ρ la densità, incognita, e scegliendo al solito l'elemento di volume $dV = 2\pi h r dr$, con h spessore del disco (lo stesso per i due dischi), si ha, per un disco di raggio R generico, $I = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho R^4/4$, da cui la risposta]

b) Quanto vale all'equilibrio l'allungamento Δ della molla?

Δ = ... $mgR_1/(kR_2)= mg/(2k)$ [per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse dei dischi, dovute alla forza peso mg e alla forza elastica $k\Delta$]

c) Immaginate ora di prendere in mano il corpo puntiforme, e di spostarlo dalla sua posizione di equilibrio verso il basso per un tratto $L=2\Delta$ per poi lasciarlo andare con **velocità iniziale nulla**; esso, come vi suggerisce il buon senso, si sposterà verso l'alto. Quanto vale la velocità angolare ω dei dischi quando il corpo ripassa per la posizione di equilibrio (quella determinata al punto precedente)? [Ricordate che il moto avviene con attriti trascurabili!]

ω = ... $((2mgL+k((\Delta+L)^2-\Delta^2))/(mR_1^2+I_1+I_2))^{1/2} = (4mg\Delta + 8k\Delta^2) / (mR_1^2+17I_1) = 4(mg)^2/(k(mR_1^2+17I_1))$ [per la conservazione dell'energia meccanica, somma della cinetica della massa e dei dischi, gravitazionale della massa ed elastica della molla: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = (m/2)v^2+(I_1/2)\omega^2 +(I_2/2)\omega^2 - mgL - (k/2)((\Delta+L)^2-\Delta^2)$; notate che, nell'espressione precedente, v indica la velocità del corpo puntiforme quando passa per l'equilibrio, che, poiché la corda non slitta, vale $v = \omega R_1$]

3. Un cerchione di bicicletta di raggio R = 20 cm e massa M = 0.40 Kg (approssimabile come un sottile guscio cilindrico, cioè, in pratica, come una circonferenza su cui è distribuita omogeneamente la massa) è "appesantito" con un piombino, di massa m = 100 g, attaccato in un punto della circonferenza.

a) Quanto vale il momento di inerzia I_{TOT} del sistema?

I_{TOT} = ... = ... Kg m^2 $(M+m)R^2$ = 2.0×10^{-2} Kg m^2 [per la definizione di momento di inerzia!]

b) Indicate ora con θ l'angolo compreso tra il raggio che unisce il centro del cerchione al piombino e la verticale e supponete che il sistema cerchione+piombino sia poggiato su una superficie piana su cui può muoversi senza strisciare, cioè con un moto di **rotolamento puro.** Quanto vale l'angolo (o gli angoli) θ_0 per cui il sistema si trova in equilibrio? Date anche una spiegazione sintetica della risposta.

θ_0 = ... = ... gradi 0

Spiegazione sintetica della risposta: .... il CM del sistema si troverà lungo il raggio considerato, ad una certa distanza dal centro; la posizione $\theta_0=0$ garantisce momento nullo per la forza peso, essendo nullo il braccio, e quindi equilibrio rotazionale; l'eq. traslazionale del centro di massa è anch'esso garantito grazie alla presenza delle forze di reazione vincolare esercitate dalla superficie di appoggio sul sistema

c) Se il cerchione viene fatto ruotare di un **piccolo** valore θ' rispetto alla posizione di equilibrio, e poi lasciato andare con velocità iniziale nulla, che tipo di moto si determinerà? Commentate:

.... non essendo più $\theta = \theta_0$, il momento delle forze rispetto al centro del cerchione sarà $\tau = (m+M)gr_{CM} \sin\theta'$, dove $r_{CM} = mR/(m+M)$ è la distanza tra il centro del cerchione e la posizione del CM, che, come detto, si trova per simmetria lungo il raggio che punta al piombino; questo momento delle forze determina un'accelerazione angolare α del cerchione. Per $\theta \ll 1$, si ha $\sin\theta \sim \theta$, e, ponendo $\alpha = d^2\theta/dt^2$ e facendo attenzione ai segni, si vede che il moto di rotazione è oscillatorio e periodico; per la condizione di rotolamento puro, questo moto è accompagnato da un moto di traslazione del CM, anch'esso oscillatorio ed ugualmente periodico, essendo $a_{CM} = \alpha R$