Corso di Laurea STC Chim Curr Appl. – “Compito per casa di Fisica” n. 5

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un’asta di massa $M = 10.0$ Kg, lunghezza $L = 3.00$ m e sezione di area $A = 10.0$ cm^2, è realizzata con un materiale disomogeneo.

   a) Sapendo che, detta x la distanza da un estremo dell’asta, la densità di massa varia in funzione di x secondo la legge $\rho(x) = \rho_0\, x^2/L^2$, quanto vale il coefficiente ρ_0?

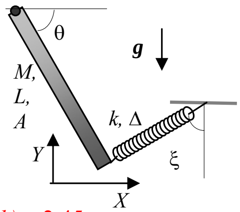
   ρ_0 = …………………………………… = ………… Kg/m^3 $ML^2/(S\int_0^L x^2 dx) = 3M/(SL) = 1.00\mathrm{x}10^4$ Kg/m^3

   [per definizione di densità di massa, deve essere $M = \int_{VOL} \rho(x)\, dV = \int_0^L \rho(x)\, S dx = \int_0^L \rho_0 x^2\, (S/L^2)\, dx = \rho_0 (S/L^2) \int_0^L x^2\, dx = \rho_0\, SL/3$, dove l’elemento di volume è stato scritto come $dV = Sdx$ coerentemente con la geometria lineare del sistema]

   b) A quale distanza x_{CM} misurata rispetto all’estremo $x = 0$ dell’asta si trova il suo centro di massa?

   x_{CM} = …………………………………… = ………… m $(\int_0^L x\, \rho(x)\, S\, dx)/M = \rho_0\, S\, L^2/(4M) = (3M/(SL))(\, S\, L^2/(4M)\,) = 3L/4 = 2.25$ m

   c) Supponete ora che questa asta possa ruotare **senza attrito** su un piano verticale e attorno ad un perno passante per il suo estremo $x = 0$. Supponete anche che all’altro estremo dell’asta sia attaccata una molla, di massa trascurabile e costante elastica $k = 30.0$ N/m e che l’altro estremo della molla sia vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. La figura rappresenta la situazione di equilibrio, che si verifica quando la molla è diretta **ortogonalmente** all’asta, mentre l’asta forma un angolo $\theta = 60$ gradi rispetto all’orizzontale. Quanto vale l’allungamento Δ della molla in queste condizioni? [Usate il valore numerico $g = 9.80$ m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità]



   Δ = …………………………………… = ………… m $Mg\, x_{CM} cos\theta\, /\, (kL) = 3Mg\, cos\theta\, /\, (4k) = 2.45$ m [viene dall’equilibrio dei momenti delle forze rispetto al perno di rotazione, notando che le forze che danno un momento non nullo sono la forza peso Mg, applicata al baricentro e quindi con un braccio $x_{CM}cos\theta$ rispetto al perno, e la forza elastica, di modulo $k\Delta$ e braccio L , essendo diretta ortogonalmente all’asta]

   d) Quanto valgono, in queste condizioni di equilibrio, le componenti “orizzontali” e “verticali”, rispettivamente N_X ed N_Y, della reazione vincolare esercitata dal perno sull’asta? [Usate il sistema di riferimento XY indicato in figura e state attenti a esprimere bene le componenti delle forze!]

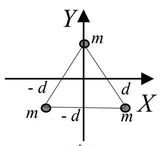
   N_X = …………………………………… ~ ………… N $-k\Delta sin\xi = -k\Delta sin\theta = -\, ksin\theta\, (3Mg\, cos\theta\, /\, (4k)) = -\, 3Mg\, sin\theta cos\theta\, /\, 4 \sim -\, 31.8$ N

   N_Y = …………………………………… ~ ………… N $Mg - k\Delta cos\xi = Mg - k\Delta cos\theta = Mg - kcos\theta\, (3Mg\, cos\theta\, /\, (4k)) = Mg(1 - 3cos^2\theta\, /\, 4) \sim 42.9$ N [si ottiene dall’equilibrio delle forze agenti sull’asta; per le proiezioni della forza elastica $k\Delta$ lungo le direzioni X ed Y, può fare comodo riferirsi all’angolo ξ di figura e notare che, per la geometria, si ha $\xi = \theta$]

   e) Supponete ora che, ad un dato istante, la molla si spezzi **istantaneamente**: l’asta non è più in equilibrio e comincia a ruotare attorno al perno. Quanto vale, in modulo, l’accelerazione **lineare** a (cioè riferita al moto di traslazione, per intenderci quella che si misura in m/s^2) che possiede l’estremo $x = L$ dell’asta subito all’inizio del suo moto?

   a = …………………………………… ~ ………… m/s^2 $\alpha L = \tau L/I = Mgx_{CM}cos\theta L/I = Mg(3L/4)cos\theta L/(S\rho_0 L^3/5) = 15\, MgL^2cos\theta\, /\, (12ML^2) = (5/4)gcos\theta = (5/8)g = 6.12$ m/s^2 [infatti il moto **di rotazione** dell’asta ha luogo a causa del momento della forza peso, $\tau = Mgx_{CM}cos\theta$, che non è più bilanciato dalla momento della forza della molla. L’equazione cardinale per le rotazioni dice che $\tau = I\, \alpha$, dove I il momento di inerzia (vedi sopra per il calcolo dell’integrale) vale $I = \int \rho_0\, (S/L^2)\, x^2\, x^2\, dx = \rho_0\, S\, L^3/5 =$; da qui, tenendo anche conto della risposta al punto a), si ricava il valore di $\alpha = (5/4)gcos\theta/L$. D’altra parte la geometria del sistema indica che l’accelerazione **lineare** dell’estremo dell’asta è $a = \alpha L$, da cui il risultato]

2. Il sistema materiale di figura è costituito da tre corpi puntiformi identici di massa $m = 0.60$ Kg, tenuti insieme da un sistema di aste **rigide di massa trascurabile**. Nel sistema di riferimento indicato in figura, i tre corpi giacciono sul piano $z = 0$ e si trovano rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{r_1} = (-d,-d)$, $\mathbf{r_2} = (0,\, d)$, $\mathbf{r_3} = (d,-d)$, con $d = 30$ cm. [Notate che i tre corpi si trovano ai vertici di un triangolo isoscele “indeformabile”]



   f) Qual è la posizione $\mathbf{r_{CM}} = (x_{CM},\, y_{CM})$ del centro di massa del sistema?

   x_{CM}= …………………………………… = ………… m $(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)/(m_1+m_2+m_3) = 0$ [come si poteva vedere dal fatto che l’asse Y è un asse di simmetria del sistema]

   y_{CM}= …………………………………… = ………… m $(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)/(m_1+m_2+m_3) = -d/3 = -0.10$ m

   g) Quanto vale il momento di inerzia I_0 per una rotazione del sistema attorno all’asse Z?

   I_0 = …………………………………… = ………… Kg m^2 $m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2 = m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)+m_3(x_3^2+y_3^2) = 5md^2 = 0.27$ Kg m^2

h) Quanto vale il momento di inerzia I' per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del corpo 1?

I' = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $m_1r'^2_1+m_2r'^2_2+m_3r'^2_3= m_1((x_1-x_1)^2+(y_1-y_1)^2)+ m_2((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)+ m_3((x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2)= 0 + m_2 5d^2 + m_3 4d^2 = 9md^2$ = 0.49 Kg m^2 [notate che la massa 1 non "contribuisce" al momento di inerzia, dato che la sua distanza dall'asse di rotazione, r'_1, è in questo caso nulla; tuttavia $I'>I_0$ dato che le masse m_2 ed m_3 vengono a trovarsi relativamente distanti dall'asse di rotazione]

i) Quanto vale il momento di inerzia I_{CM} per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del centro di massa? [Ricordate che potete anche usare il "teorema degli assi paralleli", che recita: $I = I_{CM} + MD^2$, dove il significato dei vari termini dovete saperlo voi!]

I_{CM} = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $m_1r_{CM1}^2+m_2r_{CM}^2+m_3r_{CM3}^2= m_1((x_1-x_{CM})^2+(y_1-y_{CM})^2)+ m_2((x_2-x_{CM})^2+(y_2-y_{CM})^2)+ m_3((x_3-x_{CM})^2+(y_3-y_{CM})^2)= m_1((x_1-0)^2+(y_1+d/3)^2)+ m_2((x_2-0)^2+(y_2+d/3)^2)+ m_3((x_3-0)^2+(y_3+d/3)^2)= (14/3)\ md^2$ = 0.25 Kg m^2 [il risultato si ottiene ovviamente sia applicando il teorema degli assi paralleli che calcolando direttamente il momento di inerzia rispetto al polo passante per il CM; per il teorema, potete verificare il risultato prendendo notando che deve, per esempio, essere: $I_{CM} = I_0 - 3m(x_{CM}^2+y_{CM}^2)$, dato che la distanza tra il polo a cui è riferito I_0 (l'origine) e il CM vale $D = (x_{CM}^2+y_{CM}^2)^{1/2}$ e la massa totale è $M = 3m$]

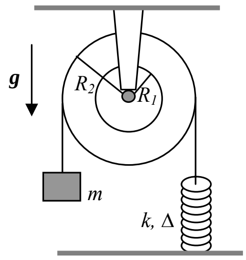
j) Supponete ora che sui tre corpi agiscano rispettivamente le forze (costanti) $\mathbf{F_1} = (-f,0)$, $\mathbf{F_2} = (f, f)$, $\mathbf{F_3} = (f,0)$, con f = 1.8 N. Cosa potete dire del moto del sistema? Quanto valgono l'accelerazione del centro di massa, $\mathbf{a_{CM}}$, e l'accelerazione angolare α per rotazioni attorno al centro di massa?

Commento: .... il sistema è sottoposto ad un moto di traslazione, dovuto alla risultante delle forze che agiscono sul CM, e di rotazione, dovuto alla presenza di momenti delle forze.

$\mathbf{a_{CM}}$ = (……, ……) = ……….. m/s^2 $(\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\mathbf{F_3})/(3m) = (f, f)/(3m)$ = (1.0, 1.0) m/s^2 [il CM si muove di moto uniformemente accelerato e traiettoria rettilinea diretta lungo la bisettrice del primo quadrante]

α = …………………………………… ~ ……….. rad/s^2 $(|\tau_1+ \tau_2+\tau_3|)/I_{CM} = -|\tau_2|/I_{CM} = - 2\ df/(3I_{CM}) = - f/(7md)$ ~ - 1.4 rad/s^2 [dalla legge cardinale del moto rotatorio attorno al CM: $\boldsymbol{\tau} = I_{CM}\ \boldsymbol{\alpha}$, dove $\boldsymbol{\tau}$ indica la risultante dei momenti delle forze, che è pari al solo momento $\boldsymbol{\tau_2}$ dato che i momenti delle forze sulle masse 1 e 3 si annullano a vicenda per ragioni di simmetria; notate che il segno negativo è stato aggiunto ad hoc per indicare che l'accelerazione tende a far ruotare il sistema in senso orario. Per il calcolo di τ_2 potete usare la regola del prodotto vettoriale $\boldsymbol{\tau_2} = \mathbf{r_{2CM}} \times \mathbf{F_2}$, stando attenti a scrivere nel modo corretto il vettore posizione della massa 2 rispetto al centro di rotazione, $\mathbf{r_{2CM}} = \mathbf{r_2} + \mathbf{r_{CM}}$, e calcolando il prodotto vettoriale ad esempio tramite la "regola del determinante", consigliata quando si conoscono le componenti dei vettori da "moltiplicare" fra loro; notate che l'evoluzione temporale di questo moto non è facilmente deducibile, poichè il momento cambia con il tempo anche se siete in presenza di forze costanti]

3. Due dischi omogenei di identico spessore e raggio diverso, R_1 ed $R_2 = 2R_1$, sono montati faccia a faccia, concentrici e solidali l'un l'altro. Due corde inestensibili e di massa trascurabile sono avvolte attorno alle superfici laterali dei due dischi, e le condizioni sono tali che queste corde non slittano sulle superfici laterali quando il sistema costituito dai due dischi ruota, **senza attrito**, attorno ad un perno passante per l'asse dei due dischi. L'intero sistema dei due dischi è appeso ad un solaio indeformabile, come rappresentato in figura dove si dà una vista frontale del tutto (è la situazione tipica di una "carrucola a doppio raggio"). La corda avvolta attorno al disco di raggio R_1 termina con una massa puntiforme m, mentre la corda avvolta al disco di raggio R_2 è attaccata all'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k vincolata al pavimento (vedi figura). [Il problema non ha valori numerici, e quindi dovete dare le risposte in funzione dei parametri letterali noti]



a) Sapendo che il disco di raggio R_1 ha momento di inerzia I_1 e supponendo che i dischi siano **omogenei** e fatti **dello stesso materiale**, quanto vale I_2? [Considerate momenti di inerzia per rotazioni rispetto all'asse dei dischi, ricordate che, dal testo del problema, $R_2 = 2R_1$, e notate che la densità di massa è la stessa nei due casi]

I_2 = …………………………………… $I_1\ R_2^4/R_1^4 = 16\ I_1$ [detta ρ la densità, incognita, e scegliendo al solito l'elemento di volume $dV = 2\pi h r dr$, con h spessore del disco (lo stesso per i due dischi), si ha, per un disco di raggio R generico, $I = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho R^4/4$, da cui la risposta]

b) Quanto vale all'equilibrio l'allungamento Δ della molla?

Δ = …………………………………… $mgR_1/(kR_2)= mg/(2k)$ [per l'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse dei dischi, dovute alla forza peso mg e alla forza elastica $k\Delta$]

c) Immaginate ora di prendere in mano il corpo puntiforme, e di spostarlo dalla sua posizione di equilibrio verso il basso per un tratto $L=2\Delta$ per poi lasciarlo andare con **velocità iniziale nulla**; esso, come vi suggerisce il buon senso, si sposterà verso l'alto. Quanto vale la velocità angolare ω dei dischi quando il corpo ripassa per la posizione di equilibrio (quella determinata al punto precedente)? [Ricordate che il moto avviene con attriti trascurabili!]

ω = …………………………………… $((2mgL+k((\Delta+L)^2-\Delta^2))/(mR_1^2+I_1+I_2))^{1/2} = (4mg\Delta + 8k\Delta^2) / (mR_1^2+17I_1) = 4(mg)^2/(k(mR_1^2+17I_1))$ [per la conservazione dell'energia meccanica, somma della cinetica della massa e dei dischi, gravitazionale della massa ed elastica della molla: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ELA} = (m/2)v^2+(I_1/2)\omega^2 +(I_2/2)\omega^2 - mgL - (k/2)((\Delta+L)^2-\Delta^2)$; notate che, nell'espressione precedente, v indica la velocità del corpo puntiforme quando passa per l'equilibrio, che, poiché la corda non slitta, vale $v = \omega R_1$]