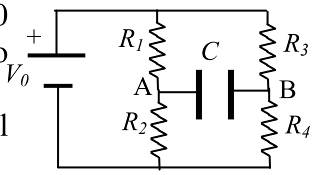
Corso di Laurea STC Chim Curr Appl – "Compito per casa di Fisica" n. 6/06

Nome e cognome: …………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un circuito è costituito da quattro resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 800 ohm, R_4 = 200 ohm) e da un condensatore (C = 100 nF) collegati come rappresentato in figura ad un generatore di differenza di potenziale ideale V_0 = 10.0 V.



a) Quanto vale **in condizioni stazionarie** l'intensità della corrente I erogata dal generatore?

I = …………………………………… = ……….. mA $V_0/R_{TOT} = V_0(1/(R_1+R_2) + 1/(R_3+R_4))$ = 30.0 mA [in condizioni stazionarie la corrente scorre solo attraverso i resistori; la resistenza complessiva R_{TOT} può essere vista come dovuta al parallelo tra la serie delle resistenze R_1 ed R_2 e R_3 ed R_4, da cui la soluzione]

b) Quanto valgono, sempre in condizioni stazionarie, le poenze W_1 e W_4 dissipate per effetto Joule attraverso le resistenze R_1 e R_4?

W_1 = …………………………………… = ……….. W $R_1I_1^2 = R_1(V_0/(R_1+R_2))^2 = 4.00\text{x}10^{-2}$ W

W_2 = …………………………………… = ……….. W $R_2I_2^2 = R_2(V_0/(R_3+R_4))^2 = 2.00\text{x}10^{-2}$ W

[la dissipazione Joule W attraverso una resistenza generica R attraversata da una corrente generica I si esprime $W = V^2/R = RI^2$; la corrente che passa nella resistenza R_1 è quella che passa nella serie R_1+R_2 , cioè vale $V_0/(R_1+R_2)$; per la resistenza R_4 si può ragionare in modo simile, ottenendo i risultati riportati]

c) Quanto vale la differenza di potenziale V_C che, sempre in condizioni stazionarie, si stabilisce ai capi del condensatore? [esprimetela in valore assoluto e ricordate che la differenza di potenziale è la differenza tra il potenziale di due punti diversi del circuito, quelli indicati con A e B in figura]

V_C = …………………………………… = ……….. V $V_0R_2/(R_1+R_2)-V_0R_4/(R_3+R_4)$ = 6.00 V

[il punto A si trova ad un potenziale più alto rispetto alla linea collegata al polo negativo del generatore di un valore $R_2I_2 = R_2V_0/(R_1+R_2)$; rispetto alla stessa linea il punto B si trova invece al potenziale $R_4I_4 = R_4V_0/(R_3+R_4)$]

d) Quanto vale l'energia elettrostatica U_E immagazzinata nel condensatore?

U_E = …………………………………… = ……….. J $CV_C^2/2 = 1.80\text{x}10^{-6}$ J [dalla definizione]

e) Ad un dato istante il generatore viene scollegato dal circuito e il condensatore si "scarica": quanto vale il tempo caratteristico τ di questo processo?

Risultati numerici corretti grazie a Matteo, sett 07

τ = …………………………………… = ……….. s $C/(1/(R_1+R_2) + 1/(R_3+R_4)) = 3.33\text{x}10^{-5}$ s

[per definizione è $\tau = RC$ dove R è la resistenza di scarica, cioè la resistenza vista tra le armature del condensatore; è facile vedere che questa resistenza è il parallelo delle due serie R_1+R_2 e R_3+R_4, da cui il risultato]

2. Una sfera di raggio a porta una densità di carica volumica dipendente solo dalla distanza dal centro r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 r^4/a^4$, con ρ_0 costante opportunamente dimensionata. [Non usate valori numerici nelle risposte di questo esercizio!]

a) Come si esprime la carica complessiva Q portata dalla carica? [Può farvi comodo ricordare che per una variabile generica ξ si ha $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]

Q = …………………………………… $\int_{SFERA} dq = \int_{VOL.\ SFERA} \rho(r)dV = \int_0^a \rho_0 r^4/a^4\ 4\pi r^2\ dr = (4\pi\rho_0/a^4) \int_0^a r^6 dr = 4\pi\rho_0 a^3/7$ [dalla definizione di densità di carica $\rho = dq/dV$; nell'integrale abbiamo sfruttato la simmetria sferica del problema ed usato l'elemento di volume $dV = 4\pi r^2 dr$]

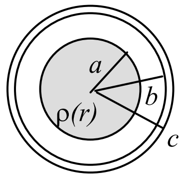
b) Come si esprime la dipendenza del campo elettrico $E_{INT}(R)$ dalla distanza dal centro R all'interno della sfera, cioè per $R<a$? [dovete scrivere la funzione $E_{INT}(R)$; ε_0 è la costante dielettrica del vuoto]

$E_{INT}(R)$ = …………………………………… $Q_{r=R}/(\varepsilon_0 4\pi R^2) = (\int_0^R \rho_0 r^4/a^4\ 4\pi r^2\ dr)/\ (\varepsilon_0 4\pi R^2) = \rho_0 R^5/(7\varepsilon_0 a^4)$ [dal teorema di Gauss applicato ad una superficie sferica concentrica con la sfera data e di raggio **generico** $R < a$; per determinare la carica interna a questa sfera di Gauss, indicata con $Q_{r=R}$, si esegue un'integrazione simile a quella vista alla soluzione del punto precedente, ma limitata all'intervallo $r=0,\ r=R$]

c) Come si esprime il potenziale V_0 a cui si trova il centro della sfera (il punto $R = 0$)? [Fate attenzione al fatto che la sfera non è conduttrice, e dunque la carica presente nel volume non si ridistribuisce come per un conduttore all'equilibrio! Inoltre ricordate che si ha in questo caso potenziale nullo all'infinito]

$V_0 =$ …………………………………… $\int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^\infty E(r)dr = \int_0^a E_{INT}(r)dr + \int_a^\infty E_{EXT}(r)dr = \int_0^a (\rho_0 r^5/(7\varepsilon_0 a^4))\, dr + \int_a^\infty (Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = (\rho_0 a^2/(42\varepsilon_0)) + (Q/4\pi\varepsilon_0 a) = (\rho_0 a^2/\varepsilon_0)(1/42+1/7) = \rho_0 a^2/(6\varepsilon_0)$
[la definizione di differenza di potenziale stabilisce che $\Delta V = - \int_0^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$; si ha poi $\Delta V = V_\infty - V_0$, da cui la soluzione; notate che abbiamo suddiviso il calcolo dell'integrale in due parti, la prima dentro la sfera e la seconda fuori; l'espressione del campo esterno E_{EXT} è, secondo il teorema di Gauss, analoga a quella di una carica puntiforme Q collocata in $r = 0$]

d) Immaginate ora che una sfera analoga a quella considerata sia racchiusa dentro un guscio **conduttore** sferico, concentrico alla sfera e dotato di raggio interno b e raggio esterno c come rappresentato in figura. Come si scrivono le cariche Q_b e Q_c che **all'equilibrio** si trovano sulle superfici interna $(R=b)$ ed esterna $(R=c)$ del guscio? [considerate inizialmente **scarico** il guscio conduttore]



$Q_b =$ …………………………………… $\underline{-Q}$ [applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica "nel guscio", cioè di raggio r generico con $b<r<c$, si ha flusso del campo nullo (essendo nullo il campo all'equilibrio nel conduttore), da cui deve risultare nulla la carica contenuta nella superficie di Gauss; questo comporta la soluzione]

$Q_c =$ …………………………………… $\underline{-Q_b=Q}$ [poiché il guscio è complessivamente scarico, sulla superificie esterna deve trovarsi una carica uguale ed opposta alla carica sulla superficie interna, da cui la soluzione]

e) Se il guscio conduttore di cui alla domanda precedente viene **collegato a terra**, come si scrivono le cariche Q'_b e Q'_c che **all'equilibrio** si trovano sulle superfici interna $(R=b)$ ed esterna $(R=c)$ del guscio? [Sfruttate bene la condizione di collegamento a terra, e ricordate che la terra si trova a potenziale nullo come l'infinito!]

$Q'_b =$ …………………………………… $\underline{Q_b = - Q}$ [la situazione non varia rispetto al caso precedente e tutte le affermazioni fatte nella soluzione del punto precedente restano valide]

$Q'_c =$ …………………………………… $\underline{0}$ [il campo all'esterno del guscio sferico deve essere nullo per garantire differenza di potenziale nulla rispetto all'infinito; applicando Gauss ad una superficie sferica esterna a tutto il sistema si trova che la carica in essa contenuta deve essere nulla. Dato che la carica sulla superficie interna del guscio è uguale e opposta alla carica della sfera di raggio a , questa condizione implica che la carica sulla superficie esterna del guscio sia nulla. Notate che in queste condizioni il guscio non è più scarico, avendo potuto acquisire carica dalla terra]

f) Se lo spazio compreso tra la sfera ed il guscio sferico (cioè il volume per $a<R<b$) viene riempito con un materiale **dielettrico** (polarizzabile) con costante dielettrica relativa ε_R, come si scrive il campo elettrico $\mathbf{E}_{INT,D}(R)$ (per $a<R<b$)? [Tenete presente che in questo caso non è possibile modificare la quantità di carica presente sulla sfera, che è assegnata]

$\mathbf{E}_{INT,D}(R) =$ …………………………………… $\underline{(Q/(4\pi\varepsilon_R\varepsilon_0 R^2))\mathbf{r}}$, con $\mathbf{r}$ versore di direzione radiale

[il materiale dielettrico opera una "schermatura" del campo elettrico per un fattore $1/\varepsilon_R$ a causa della polarizzazione del mezzo, cioè della circostanza che della carica di polarizzazione si viene a formare all'interfaccia tra materiale e sfera; questa carica ha un segno opposto rispetto a Q , da cui la diminuzione ("schermatura") del campo. In queste condizioni il potenziale della sfera diminuisce rispetto al caso in cui il materiale dielettrico non c'è]

3. Uno ione positivo di carica unitaria esegue delle orbite circolari sul piano XY a causa della presenza di un campo magnetico costante ed uniforme diretto lungo l'asse Z e di modulo $B_0 = 1.0\mathrm{x}10^{-2}$ T; la velocità angolare dell'orbita, costante nel tempo, vale $\omega = 1.0\mathrm{x}10^4$ rad/s. [Trascurate ogni effetto della forza peso ed ogni effetto di forze d'attrito nella dinamica dello ione; ricordate che la carica unitaria vale $q = 1.6\mathrm{x}10^{-19}$ C]
   a) Quanto vale la massa m dello ione?
   $m =$ …………………………………… = ……… kg $qvB_0/(\omega^2 R) = q\omega R B_0/(\omega^2 R) = qB_0/\omega = 1.6\mathrm{x}10^{-25}$ kg [la forza di Lorentz $q\mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{B_0}$ fornisce l'accelerazione centripeta $m\omega^2 R$, con R raggio dell'orbita]
   b) Quanto vale il lavoro L fatto dalle forze del campo magnetico quando lo ione percorre un'intera orbita?
   $L =$ …………………………………… = ………… J 0 [forza e spostamento sono ortogonali!]

4. Un filo elettrico in cui circola una corrente costante $I = 1.0$ A ha lunghezza $L = 20$ cm ed è disposto lungo l'asse X; un campo magnetico **uniforme** di modulo $B_0 = 0.10$ T è disposto lungo la bisettrice del I quadrante del piano XY.

Corretto grazie ad Ambra, 2/7/07

   a) Quanto vale la forza magnetica $\mathbf{F}$ che il campo esercita sul filo? [Esprimete modulo, direzione, verso]
   $F =$ …………………………………… = ……… N $ILB_0 sin(\pi/4) = 1.4\mathrm{x}10^{-2}$ N [dalla definizione: $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$, con $d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$; il risultato si ottiene notando che, essendo il campo uniforme, la forza è costante su tutto il segmento]
   Direzione e verso: …………………………………… verso positivo dell'asse Z [dalla regola della mano destra, notando che filo e campo magnetico appartemgono entrambi al piano XY]