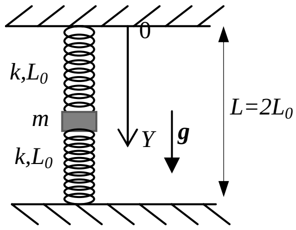
Corso di Laurea CIA – ESAME DI FISICA GENERALE I - 15/6/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**



1. Una massa **puntiforme** m = 0.40 kg è vincolata agli estremi di due molle, identiche fra loro e aventi costante elastica k = 9.8 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm. Gli altri estremi delle due molle sono vincolati rispettivamente a un solaio e a un pavimento rigidi e indeformabili, come rappresentato schematicamente in figura. La distanza tra pavimento e solaio è $L = 2L_0$. Il movimento della massa, che avviene con **attrito trascurabile**, è **solo in direzione verticale**;. [Indicate tale direzione come Y e **usate un asse centrato sul solaio e orientato verso il basso, come in figura**. Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità]

a) Usando l’asse di riferimento Y indicato in figura, quanto vale la posizione di **equilibrio** y_{EQ}? [Ricordate che la massa è **puntiforme**, anche se, per esigenze tipografiche, essa appare in figura come un oggetto dotato di dimensioni non nulle; sfruttate in modo opportuno la semplice geometria del sistema!]

y_{EQ} = …………………………………… = ... m $(L+mg/k)/2 = L_0 + mg/(2k)$ = 0.70 m [all’equilibrio la sommatoria delle forze agenti sulla massa deve essere nulla. Quindi, usando il riferimento indicato: $0 = mg - k\Delta y_1 + k\Delta y_2$, dove Δy_1 e Δy_2 sono le elongazioni o compressioni della molla “superiore” e “inferiore”, rispettivamente. Si ha subito $\Delta y_1 = y - L_0$, mentre $\Delta y_2 = L - y - L_0$, come suggerito dalla geometria (attenti ai segni!). Da qui si ottiene la soluzione]

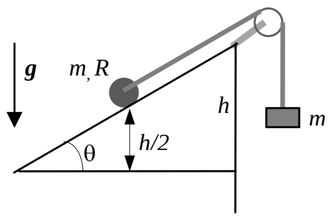
b) Supponete ora che la massa venga spostata, a causa di una forza esterna, nella posizione $y_0 = 3L_0/5$ = 30 cm (fate sempre riferimento all’asse Y di figura) e quindi venga istantaneamente lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla. La massa inizierà un movimento di tipo oscillatorio e, ad un certo istante, passerà per la posizione $y' = L_0$ (a metà strada). Quanto vale la sua velocità v' in questo istante? [Suggerimento: nella posizione y' entrambi le molle hanno lunghezza pari alla propria lunghezza di riposo…]

v' = …………………………………… = ... m/s $((2L_0/m)(4kL_0/25+2mg/5))^{1/2}$ ~ 4.6 m/s [il moto avviene in assenza di forze dissipative e dunque si conserva l’energia meccanica del sistema. Deve quindi essere: $0 = \Delta U_G + \Delta U_{ELA} + \Delta E_K$. La variazione di energia potenziale gravitazionale si scrive $\Delta U_G = mg(y_0 - L_0) = mgL_0(3/5-1) = -2mgL_0/5$ [fate attenzione ai segni! Chiaramente l’energia gravitazionale aumenta nel processo!] mentre la variazione di energia cinetica è $(m/2)v'^2$ [la massa parte con velocità iniziale nulla]. Per la variazione dell’energia elastica, occorre notare che, all’istante considerato, le molle assumono entrambi la loro posizione di riposo. Pertanto è $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(y_0-L_0)^2-(k/2)(L-y_0-L_0)^2 = -(k/2)L_0^2((3/5-1)^2+(1-3/5)^2) = -4kL_0^2/25$. In sostanza si ottiene quindi: $0 = 2mgL_0/5-9kL_0^2/25+(m/2)v'^2$, da cui la soluzione. PER GLI STUDENTI CHE “NON SI ASPETTAVANO” LA CONSERVAZIONE DELL?ENERGIA NELLA PRIMA PARTE: naturalmente è possibile risolvere il quesito anche usando la dinamica, cioè risolvendo l’equazione del moto della massa. A causa della presenza delle due molle, si verifica facilmente che il moto è armonico con pulsazione $\omega = (2k/m)^{1/2}$ [vedi sotto]. Quindi, tenendo conto della posizione di equilibrio, la legge oraira del moto è del tipo: $y(t) = y_{EQ}+A\cos(\omega t + \phi)$, con A e ϕ costanti da determinare sulla base delle condizioni iniziali. La legge oraria della velocità, che formalmente si ottiene derivando rispetto al tempo la legge del moto, cioè è $v(t) = -A\omega \sin(\omega t+\phi)$. La condizione iniziale è: $y(t=0) = y_0$ e $v(t=0) = 0$. Dalla seconda si ottiene subito $\phi = 0$, mentre la prima fornisce: $y_0 = y_{EQ} + A$, da cui $A = y_0 - y_{EQ}$ Quindi la legge oraria risulta: $y(t) = (y_0-y_{EQ})\cos(\omega t)+y_{EQ}$. A questo punto occorre determinare l’istante t' in cui la massa passa per il punto $y' = L_0$ e quindi sostituire tale valore nella legge oraria della velocità per determinare v'. Come vedete, anche se certamente possibile, questa strada è più+ laboriosa di quella che sfrutta la conservazione dell’energia]

c) Quanto vale la pulsazione ω del moto oscillatorio della massa? [Considerate che essa compia effettivamente un moto oscillatorio attorno alla sua posizione di equilibrio dopo essere stata lasciata andare come nella domanda precedente e ricordate che ci sono **due** molle!]

ω = …………………………………… = ... rad/s $(2k/m)^{1/2}$ = 7.0 rad/s   [riprendendo quanto affermato nella risposta al quesito a), si ha che l’equazione del moto della massa si può scrivere, rispetto all’asse Y di figura: $a = g - (2k/m)y - L_0$. La soluzione di questa equazione differenziale rappresenta un moto armonico con pulsazione $\omega = (2k/m)^{1/2}$ da cui la soluzione. Notate che, in realtà, il moto non è periodico, dato che nel suo moto di discesa la massa urta contro il pavimento, ma questo è irrilevante considerato il testo dell’esercizio]

-- **PARTE 2**



2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa m = 1.0 kg e raggio R = 10 cm **rotola senza strisciare** su un piano inclinato di altezza h = 5.0 m che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all’orizzontale. Un giogo di massa trascurabile è collegato all’asse del cilindro in modo tale che questo possa ruotare con attrito trascurabile attorno al suo asse geometrico; al giogo è attaccata una fune inestensibile e di massa trascurabile che, dopo essere passata per la gola di una puleggia di **massa trascurabile** che può ruotare con attrito trascurabile, termina con una massa m = 1.0 kg. Nel suo tratto dal cilindro alla puleggia, la fune è parallela al piano inclinato; la figura rappresenta una visione schematica del sistema. Come già affermato, il cilindro si muove di **rotolamento puro** (il piano presenta un coefficiente di attrito sufficiente perché questo si verifichi), mentre la massa si muove in direzione verticale. La puleggia, avendo massa trascurabile, non partecipa alla dinamica del sistema. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità; ricordate che $\sin(\pi/6)$ = ½ e $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7; trascurate ogni forma di attrito eccetto quello necessario al rotolamento puro]

a) Inizialmente il cilindro è mantenuto “a metà strada” lungo il piano inclinato da una forza esterna (“a metà strada” significa che il punto più basso del cilindro si trova ad altezza $h' = h/2$ rispetto all’orizzontale). Ad un certo istante questa forza viene rimossa istantaneamente, senza fornire alcuna velocità al cilindro. Discutete per bene in brutta se il sistema cilindro+massa rimane fermo o si muove, e specificate in che verso si ha (l’eventuale) movimento. Inoltre, nel caso ci sia movimento, quanto vale, in modulo, la forza di attrito statico F_A tra cilindro e piano? [Ricordate che il moto del cilindro è di rotolamento puro, cioè esso rotola e trasla, e con esso si muove anche la massa m!]

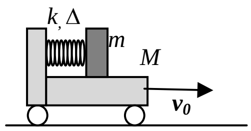
Discussione: ………………………… quando il cilindro si muove (di moto traslatorio del centro di massa e di rotazione attorno al centro di massa) si muove anche la massa (ovviamente di moto traslatorio verticale). Si hanno dunque tre equazioni del moto per a_{CM}, α, a (rispettivamente accelerazione del centro di massa, accelerazione angolare del cilindro, accelerazione della massa). Visto che la fune è inestensibile, è $a_{CM} = a$ e, a causa del rotolamento puro, $\alpha = a/R$. Sulla massa agisce la forza peso $m\boldsymbol{g}$ (verso il basso) e la tensione della fune $\boldsymbol{T}$ (verso l’alto): scegliendo come positiva la direzione verticale verso il basso, si ha quindi $a = a_{CM} = g - T/m$. Sul cilindro agiscono la forza peso $m\boldsymbol{g}$, la reazione del piano $\boldsymbol{N}$ (ortogonale al piano), la tensione $\boldsymbol{T}$ della fune (diretta parallelamente al piano, verso l’alto) e la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ (anch’essa diretta parallelamente al piano e di verso opposto a quello del moto incipiente del cilindro). Prendendo la direzione del piano, che è quella lungo la quale può avvenire il moto, e scegliendo come positivo il verso diretto verso l’alto (in accordo con la scelta dei segni fatta prima per il moto della massa m, infatti se il cilindro sale la massa scende), si ha $a_{CM} = T/m - g\sin\theta \pm F_A/m$, dove il segno davanti alla forza di attrito è negativo se il cilindro scende e positivo se sale. Notate che la tensione T della fune è la stessa ai suoi due estremi, dato che la puleggia ha massa trascurabile. Infine per il moto di rotazione si ha $\alpha = a_{CM}/R = F_A R/I = 2F_A/(mR)$, avendo notato che la forza di attrito è l’unica ad avere momento non nullo rispetto all’asse del cilindro e che il momento di inerzia vale $I = mR^2/2$, essendo il cilindro omogeneo. Verifichiamo prima di tutto se c’è movimento. In condizioni di equilibrio la forza di attrito sarebbe ovviamente nulla (si ha attrito solo se c’è movimento incipiente) e quindi per l’equilibrio dovrebbe essere $T = mg\sin\theta$. D’altra parte dovrebbe anche essere $T = mg$ per garantire l’equilibrio della massa. Dunque l’equilibrio non c’è. Per studiare il movimento occorre risolvere il sistema delle tre equazioni sopra scritte (che hanno tre incognite, a_{CM}, T, F_A). Si ottiene $a_{CM} = 2g(1-\sin\theta)/5 = g/5 > 0$. Dunque il cilindro si muove verso l’alto

F_A = …………………………………… = ………… N $mg/10$ = 0.98 N   [dalla soluzione del quesito precedente si ha $F_A = ma_{CM}/2$, da cui, tenendo conto di quanto già trovato, la soluzione]

b) Quanto vale la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro nell’istante in cui questo raggiunge la sommità , o la base (a seconda che esso si muova verso l’alto o verso il basso), del piano inclinato?

v_{CM} = …………………………………… ~ ………… m/s $(2gh(1/\sin\theta - 1)/5)^{1/2} = (4gh/5)^{1/2}$ ~ 6.3 m/s   [la forza di attrito F_a non compie lavoro e, supponendo come ragionevole che gli altri attriti siano trascurabili, si conserva l’energia meccanica. Dalla soluzione del quesito precedente sappiamo che il cilindro si muove verso l'alto; quando esso raggiunge la sommità del cilindro la sua energia potenziale gravitazionale varia della quantità $\Delta U_{G1} = mgh/2$. Contemporaneamente la massa scende per un tratto pari a $h/\sin\theta$, e la sua energia potenziale gravitazionale varia della quantità $\Delta U_{G2} = -mgh/\sin\theta$. Inoltre la variazione di energia cinetica si scrive $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2 + (m/2)v^2$. Notando che, per il rotolamento puro, $\omega = v_{CM}/R$ e che $v = v_{CM}$ (essendo la fune inestensibile la massa si muove alla stessa velocità del centro i massa del cilindro), e usando $I = mR^2/2$, si ha $\Delta E_K = (m/2)v_{CM}^2(1+1+1/2) = 5mv_{CM}^2/2$. Infine, imponendo la conservazione dell'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_{G1}+\Delta U_{G2}$, si ottiene la soluzione]

3. Una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 1.0\text{x}10^3$ N/m è montata su un carrellino di massa M = 1.1 kg che può scorrere con attrito trascurabile lungo un binario orizzontale. Inizialmente la molla si trova compressa per un tratto **incognito** Δ a causa di un filo che ne collega gli estremi e un proiettile di massa $m = M/10$ = 0.11 kg si trova appoggiato ad un estremo della molla (l'altro estremo è solidale ad una sponda, rigida, del carrellino), come rappresentato in figura. In queste condizioni iniziali, **l'intero sistema** (carrellino+proiettile) si muove con velocità $\mathbf{v}_0$ di modulo 1.0 m/s e direzione orizzontale. Ad un dato istante, il filo viene tagliato e il proiettile viene "sparato" via. In seguito a questo evento, si osserva che il carrellino rallento **fino a fermarsi** completamente. [Trascurate completamente gli attriti sul moto e trascurate gli effetti della **forza peso** sul moto del proiettile, che quindi avviene in direzione orizzontale]



a) Quanto vale la velocità v del proiettile nell'istante in cui il carrello si ferma? [Considerate bene le grandezze che si conservano nel processo!]
v = ……………………………………= ……… m/s $(M+m)v_0/m = 11\ v_0$ = 11 m/s [il sistema è isolato lungo l'asse orizzontale, per cui in questa direzione si ha $(m+M)v_0 = mv$; potendo trascurare il moto del proiettile in direzione verticale, affermazione conseguente alla circostanza che forza peso e attriti sono trascurabili, si ha che questa è la velocità chiesta nella domanda]

b) Quanto vale la compressione iniziale Δ della molla? [Notate che, quando il carrello si ferma, la molla si trova alla sua lunghezza di riposo]
Δ = ……………………………………~ ……… m $(((M/m)(M+m)v_0^2)/k)^{1/2}$ = $11\text{x}10^{-2}$ m [non essendoci forze dissipative, nel processo si conserva l'energia meccanica. Pertanto si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$ dove $\Delta E_K = (m/2)v^2 - (M+m)v_0^2/2 = (M/m)(M+m)v_0^2/2$. La variazione di energia, potendosi trascurare ogni effetto legato alla forza peso, è dovuta alla sola energai elastica : $\Delta U = -(k/2)\Delta^2$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 15/6//2009 Firma: