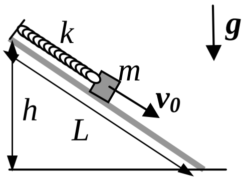
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 1/6/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

-- **PARTE 1**

1. Una cassa di massa m = 100 Kg, che considererete come un **corpo puntiforme**, si trova **ferma** al punto di mezzo di un piano inclinato di lunghezza L = 10 m ed altezza h = 5.0 m (vedi figura). La cassa è attaccata alla sommità del piano inclinato tramite una corda elastica, che si comporta come una molla di costante elastica k = 200 N/m. Il piano inclinato ha una superficie scabra, ed esercita un attrito **statico** sulla cassa con un certo coefficiente μ_S. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Sapendo che la posizione rappresentata in figura è di **equilibrio** e che la corda elastica si trova alla sua lunghezza di riposo, quanto vale il coefficiente di attrito μ_S? [Indicate il valore minimo di questo coefficiente che permette la situazione fisica considerata]

μ_S = …………………………………… ~ ……….. $mg\sin\theta/(mg\cos\theta) = tg\theta = h/(L^2-h^2)^{1/2} \sim 0.58$ $(mg(h/L) - k\,\Delta)/(mg(1-h^2/L^2)^{1/2}) \sim 0.11$ [viene dall'equilibrio delle forze lungo la direzione del piano inclinato, ponendo $F_A = N\mu_S = mg\cos\theta\mu_S = mg\sin\theta$; l'angolo del piano inclinato si trova con semplici considerazioni di trigonometria]

b) All'istante t=0 alla cassa viene fornita una certa velocità $\boldsymbol{v_0}$, diretta lungo il piano inclinato ed orientata verso la base di questo (vedi figura); si osserva che, sotto l'effetto di questa velocità, la cassa si muove fino a raggiungere la base del piano inclinato, dove arriva con velocità nulla. Sapendo che il coefficiente di attrito **dinamico** è $\mu_D = \mu_S/2$, quanto vale, in modulo, la velocità v_0?

v_0 = …………………………………… ~ ……….. m/s $(2g\mu_D \cos\theta\,(L/2) + 2(k/(2m))(L/2)^2 - 2g(h/2))^{1/2} = (g\mu_S \cos\theta\,(L/2) + (k/m)(L/2)^2 - gh))^{1/2} = (g \sin\theta\,(L/2) + (k/m)(L/2)^2 - gh))^{1/2} = (-gh/2 + (k/m)(L/2)^2))^{1/2} \sim 5.0$ m/s [viene dal bilancio energetico, $L_A = -F_A\,(L/2) = -mg\cos\theta\mu_D = \Delta U_G + \Delta U_{ELA} + \Delta E_K = -mg(h/2) + (k/2)(L/2)^2 - (m/2)v_0^2$]

c) Dopo aver raggiunto la base del piano inclinato, cosa farà la cassa?

□ Resta ferma   ✗□ Risale lungo il piano inclinato   □ Non si può dire

Spiegazione sintetica della risposta: …………………………………… esaminando le forze nella direzione del piano inclinato, si vede che la forza verso l'alto (dovuta alla corda) vale $k(L/2)$, quella verso il basso (dovuta alla gravità) vale $mg\sin\theta$; la forza elastica prevale sulla somma dei moduli della forza peso e dell'attrito, che vale $mg\cos\theta\mu_S$

2. Il pianeta Kryptonite ha una forma **sferica** di raggio a = 1.0x10^3 Km, ed è costituito da materiale la cui densità di massa ρ_M è non uniforme, e varia con la distanza r dal centro secondo la legge $\rho_M=\rho_0\, r/a$, con ρ_0 = 1.0x10^4 Kg/m^3.

a) Quanto vale la massa M del pianeta? [Considerate bene il fatto che si tratta di una distribuzione di massa **non omogenea**; può farvi comodo ricordare che, per una variabile ξ generica, si ha $\int\xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; se proprio non riuscite a risolvere questo punto, provate a passare al successivo lasciando indicata la massa M]

M = …………………………………… = ……… Kg $\int_{SFERA} \rho_M\, dV = \int_0^a \rho_0\, (r/a)\, 4\pi\, r^2dr = 4\pi(\rho_0/a) \int_0^a r^3dr = 4\pi(\rho_0/a)\, a^4/4 = \pi\rho_0\, a^3 = 3.1\text{x}10^{22}$ Kg [dalla definizione di $\rho_M = dM/dV$; per eseguire l'integrale abbiamo idealmente suddiviso la sfera in tanti gusci concentrici di volume infinitesimo $dV = 4\pi\, r^2dr$ in modo da rendere l'integrale di volume un integrale in dr]

b) Supponete ora che il pianeta abbia un satellite (da considerare come puntiforme) di massa m = 1.0x10^7 Kg, che compie un'orbita **circolare** di raggio R attorno al pianeta. Sapendo che per compiere un'orbita completa il satellite impiega un tempo T = 6.3x10^5 s, quanto vale il raggio R? [Usate il valore G = 6.7x10^{-11} N m^2/Kg^2 per la costante di gravitazione universale]

R = …………………………………… ~ ……….. m $(GMT^2/(2\pi^2))^{1/3} \sim 2.7\text{x}10^7$ m [viene uguagliando la forza di attrazione gravitazionale, GMm/R^2 , con la forza centripeta, $mR\omega^2 = mR(2\pi/T)^2$]

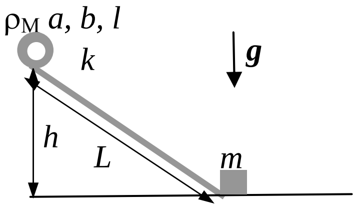
3. Avete un cilindro cavo, di lunghezza l = 1.0 m, raggio interno a = 10 cm, raggio esterno b = 20 cm, fatto di un materiale con densità di massa **uniforme** $\rho_M = 5.0\times10^3$ Kg/m^3. [Si intende che il materiale si trova nella zona compresa tra $r = a$ ed $r = b$, r essendo la distanza dall'asse del cilindro, ovvero il raggio]

a) Quanto valgono la massa M ed il momento di inerzia I del cilindro cavo per rotazioni attorno al suo asse? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile ξ generica, si ha $\int\xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; se proprio non riuscite a determinare I, provate a passare ai punti successivi lasciando indicato il momento di inerzia I]

M = ……………………………………… = ………. Kg $\rho_M V = \rho_M \pi\, l\, (b^2- a^2) = 4.7\times10^2$ Kg [essendo $V = \pi(b^2-a^2)$ il volume riempito **uniformemente** di materiale]

I = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $\int_{CILINDRO}\rho_M\, r^2\, dV = \int_a^b\rho_M\, r^2\, 2\pi r l dr = 2\pi\, l\, \rho_M \int_a^b r^3\, dr = 2\,\pi\, l\, \rho_M(b^4- a^4)/4 = (M/2)(b^2+a^2) \sim 12$ Kg m^2 [per il calcolo dell'integrale di volume si suddivide il cilindro in tanti gusci cilindrici concentrici di volume infinitesimo $dV = 2\pi r l dr$]

b) Questo cilindro cavo viene posto sulla sommità di un piano inclinato, di lunghezza L = 10 m ed altezza h = 5.0 m (vedi figura), e lasciato andare con velocità iniziale nulla. La superficie del piano inclinato è scabra, e presenta un coefficiente di attrito tale da indurre un moto di **rotolamento puro** (cioè senza slittamenti) per il cilindro cavo. Quanto vale, in modulo, la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro cavo quando questo raggiunge la base del piano inclinato? [Notate che il disegno, che mostra una visione laterale del sistema, non è in scala, essendo i raggi del cilindro molto più piccoli della lunghezza ed altezza del piano inclinato]

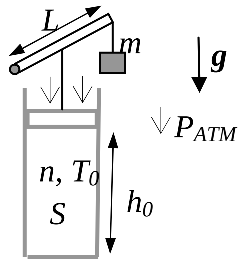


v_{CM} = ………………………………… ~ ……….. m/s $(2Mgh/(M+I/b^2))^{1/2} = (4gh/(3+a^2/b^2))^{1/2} \sim 7.8$ m/s [dal bilancio energetico $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = -Mgh + (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 = -Mgh + (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)(v_{CM}/b)^2$, dove abbiamo espresso la velocità angolare di rotazione del cilindro in funzione di quella lineare del centro di massa sfruttando la condizione geometrica di puro rotolamento: $\omega = v_{CM}/b$; la soluzione viene sostituendo le espressioni di M ed I trovate sopra]

c) Una volta arrivato alla base del piano inclinato, il cilindro cavo urta contro una cassa di massa m = 400 Kg, inizialmente ferma alla base del piano (vedi figura). Sapendo che, in seguito all'urto, il cilindro si ferma (mentre la cassa acquista una certa velocità), quanto vale l'energia E dissipata nel processo (che evidentemente è non elastico)? [Considerate l'urto come se avvenisse tra **corpi puntiformi**!]

E = …………………………………… ~ …….... J $(m/2)v'^2-(M/2)v_{CM}^2-(I/2)(v_{CM}^2/b^2) = (m/2)((M/m)^2v_{CM}^2)-((M/2)+(M/4)(1+(a/b)^2)\,v_{CM}^2 \sim 5.2\times10^3$ J [abbiamo espresso la velocità della cassa dopo l'urto usando la conservazione della quantità di moto: $v' = (M/m)v_{CM}$; il resto della soluzione coinvolge solo qualche passaggio algebrico]

4. Un contenitore cilindrico di sezione S = 8.3 cm^2, contiene una quantità $n = 1.0\times10^{-2}$ moli di gas perfetto monoatomico ed è dotato di un tappo scorrevole in direzione verticale che è collegato meccanicamente, come in figura, con un'asta di lunghezza L = 20 cm libera di ruotare attorno ad un suo estremo. Il collegamento è realizzato a metà dell'asta, ed è progettato in modo tale che il tratto di collegamento resti **sempre in direzione verticale** qualsiasi sia l'inclinazione θ dell'asta rispetto all'orizzontale. Tappo, asta e collegamento meccanico hanno **massa trascurabile,** e trascurabili sono anche gli attriti nello scorrimento del tappo e nella rotazione dell'asta.



a) Sapendo che il sistema è in **equilibrio** quando il tappo si trova ad altezza h_0 = 10 cm rispetto al fondo del cilindro ed una massa m = 8.3 Kg è applicata all'estremità dell'asta, come in figura, quanto vale la temperatura T_0 del gas? [Usate i valori R = 8.3 J/(K mole) e g = 9.8 m/s^2 per la costante dei gas perfetti e l'accelerazione di gravità, rispettivamente, e tenete conto della **pressione atmosferica** che agisce sul tappo, di valore P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa]

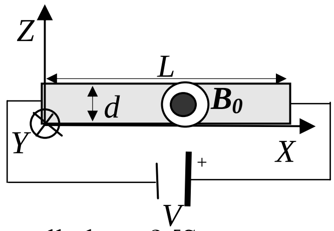
T_0 = ……………………………………= ……… K $PV/(nR)=(P_{ATM}+2mg/S)(Sh_0)/(nR)=120$ K [notate il fattore 2 a moltiplicare il termine mg/S, dovuto al fatto che ci deve essere equilibrio tra i momenti delle forze che agiscono sull'asta rispetto al perno di rotazione ; questo equilibrio implica $mgL=(P-P_{ATM})SL/2$]

b) A questo punto, immaginate che il contenitore venga messo a contatto con una sorgente di calore (un corpo di grande capacità termica); il gas subisce di conseguenza una certa trasformazione termodinamica (**non necessariamente reversibile**). Sapendo che al termine di questo processo la sorgente ha **assorbito dal gas** una quantità di calore Q = 8.3 J e che la massa m si è **abbassata** di un tratto Δ = 5.0 cm, quanto vale la temperatura T_1 del gas al termine del processo? [Suggerimento: ricordate che non conoscete la legge della trasformazione, né potete basarvi sul calcolo del volume occupato dal gas; può esservi utile ricordare il valore del calori specifico molare a volume costante per un gas perfetto monoatomico: $c_V = (3/2)R$]

T_1 = ………………………………… = ... K $T_0+(L_P - Q)/(nc_V) = T_0 + (mg\Delta-Q)/((3/2)nR) = 86$ K [dal primo principio: $Q_{GAS} = -Q = L_{GAS}+ \Delta U_{GAS} = -L_{PESO}+nc_V(T_1-T_0) = -mg\Delta + nc_V(T_1-T_0)$; fate attenzione ai segni, e notate che il risultato è leggermente diverso da quello che si ottiene ponendo $nc_P(T_1\text{-}T_0) = -Q$, che mostra come la trasformazione considerate non può essere considerata isobara reversibile]

-- **PARTE 3**

5. Una lastra di base **quadrata**, con lato di lunghezza L = 50 cm e spessore d = 5.0 cm, è fatta di materiale conduttore, di resistività elettrica ρ_R = 1.0x10^{-2} ohm m, ed è poggiata sul piano XY di un dato sistema di riferimento (un vertice coincide con l'origine, come in figura, dove la lastra è rappresentata in sezione). Due facce della lastra sono collegate, come in figura, ad un generatore ideale di differenza di potenziale V = 10 V. [Rispondete alle domande supponendo che il sistema abbia raggiunto condizioni stazionarie e trascurate ogni effetto della gravità]



a) Quanto vale la potenza P che il generatore fornisce per far circolare una corrente nella lastra? [Supponete che la corrente fluisca uniformemente all'interno della lastra]

P = …………………………………… = …….. W V^2d/ρ_R = 5.0x10^2 W [la resistenza della lastra è $R = \rho_R L/(dL)$ e la potenza vale V^2/R]

b) Supponete ora che la lastra sia interessata da un campo magnetico uniforme di modulo B_0 = 1.0x10^{-3} T diretto lungo il verso negativo dell'asse Y, come indicato in figura. Sapendo che la densità dei portatori di carica (sia positivi che negativi) che costituiscono la corrente è n = 1.0x10^{20} m^{-3}, quanto vale e che direzione ha la forza di origine magnetica $\boldsymbol{F_M}$ che agisce su un **singolo** elettrone che appartiene alla corrente? [Usate il valore e = -1.6x10^{-19} C per la carica dell'elettrone]

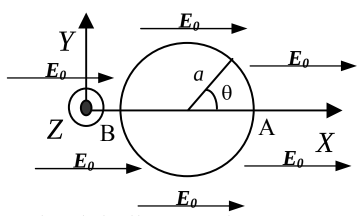
Direzione e verso: ……………………………… direzione dell'asse Z, verso positivo [si ottiene applicando la regola della mano destra alla forza di Lorentz, $\boldsymbol{F_M} = q\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B_0}$, tenendo in debito conto il segno negativo della carica elettronica e la velocità, cehà diretta verso il polo positivo]

F_M = ………………………………… = …….. N $eB_0v = eB_0j/(ne) = eB_0I/(neLd) = eB_0V/(RneLd) = eB_0V/(\rho_R\, neL) = B_0V/(\rho_R nL)$ =2.0x10^{-20} N [per esprimere la velocità dei portatori di carica, diretta lungo X, abbiamo usato la relazione $j = nev$, e notato che $j=I/(Ld)=V/(RLd)$]

c) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta\phi = \phi(z=d) - \phi(z=0)$ tra le facce superiore ed inferiore della lastra? [Suggerimento: ricordate il legame tra forza e campo elettrico e notate che la forza è omogenea all'interno della lastra!]

$\Delta\phi$ = …………………………………… $(F_M/e)d$ = - 6.2x10^{-3} V [la forza $\boldsymbol{F_M}$ agisce sugli elettroni come se si trattasse di un campo elettrico, statico ed omogeneo, di modulo $F_M/|e|$ e direzione negativa dell'asse Z; quindi, ricordando la definizione di differenza di potenziale, si trova il risultato. Notate che questo risultato ha una notevole valenza applicativa, ed ha un nome specifico, quello di "effetto Hall"]

6. Un disco di materiale conduttore globalmente scarico, di raggio a e spessore s, è disposto con il suo asse parallelo all'asse Y di un sistema di riferimento. Al di fuori del disco, è presente un campo elettrico esterno (cioè generato in qualche modo!) $\boldsymbol{E_0}$ **uniforme** diretto lungo l'asse X dello stesso sistema. [Attenzione: in questo esercizio non dovete dare risposte numeriche, ma esprimere i risultati in funzione dei dati noti]



a) Detto θ l'angolo compreso tra l'asse X ed un punto sulla superficie laterale del disco, misurato come indicato in figura, come si scrive la densità superficiale di carica $\sigma(\theta)$ che si viene a trovare, all'equilibrio, sulla superficie **laterale** del disco? [Indicate con ε_0 la costante dielettrica del vuoto]

$\sigma(\theta)$ = …………………………………… Pasticci con ε_0 corretti grazie a Silvia, 6/6/07 $E_0 \cos\theta\, \varepsilon_0$ [si ottiene applicando il teorema di Gauss ad un piccolo cilindro di altezza infinitesima costruito in modo da avere il suo asse parallelo alla direzione radiale e con le facce una dentro ed una fuori del disco; poiché il campo interno al disco è nullo, essendo il disco in condizioni di equilibrio, e poiché l'altezza infinitesima del cilindretto implica un flusso nullo attraverso la sua superficie laterale, si ottiene il risultato]

b) Quanto vale la differenza di potenziale V fra i punti A e B indicati in figura?

V = ………………………………… 0 [i due punti possono essere congiunti da un percorso interamente all'interno del disco, dove il campo è nullo, per cui la differenza di potenziale deve essere nulla!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 1/6/2006 Firma: