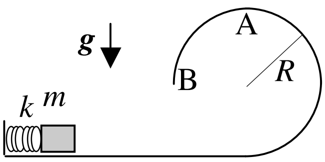
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 23/6/2006

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**

1) Un giochino per bambini è costituito da una guida su cui scorre, con **attrito trascurabile**, una slitta di massa m = 100 g (da considerare come corpo puntiforme). La guida ha la forma rappresentata in sezione nella figura: dopo un tratto piano orizzontale, essa prosegue con un arco di circonferenza di raggio R = 9.8 cm ed estensione angolare $3\pi/2$ (cioè ¾ di circonferenza, come in figura). La slitta è messa in movimento da un "cannoncino a molla" (tipo flipper) che ha una costante elastica k = 50 N/m: la molla viene preventivamente compressa con la slitta a contatto con una sua estremità (l'altra estremità è fissa, come in figura), e quindi viene rilasciata mettendo in movimento la slitta. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità, diretta verso il basso come in figura]



   a. Quanto vale la compressione minima Δ_{MIN} da fornire alla molla affinché la slitta possa percorrere per intero l'arco di circonferenza (senza "staccarsi dalla guida")?
   Δ_{MIN} = ……………………………. = ……… m $(5mgR/k)^{1/2}$ = 9.8x10^{-2} m [nel punto più alto dell'arco deve essere $mv_{TOP}^2/R = mg$; d'altra parte la velocità con cui la slitta arriva all'arco deve essere, per conservazione dell'energia, $v_0^2=v_{TOP}^2+2g(2R)$ e deve anche essere $mv_0^2/2=k\Delta_{MIN}^2/2$, da cui la soluzione]

   b. Se la slitta viene fatta partire comprimendo la molla per un tratto $\Delta' = 2\Delta_{MIN}$, quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N esercitata dalla guida sulla slitta quando questa si trova sul punto più alto dell'arco di circonferenza (punto A in figura)?
   N = ……………………………. = ……… N $15mg$ = 15 N [per la conservazione dell'energia meccanica, ed usando la simbologia della risposta precedente, deve essere $N = mv'^2_{TOP}/R - mg = m(v'^2_0 - 2g(2R))/R - mg = m(k\Delta'^2/m - 4gR)/R - mg = k\Delta'^2/R - 5mg$]

   c. Nelle condizioni di cui al quesito b, quanto vale, in modulo, la velocità v con cui la slitta lascia la guida (cioè la velocità che essa ha al punto B in figura)?
   v = ……………………………. ~ ……… m/s $(k\Delta'^2/m - 2gR)^{1/2} = (18gR)^{1/2}$ ~ 4.2 m/s [ancora per la conservazione dell'energia meccanica: $k\Delta'^2/2 = mv^2/2 + mgR$]

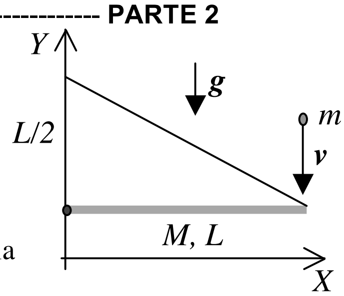
2) Una particella che porta una carica elettrica q = 1.0x10^{-15} C e una massa m = 2.0x10^{-22} Kg viene prodotta all'istante t = 0 all'interno di un condensatore ad armature piane parallele in prossimità dell'armatura collegata al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale V = 40 V. Supponete che la velocità iniziale della carica sia nulla, che la distanza tra le armature sia d = 1.0 mm e che gli **effetti della gravità siano trascurabili**.

   a. Quanto vale la velocità v con cui la carica raggiunge l'armatura "negativa"? [Per questa domanda considerate trascurabile ogni forma di attrito]
   v = ……………………………. = ……… m/s $(2qV/m)^{1/2}$ = 2.0x10^4 m/s [per la conservazione dell'energia meccanica (e la definizione di differenza di potenziale)!]

   b. Supponendo ora che lo spazio tra le armature sia riempito di un liquido (dielettrico) che produce un **attrito viscoso** rispetto al moto della particella con un coefficiente di attrito β = 1.0x10^{-14} N s/m, quanto vale la velocità v' con cui la carica raggiunge l'armatura "negativa"? [Supponete che la velocità della particella abbia raggiunto il suo "valore asintotico"]
   v' = ……………………………. = ……… m/s $qV/(d\beta)$ = 4.0x10^3 m/s [la velocità limite in si ottiene quando la forza di natura elettrica, $q E = qV/d$, uguaglia in modulo la forza di attrito viscoso βv]

-- **PARTE 2**

3) Una trave sottile **omogenea**, di massa M = 20 Kg e lunghezza L = 3.0 m, è imperniata ad un suo estremo ad una parete verticale, come indicato in figura. La trave è mantenuta in posizione orizzontale attraverso una fune inestensibile di massa trascurabile, attaccata alla parete verticale ad una distanza $L/2$ dal perno (vedi figura). [Supponete trascurabile l'attrito dell'asta nella sua rotazione attorno al perno, ed usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità, diretta verso il basso come in figura]



   a. Sapendo che le condizioni di figura sono di equilibrio, quanto vale, in modulo, la tensione T della fune?
   T = ……………………………. ~ ……… N $(MgL/2)/(L\sin\theta) = (Mg/2)(1+tg^2\theta)^{1/2}/tg\theta = Mg5^{1/2}/2$ ~ 2.2x10^2 N [dall'equilibrio dei momenti, notando che il centro di massa dell'asta si trova a distanza $L/2$ dal perno e che il braccio della

tensione vale $Lsin\theta$, con θ indicato in figura; il seno dell'angolo si trova in funzione dei dati del problema con semplici passaggi di trigonometria!]

b. Quanto valgono, rispetto al riferimento indicato in figura, le componenti N_X ed N_Y delle forze che il perno esercita sull'asta?
N_X = ... = ... N $T\cos\theta = (Mg/(2\sin\theta))\cos\theta = Mg/(2tg\theta) = Mg = 2.0\mathrm{x}10^2$ N
N_Y = ... ~ .... N $-T\sin\theta + Mg = Mg/2 = 98$ N [si ottengono dall'equilibrio delle forze, notando che sull'asta agiscono, oltre alla reazione vincolare incognita, la forza peso $\boldsymbol{Mg}$, e la tensione $\boldsymbol{T}$, il cui modulo è stato determinato nella domanda precedente]

c. Ad un dato istante, una massa puntiforme m = 2.0 Kg urta sull'estremo dell'asta **rimanendoci conficcata**. Sapendo che la massa proviene dall'alto, con una velocità (diretta verticalmente) di modulo v = 10 m/s e che l'impatto provoca l'**immediata** rottura della fune (per superamento del carico di rottura), quanto vale la velocità angolare ω con cui l'asta **comincia** a ruotare attorno al perno?
ω = ... = ... rad/s $mvL/I_{TOT} = mvL/(ML^2/3+mL^2) = 7.7\mathrm{x}10^{-1}$ rad/s [dalla conservazione del momento angolare, $mvL = I_{TOT}\omega$, dove il momento di inerzia "complessivo" I_{TOT} è pari alla somma di quello della massa m, mL^2 e di quello della trave, $ML^2/3$]

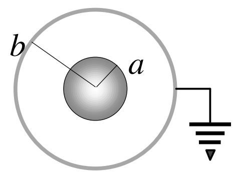
4) Una macchina termica che esegue un ciclo di Carnot (**ideale**) ha un'efficienza η = 0.50 e lavora avendo, come sorgente "fredda", un'enorme quantità di ghiaccio fondente, che si comporta da termostato alla temperatura $T_0 = 0\ ^0$C.

a. Quanto vale la temperatura T_1 della sorgente "calda" con cui lavora la macchina?
T_1 = ... = ... K $T_0 / (1-\eta) = 2T_0 = 546$ K   [l'efficienza del ciclo di Carnot è $\eta = 1 - T_0/T_1$, da cui la soluzione; fate attenzione ad uare i gradi Kelvin!]

b. Sapendo che, **per ogni ciclo**, una quantità m = 8.3 g di ghiaccio viene convertita in acqua, che il gas (perfetto) che compie il ciclo è costituito da n = 0.61 moli e che il volume iniziale occupato dal gas è V_A = 1.0 litri, quanto vale il volume V_B che il gas occupa al termine dell'**espansione isoterma** compresa nel ciclo? [Ricordate bene come è costituito il cilco di Carnot! Usate il valore λ = 3.3x10^5 J/Kg per il calore latente specifico di fusione del ghiaccio ed il valore R = 8.3 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]
V_B = ... ~ .... m^3 $V_A \exp(m\lambda/(nRT_0)) \sim 7.2\mathrm{x}10^{-3}$ m^3 [nell'espansione isoterma (a temperatura T_1) da V_A a V_B viene assorbito il calore $Q_1 = L_{isot} = nRT_1 ln(V_B/V_A)$; d'altra parte, per il "teorema di Carnot" si ha anche $Q_0/T_0 + Q_1/T_1 = 0$, dove $Q_0 = -m\lambda$, dato che il calore **ceduto** viene speso per sciogliere la quantità m di ghiaccio. Si ottiene allora $Q_1 = -Q_0\, T_1/T_0 = m\lambda T_1/T_0 = nRT_1 ln(V_B/V_A)$, relazione che, calcolando l'esponenziale di ambo i membri, fornisce il risultato]

-- **PARTE 3**

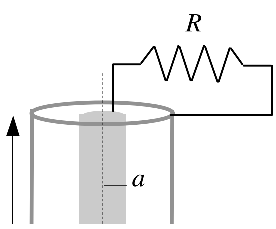
5) Una sfera di raggio a = 1.0 cm è realizzata con un materiale **disomogeneo** (non conduttore!) caratterizzato da una densità di carica volumica che dipende dal raggio r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0(r/a + 1)$, con $\rho_0 = 1.0\mathrm{x}10^{-10}$ C/m^3. Come rappresentato schematicamente in figura, questa sfera è racchiusa all'interno di un guscio sferico sottile (cioè di spessore trascurabile), concentrico alla sfera stessa e di raggio b = 5.0 cm. Il guscio esterno è **conduttore** e collegato a terra, cioè il suo potenziale elettrostatico è nullo, e fra sfera e guscio c'è il "vuoto".



a. Quanto valgono le cariche Q_a e Q_b che si trovano rispettivamente nella sfera e sul guscio? [Può esservi utile ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int\xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]
Q_a = ... = ... C $\int_0^a\rho(r)\, 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0\, (\int_0^a (r^3/a)\, dr + \int_0^a r^2 dr) = 4\pi\rho_0\, (a^4/(4a) + a^3/3) = 7\pi\rho_0\, a^3/3 = 7.3\mathrm{x}10^{-16}$ C   [dalla $Q = \int_{SFERA} dQ = \int_{SFERA}\rho dV$, usando come elemento infinitesimo di volume per la geometria sferica $dV = 4\pi r^2 dr$]
Q_b = ... = ... C $-Q_a = -7.3\mathrm{x}10^{-16}$ C   [il campo esterno deve essere nullo perché nulla è la differenza di potenziale tra un punto del guscio e l'infinito; pertanto, applicando Gauss ad una sfera di raggio $R>b$. viene il risultato]

b. Come si scrive il modulo del campo elettrico $E(r)$ nelle tre regioni $r<a$, $a<r<b$, $r>b$? [Qui non dovete dare una risposta numerica, ma esprimere $E(r)$ in funzione di r e dei dati "letterali" del problema; indicate con ε_0 la costante dielettrica del vuoto]
$E(r)$ = ... per $r<a$ $(\int_0^r\rho(R)\, 4\pi R^2 dR)/(4\pi r^2\varepsilon_0) = \rho_0\, (\int_0^r (R^3/a)\, dR + \int_0^r R^2 dR)/(\varepsilon_0 r^2) = (\rho_0/\varepsilon_0)\, (r^2/(4a) + r/3)$ [per Gauss su una sfera di raggio r generico con $r<a$]
$E(r)$ = ... per $a<r<b$ $Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [per Gauss su una sfera di raggio r generico con $a<r<b$]
$E(r)$ = ... per $r>b$ 0 [perché la sfera è a terra, vedi sopra]

6) Un lungo cilindro (**pieno**) di materiale **omogeneo** perfettamente conduttore (cioè con resistività trascurabile) di raggio a = 5.0 mm è circondato da un guscio cilindrico sottile (cioè di spessore trascurabile) dello stesso materiale e raggio b = 10 mm. I due cilindri sono coassiali, ed entrambi sono lunghi L = 1.0 m; lo spazio compreso tra loro è "vuoto". Ad



un'estremità essi sono collegati ad un generatore di differenza di potenziale (ideale) V = 10 V, mentre all'altra estremità il "circuito è chiuso" su un resistore elettrico di resistenza R = 20 ohm. La figura rappresenta una visione schematica e non in scala del sistema.

a. Che direzione e verso ha e come si scrive il modulo del campo magnetico $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse all'interno del cilindro pieno (cioè per $r < a$) e nella regione compresa tra i due cilindri (cioè per $a<r<b$)? [Qui non dovete dare una risposta "numerica" ma dovete comunque usare i **dati** "letterali" del problema; indicate con μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto e ricordate che, per il teorema di Ampere, la "circuitazione del campo magnetico è pari a μ_0 per la corrente concatenata"]
Direzione e verso di ***B***: ……………………tangenziale (verso dalla regola mano destra)
$B(r)$ = ……………………………. per $r<a$ $\mu_0 (V/(\pi a^2 R))\, r/2$ [dal teorema di Ampere, notando che la circuitazione vale $2\pi r B$ e la corrente concatenata vale $j \pi r^2$, con $j = I/S = (V/R)/(\pi a^2)$]
$B(r)$ = ……………………………. per $a<r<b$ $\mu_0 (V/R) / (2\pi r)$ [come sopra, ma stavolta la corrente concatenata è tutta quella che passa nel cilindro, cioè V/R]

b. Quanto vale la carica Q_a che si trova, all'**equilibrio**, sul cilindro interno? [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto; può esservi utile ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int d\xi/\xi = ln\xi$]
Q_a = ……………………………. ~ ……… C $V\, 2\pi\, \varepsilon_0\, L / ln(b/a) \sim 8.0\text{x}10^{-10}$ C [dal teorema di Gauss, risulta $E(r) = Q/(2\pi\, \varepsilon_0\, Lr)$; d'altra parte deve anche essere $V = \int_a^b E(r)\, dr$, da cui la soluzionel

c. Che direzione e verso ha e quanto vale la forza ***F*** che agisce sul guscio cilindrico esterno? [Fate attenzione a considerare tutte le forze di natura elettrica e/o magnetica, ed usate il valore $\mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]
Direzione e verso di ***F***: ……………………radiale "attrattiva" per la forza elettrica, dovuta all'attrazione fra cariche di segno opposto, "repulsiva" per quella magnetica, dovuta all'interazione tra corrente (che fluisce nel guscio esterno) e campo magnetico (generato dalla corrente che fluisce nel cilindro interno)]
F = ……………………………. ~ …….... N $-Q_aE(b) + ILB(b) =- Q_a^2/(2\pi\varepsilon_0 Lb) + \mu_0 I^2 L / (2\pi b) = -V^2 2\pi\, \varepsilon_0\, L / (b\, ln^2(b/a)) + (V^2/R^2)\, \mu_0\, L/(2\pi b) = (V^2 L/b)(-2\pi\varepsilon_0/(ln^2(b/a)) + \mu_0 / (2\pi R^2)) \sim 3.8\text{x}10^{-6}$ N [si è espressa la forza elettrica come $- Q_aE(b)$, con segno negativo per indicare che è attrattiva, e la forza magnetica come $ILB(b)$; il segno positivo del risultato indica che la forza risultante è dominata dalla "componente" magnetica (repulsiva)]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 23/6/2006 Firma: