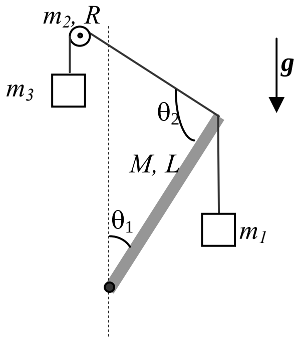
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 31/1/2007

Nome e cognome: ……………………………………………………   **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1) Un'asta omogenea di lunghezza L = 2.0 m e massa M = 12 kg è libera di ruotare senza attrito su un piano verticale attorno ad perno che passa per un suo estremo. All'altro suo estremo sono attaccate due funi inestensibili di massa trascurabile; una termina con una massa (incognita) m_1, mentre l'altra, dopo essere passata per la gola di una puleggia di massa m_2 = 2.0 kg e raggio R = 10 cm, termina con una massa m_3 = 8.0 kg. La situazione iniziale è di equilibrio e la geometria del sistema è quella rappresentata in figura, dove si vede che l'asta forma un angolo θ_1 = 30 gradi rispetto alla verticale e θ_2 = 90 gradi rispetto alla fune che passa per la puleggia. [Nella soluzione supponete che la fune non slitti sulla gola della puleggia e che questa possa ruotare attorno al proprio asse con attriti trascurabili; prendete il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

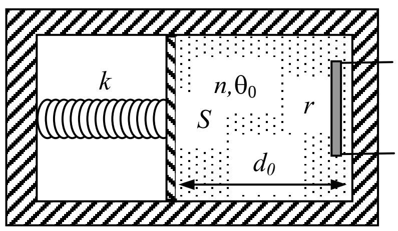


a. Quanto deve valere la massa m_1 affinché l'asta sia in equilibrio nella posizione indicata in figura?
m_1 = …………………………… = ……… kg $m_3/\sin\theta_1 - M/2 = 10$ kg [dall'equilibrio dei momenti calcolati rispetto al perno. Detta T_A la tensione del tratto di fune che collega l'asta alla puleggia, si ha: $0 = - m_1 gL\sin\theta_1 - Mg(L/2)\sin\theta_1 + T_A L$; d'altra parte per l'equilibrio della massa m_3 e considerando il fatto che, all'equilibrio, la tensione T_A viene "trasmessa" alla massa m_3 , si ha $T_A = m_3 g$, da cui la soluzione]

b. Ad un dato istante, la fune che collega l'asta alla massa m_1 si spezza istantaneamente e l'asta comincia a ruotare attorno ad un asse passante per il perno (ortogonale al foglio, nella figura). Quanto vale, **subito dopo** la rottura della fune, il modulo dell'accelerazione angolare α dell'asta? [Per la soluzione, considerate la puleggia come un disco omogeneo]
α = …………………………… = ……… rad/s^2 $(g/L)(m_3-(M/2)\sin\theta_1)/((M/3)+(m_2/2)) = 4.9$ rad/s^2 [dette T_A e T_B i moduli delle tensioni della fune nei tratti, rispettivamente, verso l'asta e verso la massa m_3, e detti $I_A = (M/3)L^2$ ed $I_P = (m_3/2)R^2$ i momenti di inerzia, rispettivamente, dell'asta e della puleggia, si hanno le seguenti equazioni del moto: per l'asta: $I_A\,\alpha = T_A L - (M/2)Lg\sin\theta_1$; per la puleggia: $I_P\alpha_P = (T_B - T_A)R$; per la massa m_3 (che ha, ovviamente, un moto di traslazione verso il basso): $m_3 a = m_3 g - T_B$. La soluzione esce mettendo a sistema le tre equazioni del moto e notando che valgono le seguenti relazioni (geometriche) tra le varie accelerazioni: $\alpha = a/L$; $\alpha_P = a/R$ (l'ultima essendo l'accelerazione angolare della puleggia). Notate che, per i versi delle accelerazioni angolari, si è usata la convenzione $\alpha > 0$ per rotazione antioraria. Dato che il problema chiede il modulo di α, non occorre fornire ulteriori precisazioni, ma è comunque necessario mantenere la "coerenza dei segni" nell'impostare il sistema]

c. Quanto vale la velocità v_3 del centro di massa della massa m_3 che si misura quando l'asta si trova a passare per la posizione verticale (tale cioè da formare un angolo θ_1 = 0 rispetto alla verticale)?
v_3 = …………………………… ~ ……… m/s $(gL(2m_3(2-3^{1/2})^{1/2}-M(2-3^{1/2})/(3m_3+M/3))^{1/2} \sim 0.87$ m/s [per la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = -m_3 g\Delta + Mg\Delta_A + (m_3/2)v_3^2 + (I_A/2)\omega^2 + (I_P/2)\omega_P^2$, tenendo conto che: la massa m_3 si abbassa di un tratto $\Delta = ((L\sin\theta_1)^2+(L(1-\cos\theta_1))^2)^{1/2}$; il centro di massa dell'asta si alza di un tratto $\Delta_A = L(1-\cos\theta_1)$; le velocità sono legate fra loro dalla relazione: $v_3 = \omega L = \omega_P R$; i momenti di inerzia dell'asta e della puleggia sono stati calcolati nella risposta al punto precedente e nella soluzione si sono usati i valori $\sin\theta_1$ = ½ e $\cos\theta_1 = 3^{1/2}/2$]

2) Un recipiente è costituito da un cilindro di sezione (interna) S = 10 cm^2 dotato di pareti **termicamente isolanti.** Il recipiente è diviso in due parti da un sottile setto rigido di massa trascurabile, collegato ad una delle pareti di base del cilindro attraverso una molla di costante elastica k = 8.3x10^3 N/m; il setto può scorrere orizzontalmente **senza attrito**. Una quantità n = 5.0x10^{-2} moli di gas perfetto monoatomico si trova, assieme ad un resistore elettrico di dimensioni trascurabili, usato per riscaldare il gas, in una delle due parti del recipiente (quella di destra in figura), mentre nell'altra (quella di sinistra in figura) è fatto il vuoto. Inizialmente il resistore è scollegato da qualsiasi circuito, la temperatura del gas è θ_0 = 27 ^{0}C ed il volume occupato dal gas si estende per una lunghezza d_0 = 10 cm; la figura riporta uno schema della situazione fisica descritta.



a. Sapendo che, nelle condizioni citate, il sistema è in equilibrio, quanto vale la compressione Δ_0 della molla? [Usate il valore R = 8.3 J/K per la costante dei gas perfetti]
Δ_0 = …………………………… = …… m $nRT_0 S/(Skd_0) = nRT_0/(kd_0) = 0.15$ m [per la condizione di equilbrio e la legge dei gas perfetti, $k\Delta_0/S = p_0 = nRT_0/(Sd_0)$, esprimendo in gradi Kelvin la temperatura]

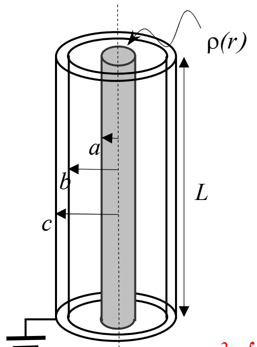
b. Ad un dato istante il resistore, che ha resistenza elettrica r = 10 ohm, viene collegato ad un generatore ideale di differenza di potenziale V' = 10 V. Si osserva che, trascorso un certo intervallo di tempo Δt, il setto si sposta in modo tale che il volume occupato dal gas, **all'equilibrio** in queste nuove condizioni, si estende per una lunghezza d = 12 cm. Quanto vale la temperatura T del gas in queste nuove condizioni? [Notate che la trasformazione implicata nel processo non è necessariamente reversibile!]

T = ……………………………. = …….. K $pV/(nR) = k(\Delta/S)dS/(nR) = k(d/nR)(\Delta_0 + d - d_0) = 408$ K [nelle nuove condizioni deve essere $T = pV/(nR)$; d'altra parte $V = Sd$, mentre $p = k\Delta/S$; il nuovo valore della compressione della molla si ottiene ragionando in termini geometrici. Deve infatti essere $(\Delta-\Delta_0) = (d-d_0)$]

c. Supponendo che il resistore abbia avuto il solo scopo di riscaldare il gas (cioè trascurando le perdite di calore), quanto è durato l'intervallo di tempo Δt in cui esso è stato collegato al generatore? [Usate il valore $c_V = (3/2)R$ per il calore specifico molare del gas a volume costante]

Δt = ……………………………. = …….. s $((k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2) + nc_V(T-T_0))/(V'^2/r) = 9.4$ s [dal primo principio si ha $Q = L + \Delta U$; d'altra parte, in questo caso il calore è fornito al gas dal resistore elettrico, e vale $Q = W\Delta t = (V'^2/r)\Delta t$; il lavoro compiuto dal gas è pari alla variazione di energia meccanica della molla, che vale $(k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2)$, dove $\Delta = \Delta_0 + d - d_0$, come già osservato nella risposta al punto precedente. Infine è anche $\Delta U = nc_V\Delta T = nc_V(T-T_0)$. Riunendo le varie espressioni si trova la soluzione]

3) Un lungo cilindro di materiale dielettrico di raggio a = 4.0 cm e lunghezza L = 1.0 m porta al suo interno una carica elettrica distribuita in modo **disomogeneo,** tale che la densità di carica volumica segue la legge $\rho(r) = \rho_0\, r^2/a^2$, dove $\rho_0 = 1.0\text{x}10^{-3}$ C/m^3 ed r è la distanza dall'asse del cilindro. Tale cilindro è circondato, in modo coassiale, da un guscio cilindrico conduttore, di raggio interno b = 10 cm e raggio esterno c = 12 cm, **collegato a terra** (cioè posto "a potenziale nullo"). Il guscio ha la stessa lunghezza del cilindro, e lo spazio tra cilindro e guscio è vuoto. La figura rappresenta una visione schematica e non in scala del sistema.



a. Quanto valgono le cariche Q_b e Q_c che si trovano sulle facce rispettivamente interna $(r=b)$ ed esterna $(r=c)$ del guscio cilindrico all'**equilibrio**?

Q_b = ……………………………. = ... C $-Q_{cil} = -\int_{cil} \rho(r)\, dV = -\int_0^a \rho_0(r^2/a^2)2\pi rL\, dr = -\rho_0\, (2\pi L/a^2) \int_0^a r^3\, dr = -\rho_0\, (2\pi L/a^2)\, a^4/4 = -\rho_0\, \pi La^2/2 =- 2.5\text{x}10^{-6}$ C [dovendo il campo elettrico essere nullo all'interno del guscio (che è un conduttore in equilibrio), si trova, applicando Gauss, che la carica su questa faccia deve essere uguale ed opposta a quella del cilindro; questa si calcola dalla definizione, integrando la densità di carica volumica sul cilindro (per il calcolo, vista la simmetria cilindrica si usa $dV = 2\pi rL\, dr$)]

Q_c = ……………………………. = ... C 0 [essendo il guscio collegato a terra, cioè posto a potenziale nullo, il campo all'esterno del guscio stesso deve essere nullo; usando Gauss, si vede questa condizione implica che la carica complessiva del guscio sia uguale ed opposta a quella del cilindro, e potendosi le cariche, all'equilibrio, trovare solo sulle superfici delle facce, deve essere $Q_{cil} = -(Q_b+Q_c)$, da cui la soluzione]

b. Supponete ora che il guscio cilindrico venga posto in rotazione uniforme attorno al suo asse da un operatore esterno, rimanendo sempre collegato a terra. Sapendo che la velocità angolare di rotazione è ω, come si esprime, se esiste, il campo magnetico $\mathbf{B}(r)$ in un punto **generico** che si trova a distanza r dall'asse del cilindro ed appartiene alla regione compresa tra cilindro e guscio ($a<r<b$)? [Dovete esprimere l'andamento di $\mathbf{B}(r)$ in funzione della variabile r, usando i valori **letterali** (e non numerici!) dei parametri noti del problema ed impiegando il simbolo μ_0 per la permeabilità magnetica del vuoto; inoltre dovete indicare anche la direzione del vettore campo magnetico. Servitevi di "ragionevoli approssimazioni" basate sul fatto che il guscio è molto lungo]

$\mathbf{B}(r)$ = ... $\mu_0\, (Q_b/L)\, (\omega/2\pi)\mathbf{z} = -\mu_0\, \rho_0\, \omega\, (a^2/4)\, \mathbf{z}$, con $\mathbf{z}$ versore "assiale" del sistema (il verso dipende da quello della rotazione secondo la regola della mano destra, tenendo conto del segno negativo) [la rotazione del guscio fa sì che la carica da esso portata, che vale Q_b, si muova formando una corrente. Il valore di tale corrente si ottiene notando che un elementino di carica del guscio (della faccia interna del guscio) impiega un tempo $T = 2\pi/\omega$ per compiere un giro completo; la corrente è allora $I = Q_b/T$. Tale corrente determina una situazione analoga, concettualmente, a quella di un solenoide. Il campo magnetico, apporssimando ragionevolmente il solenoide come infinito, ha direzione assiale, è **uniforme** ed il suo modulo si calcola con il teorema di Ampere: $BL = \mu_0\, Il$. Sotituendo l'espressione di I appena determinata si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 31/1/2007 Firma: