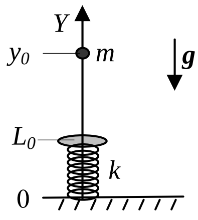
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 8/6/2007

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**



1. Un oggetto puntiforme di massa m = 200 g si trova sulla verticale dell'asse di una molla di costante elastica k = 98.0 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 200 mm, dotata di un piattello orizzontale: molla e piattello hanno **massa trascurabile**. La molla è appoggiata su un piano rigido ed indeformabile che si trova alla quota y = 0 come indicato in figura. Ad un dato istante l'oggetto viene lasciato cadere partendo da fermo: dopo aver raggiunto il piattello, esso ci rimane appoggiato mentre la molla subisce una compressione. [Usate il valore g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Sapendo che la quota più bassa raggiunta dall'oggetto è y_{MIN} = 100 mm (misurata rispetto all'origine dell'asse Y di figura), quanto vale la quota y_0 da cui esso è partito?
   y_0 = …………………………………… = ……….. m $y_{MIN}+(k/(2mg))(L_0-y_{MIN})^2$ = 0.350 m [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g+\Delta U_{ELA} = 0 + mg(y_{MIN}-y_0) + (k/2)(L_0-y_{MIN})^2$, dove abbiamo tenuto conto che l'oggetto parte da fermo e che esso è anche istantaneamente fermo quando raggiunge la quota minima]

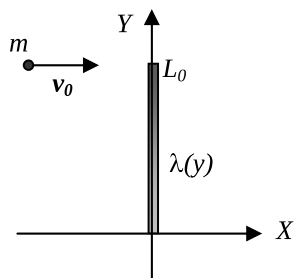
   b) Dopo aver raggiunto la quota minima di cui sopra, l'oggetto, rimanendo in contatto con il piattello, viene sospinto verso l'alto dalla molla e ad un dato istante ripassa per la posizione $y=L_0$. Quanto vale la sua velocità v' in questo istante?
   v' = …………………………………… ~ ……….. m/s $((k/m)\ (L_0-y_{MIN})^2-2g(L_0-y_{MIN}))^{1/2}$ ~ 1.71 m/s
   [sempre dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g+\Delta U_{ELA} = (m/2)v'^2 + mg(L_0-y_{MIN}) - (k/2)(L_0-y_{MIN})^2$]

   c) Posto $t_0=0$ l'istante in cui l'oggetto si trova a y_{MIN}, quanto vale l'istante t' in cui esso ripassa per $y = L_0$?
   t' = …………………………………… ~ ……….. s $\arccos((mg/k)/(y_{MIN}-L_0+mg/k))/(k/m)^{1/2}$ ~ $(\pi/2)(m/k)^{1/2}$~ 8.24x10^{-2} s [il moto è armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. La legge oraria del moto, tenendo conto che la posizione di equilibrio, soluzione particolare dell'equazione del moto, è $y_{EQ} = L_0-mg/k$, come si dimostra facilmente richiedendo che la forza sulla massa si annulli, si scrive: $y(t) = y_{EQ} + A\cos(\omega t+\phi)$. Le costanti si determinano considerando le condizioni iniziali: $y(t=0) = y_{MIN}$ e $v(t=0) = 0$. Si ottiene: $\phi = 0$ e $A =(y_{MIN}-y_{EQ})$. La soluzione alla domanda si ricava imponendo che $y(t') = L_0 = y_{EQ}+(y_{MIN}-y_{EQ})\cos(\omega t')$, ovvero $t' = \arccos((L_0-y_{EQ})/(y_{MIN}-y_{EQ}))/\omega$ e la posizione richiesta viene raggiunta dopo un tempo pari a un quarto di periodo; poiché $T = 2\pi/\omega$ si ottiene la risposta]

2. Un piccolo sasso di massa m = 1.00 kg è attaccato all'estremità di una fune inestensibile di massa trascurabile di cui tenete stretto in mano l'altro estremo; la lunghezza della fune è R = 39.2 cm. Mettete in moto il sasso su un **piano verticale** come se si trattasse di una fionda. [Usate il valore g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Quanto vale la velocità angolare ω' per cui la fune non rimane sempre "ben tesa" durante la rotazione? [Per intenderci, occorre che la velocità angolare sia maggiore di questo valore affinché la tensione della fune sia, in modulo, maggiore di zero anche quando il sasso passa per la sua quota più alta]
   ω' = …………………………………… = ………. rad/s $(g/R)^{1/2}$ = 5.00 rad/s [al minimo e nel punto di quota massima,, la velocità angolare deve essere tale che l'accelerazione centripeta del sasso, $a = \omega'^2R$, coincide con l'accelerazione di gravità, g. Si intende che in questa condizione la tensione della fune è nulla, e quindi occorre una velocità angolare appena ("infinitesimamanete") maggiore di questa perché la fune risulti sempre tesa]

   b) Nelle condizioni determinate al punto precedente, quanto vale la tensione della fune T quando il sasso passa per la posizione di **quota minima**?
   T = …………………………………… = ……….. N $mg+m\omega'^2R = 2mg$ = 19.6 N [la tensione della fune fornisce l'accelerazione centripeta e "contrasta" la forza peso]

-- **PARTE 2**



3. Una sottile barretta di materiale **disomogeneo** è inizialmente ferma appoggiata su un piano **orizzontale** dotato di attrito trascurabile; essa è disposta lungo l'asse Y di un sistema di riferimento cartesiano la cui origine coincide con un estremo della barretta stessa. La densità **lineare** di massa della barretta segue la legge $\lambda(y) = \lambda_0\ y/L_0$, con λ_0 = 3.0 kg/m e L_0 = 60 cm (L_0 è la lunghezza della barretta). Un proiettile puntiforme di massa m = 20 g (**trascurabile** rispetto a quella della barretta!) viaggia muovendosi sullo stesso piano di moto rettilineo uniforme con velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta lungo l'asse X. La posizione ed il verso di moto del proiettile, come indicato in figura, sono tali che esso colpisce l'estremità della barretta posta in $y = L_0$.
   a) Quali sono le coordinate x_{CM} , y_{CM} del centro di massa della barretta? [Tenete conto che la barretta ha sezione trascurabile; ricordate che, in questo caso, è λ = dm/dy]
   x_{CM} = ……………………………………… = ……….. m 0 [essendo la sezione trascurabile, tutta la massa della barretta si trova in x = 0!]

y_{CM} = ……………………………………… = ……….. m $(\int_0^{L0} \lambda_0 (y/L_0)\, y dy)/(\int_0^{L0} \lambda_0 (y/L_0) dy) = \lambda_0 L_0^2/3/ \lambda_0 L_0/2 = (2/3)L_0 = 0.40$ m [dalla definizione di centro di massa]

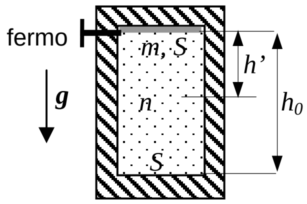
b) Quanto vale il momento di inerzia I_{CM} della barretta per rotazioni attorno ad un asse ortogonale al piano *XY* e passante per il suo centro di massa?

I_{CM} = ………………………………… = ………. kg m^2 $I_{y=0} - m_B y_{CM}^2 = (\int_0^{L0} \lambda_0 (y/L_0)\, y^2 dy) - (\int_0^{L0} \lambda_0 (y/L_0) dy)(4/9)L_0^2 = \lambda_0 (L_0^3/4) - \lambda_0 (2/9)L_0^3 = \lambda_0 L_0^3/36 = 1.8\text{x}10^{-2}$ kg m^2 [si è usato il teorema degli assi paralleli, dato che il calcolo del momento di inerzia $I_{y=0}$ per rotazione attorno ad un asse passante per l'origine è tecnicamente semplice: lo stesso risultato deve anche venire dal calcolo diretto di I_{CM} mediante integrazione]

c) Sapendo che in seguito all'urto il proiettile rimane **conficcato** nella barretta, cosa si può affermare sul moto del sistema **subito dopo l'urto**? Commentate, possibilmente in brutta copia, argomentando sulle eventuali approssimazioni fatte e cercando di dare stime quantitative delle velocità coinvolte.

Commento e discussione: ……………………………………………………… Dopo l'urto il sistema barretta+proiettile segue un moto sul piano *XY* che può essere descritto come sovrapposizione di rotazione e traslazione. Notando che la massa del proiettile è trascurabile, si può affermare che il centro di massa del sistema coincide con quello della barretta. Per la conservazione della quantità di moto esso si muoverà con velocità $v_{CM} \sim v_0 m/(m+m_B) = x$ 0.22 m/s (trascurabile rispetto a v_0). Il moto di rotazione si ha attorno ad un asse passante per il centro di massa con una velcoità angolare ω; per la conservazione del momento angolare si ha $\omega \sim m v_0(L_0-y_{CM})/(I_{CM}+m(L_0-y_{CM})^2) \sim m v_0(L_0-y_{CM})/I_{CM} = 2.2$ rad/s. Nel calcolo, oltre ad approssimare il centro di massa del sistema con quello della barretta, abbiamo anche notato che il momento di inerzia del proiettile conficcato nella barretta è di fatto trascurabile a causa della sua piccola massa

4. Un recipiente cilindrico che contiene una quantità $n = 1.00\text{x}10^{-2}$ moli di gas perfetto monoatomico ha altezza $h_0 = 1.662$ m e superficie di base $S = 10.0$ cm^2. Il recipiente ha pareti **isolate termicamente** ed è dotato di un setto impermeabile al gas scorrevole senza attrito in direzione verticale (in modo da separare il recipiente in due regioni). Il setto ha spessore **trascurabile** e massa $m = 1.00$ kg. Inizialmente il setto è mantenuto da un fermo meccanico nella posizione più alta, come in figura; ad un dato istante il fermo viene rimosso e si osserva che il setto si abbassa per un tratto $h' = h_0/2$. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) e $g = 9.81$ m/s^2 per costante gas perfetti e accelerazione di gravità]



a) Quanto vale la variazione di temperatura ΔT del gas alla fine del processo considerato, cioè quando si sono instaurate nuove condizioni di equilibrio con il setto nella nuova posizione? [Suggerimento: considerate il lavoro fatto, o subito, dal gas!]

ΔT = ……………………………………= ……… K $-L_{gas}/(nc_V) = L_{ext}/(nc_V) = mgh'/(nc_V) = (2/3)mgh'/(nR) = 65.4$ K [il lavoro fatto dal gas è, per principi di bilancio energetico, uguale ed opposto a quello fatto dalla forza esterna, che è la forza peso agente sul tappo. Il primo principio della termodinamica fornisce la soluzione tenendo conto che lo scambio di calore con l'esterno è nullo (le pareti sono isolanti) e supponendo altrettanto nullo il contributo all'assorbimento di calore da parte del setto]

b) Quanto valeva la pressione iniziale del gas P_0, cioè la pressione quando il setto era bloccato dal fermo nella posizione di massima altezza?

P_0 = …………………………………… = ... Pa $nRT_0/V_0 = nR(T-\Delta T)/(Sh_0) = (nR/(Sh_0))(PV/(nR)-\Delta T) = (nR/(Sh_0))((mg/S)S(h_0-h')/(nR)-(2/3)mgh'/(nR)) = (mg/S)((h_0-h')/h_0) - (2/3)(mg/S)(h'/h_0) = (mg/S)(1/2-1/3)=(mg/S)/6 = 1635$ Pa [si applica la legge dei gas perfetti alla situazione iniziale, si esprime la temperatura iniziale in funzione di quella finale, che a sua volta è calcolata usando la legge dei gas perfetti per la condizione finale, dove la pressione (all'equilibrio) vale *mg/S*. Un po' di manipolazioni algebriche permettono di trovare un'espressione semplice]

c) L'affermazione che la variazione dell'entropia nel processo è nulla può essere considerata:

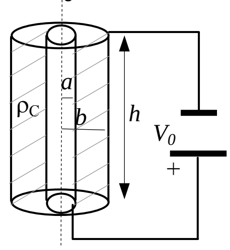
□ Vera X□ Falsa □ Non si può dire

Commento alla scelta: .... L'entropia è costante per una adiabatica reversibile; il processo considerato non è reversibile (e non segue le leggi delle adiabatiche reversibili, come si può facilmente verificare) e quindi l'affermazione è in generale falsa

-- **PARTE 3**

5. Una sottile bacchetta cilindrica di materiale **perfettamente conduttore** ha raggio $a = 1.0$ mm ed altezza $h = 2.0$ cm. La bacchetta è circondata da un sottile guscio cilindrico di materiale **perfettamente conduttore**, coassiale alla bacchetta e della stessa altezza di questa; il raggio del guscio è $b = 5.0$ mm. Lo spazio tra i due conduttori è riempito da un materiale **omogeneo debolmente conduttore**, dotato di resistività $\rho_C = 1.0\text{x}10^3$ ohm m. La bacchetta ed il guscio conduttore esterno sono collegati ai poli di un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 1.0\text{x}10^3$ V come rappresentato in figura. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del materiale]

Disegno non in scala!



a) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la carica Q_0 che si accumula sulla bacchetta cilindrica? [Può farvi comodo sapere che, numericamente, $ln(5) \sim 1.6$]

Q_0 = …………………………………… ~ …….. C $V_0 2\pi\varepsilon_0 h/ln(b/a) \sim 6.9\text{x}10^{-10}$ C [il sistema ha simmetria cilindrica e si comporta, di fatto, come un condensatore cilindrico. Il campo elettrico tra bacchetta e guscio esterno ha direzione radiale e dipende solo dal raggio a causa della simmetria. L'espressione del campo $E(r)$ si trova usando Gauss su un cilindro di raggio generico $a<r<b$: $2\pi r h E(r) = Q_0/\varepsilon_0$. D'altra parte deve anche essere $\Delta V = -V_0 = -\int_a^b E(r)dr = Q_0 ln(b/a)/(2\pi\varepsilon_0 h)$, da cui la soluzione]

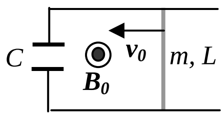
b) Per il sistema considerato si osserva in condizioni stazionarie passaggio di corrente dalla bacchetta al guscio esterno. Quanto vale l'intensità I di questa corrente? [Suggerimento: la corrente ha la stessa direzione del campo elettrico che si instaura tra bacchetta e conduttore esterno!]

I = …………………………………… ~ …….. A $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = (\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS)/\rho_C = E(r)2\pi rh = (Q/(2\pi rh\varepsilon_0\rho_C))2\pi rh = Q_0/(\varepsilon_0\rho_C) = (V_0 2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a))/\varepsilon_0\rho_C = 2\pi h\, V_0/(\rho_C \ln(b/a)) \sim 7.85\text{x}10^{-2}$ A [l'intensità di corrente si ottiene come flusso della densità di corrente $\mathbf{j}=\mathbf{E}/\rho_C$ .Dato che il campo è radiale e dipende solo dal raggio, la densità di corrente è orientata anche in direzione radiale ed è uniforme su un guscio cilindrico di raggio generico $a<r<b$. L'integrale che determina il flusso si può quindi calcolare in modo immediato, ottenendo il risultato]

c) Supponete ora che all'istante $t_0 = 0$ il generatore venga scollegato: come si scrive la legge che regola l'andamento temporale della carica $Q(t)$ sulla bacchetta interna ad un istante generico t?

$Q(t)$ = ……………………………… $Q_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = RC = (V_0/I)(Q_0/V_0) = Q_0/I = \varepsilon_0\rho_C = 8.8\text{x}10^{-9}$ s [è la scarica di un condensatore attraverso una resistenza: la capacità ed il valore della resistenza sono praticamente già stati determinati nelle risposte alle domande precedenti]

6. Una barretta perfettamente conduttrice di lunghezza L e massa m scorre senza attrito in direzione **orizzontale** sotto l'azione di un operatore esterno, che la mantiene a velocità costante $\mathbf{v_0}$ diretta nel verso indicato in figura. Un campo magnetico esterno $\mathbf{B_0}$ omogeneo attraversa il piano su cui giace il sistema. La barretta è collegata elettricamente ad un circuito ("spira") che comprende un condensatore di capacità C; come indicato in figura. All'istante t_0=0 la barretta, inizialmente ferma in una certa posizione, viene messa in moto **istantaneamente**.



a) Qual è, rispetto alla figura, il verso della corrente che il campo magnetico induce nel circuito?

☐ Orario X ☐ Antiorario ☐ Indeterminato

Commento alla scelta: …………………………………. La legge di Lenz stabilisce che la corrente indotta tende a "contrastare" la variazione di flusso magnetico attraverso la "spira". Stabilendo come positivo il flusso generato dal campo esterno, si vede che esso tende a diminuire con il tempo a causa della riduzione dell'area della spira. Il campo indotto deve tendere a mantenere costante il flusso e quindi ha **lo stesso verso** della corrente che creerebbe il campo esterno; la regola della mano destra stabilisce che questo verso è quello antiorario. Alla stessa conclusione si giunge anche considerando il verso della forza magnetica che agisce sulle cariche della barretta. Notate che una vera e propria corrente si ha solo all'inizio, nel transiente durante il quale la barretta viene messa in movimento

b) Come si esprime la carica Q accumulata sul condensatore in condizioni stazionarie?

Q = ………………………………….. $CV = CB_0Lv_0$ [il campo "impresso" nella barretta produce una differenza di potenziale B_0Lv_0 che è **costante** nel tempo; questa differenza di potenziale è anche quella che si trova ai capi del condensatore, da cui la risposta]

c) Come si scrive il lavoro meccanico L che compie l'operatore esterno per mettere e mantenere in movimento la barretta? [State attenti a considerare a cosa serve questo lavoro!]

L = ………………………………….. $(m/2)v_0^2+CV^2/2 = (m/2)v_0^2+C(B_0Lv_0)^2/2$ [per il bilancio energetico applicato in condizioni di assenza di forze dissipative: il lavoro dell'operatore serve a fornire energia cinetica alla barretta ma anche a creare energia elettrostatica nel condensatore]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 8/6/2007 Firma: