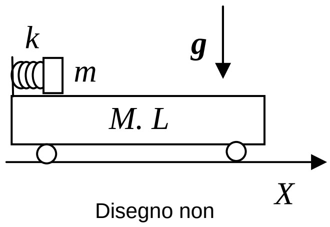
Corso di Laurea Ing EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 19/7/2007

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**

1. Un piccolo carrello di massa M = 10 kg e lunghezza L = 1.1 m può scorrere senza attrito su un piano orizzontale e si trova inizialmente **fermo** in una certa posizione. Ad un'estremità del carrello si trova una molla di costante elastica $k = 1.1 \times 10^4$ N/m, un estremo della quale è solidale col carrello stesso. La molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è inizialmente compressa per un tratto Δ_0 = 2.0 cm (per una causa esterna); un corpo puntiforme di massa $m = M/10$ = 1.0 kg è a contatto con l'estremo libero della molla, come in figura. Ad un dato istante la causa esterna che manteneva compressa la molla viene rimossa: essa si estende ed il corpo di massa m si mette in movimento in direzione orizzontale abbandonando la molla, fino a raggiungere l'estremità del carrello. [Supponete trascurabile l'attrito tra corpo e carrello]



Disegno non in scala!!

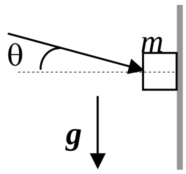
   a) Quanto vale lo spostamento ΔX del carrello quando il corpo di massa m ne raggiunge l'estremità? [Considerate un asse X orizzontale orientato verso destra rispetto alla figura; inoltre **supponete nulla la lunghezza** complessiva del complesso corpo + molla compressa, cioè considerate che il corpo percorre una distanza pari ad L **rispetto al piano del carrello** prima di raggiungerne l'estremità]

   ΔX = …………………………………… = ………… m $-mL/(m+M)$ = - 0.10 m [essendo il sistema isolato lungo l'asse X e fermo all'inizio, il centro di massa del sistema non cambia la sua posizione (lungo X). Ricordando che $x_{CM} = (mx + MX)/(m+M)$, dove x ed X sono le posizioni (dei centri di massa) dei due corpi in considerazione, si ha $0 = \Delta x_{CM} = (m\Delta x + M\Delta X)/(m+M)$, da cui $\Delta X = -m\Delta x/M$. A questo punto occorre notare che la massa m esegue nel processo uno spostamento pari ad L **nel riferimento del carrello**, cioè rispetto a questo. Lo spostamento "assoluto", che compare nella precedente equazione, si ottiene, ricordando le regole di somma di vettori, come $\Delta x = L + \Delta X$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale, in modulo, la velocità V' del carrello quando il corpo ne raggiunge l'estremità (cioè nell'istante considerato nella domanda precedente)?

   V' = …………………………………… = ... m/s $(\Delta_0^2\, k\, m/(M(m+M)))^{1/2} = 2.0 \times 10^{-1}$ m/s [per la conservazione della quantità di moto dovuta al fatto che il sistema è isolato (lungo X) si ha $0 = MV' + mv'$, con v' velocità della massa m quando questa raggiunge l'estremità del carrello. Per il bilancio energetico deve anche essere $-\Delta U_{ela} = (k/2)\Delta_0^{1} = \Delta E_K = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2$. Combinando le due equazioni si ottiene il risultato]

2. Un blocchetto di massa m = 2.8 kg è posto a contatto con una parete verticale rigida, indeformabile e scabra, che presenta attrito statico e dinamico con coefficienti rispettivamente μ_S = 0.90 e μ_D = 0.45. Sul blocchetto agisce una forza $\mathbf{F}$ che forma un angolo θ = 30 gradi rispetto all'orizzontale e che agisce in modo da "schiacciare" il blocchetto (che è rigido ed indeformabile!) contro la parete, come rappresentato in figura. [Supponete trascurabile la possibilità che il blocchetto possa "ruotare su se stesso" ed usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $\sin\theta$ = 0.50 e $\cos\theta \sim$ 0.87]



   a) Quanto deve valere, **al minimo**, il modulo della forza F per avere equilibrio?

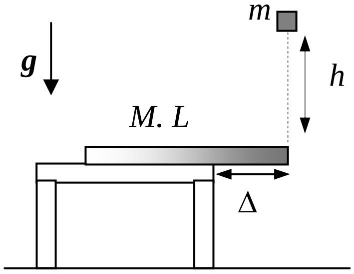
   F = …………………………………… ~ ………… N $mg/(\mu_S\cos\theta - \sin\theta) \sim 98$ N [si ha equilibrio quando $F_{AS} = mg + F\sin\theta$. D'altra parte deve essere $F_{AS} \leq \mu_S N = \mu_S F\cos\theta$, da cui, riarrangiando, si ottiene la soluzione

   b) Ad un dato istante la forza $\mathbf{F}$ viene rimossa istantaneamente ed il blocchetto cade verticalmente verso il basso. Quanto vale, in modulo, la sua accelerazione a?

   a = …………………………………… = ... m/s^2 g = 9.8 m/s^2 [rimuovendo $\mathbf{F}$ si annulla la reazione vincolare e quindi non esiste alcuna forza di attrito: il corpo cade liberamente sotto l'azione della gravità]

-- **PARTE 2**

3. Una sottile asta **disomogenea,** di sezione (trascurabile) quadrata, massa M = 1.0 kg e lunghezza L = 30 cm, è realizzata con un materiale la cui densità di massa **aumenta linearmente** con la distanza da un estremo. L'asta è poggiata sopra un tavolo, in modo da restare parzialmente a sbalzo rispetto al piano del tavolo (l'estremo più denso è a sbalzo). Le forze di attrito tra asta e piano del tavolo sono trascurabili. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Si osserva sperimentalmente che l'asta resta in equilibrio (con l'asse orizzontale) se la lunghezza Δ della parte mantenuta a sbalzo (vedi figura) è minore di un certo valore Δ_{MAX}. Quanto vale Δ_{MAX}? Commentate la risposta!

   Δ_{MAX} = …………………………………… = ………… m $L - x_{CM} = L - 2L/3 = L/3$ = 0.10 m   [per i motivi spiegati nel commento di seguito, corrisponde a $L - x_{CM}$, essendo la posizione del centro di massa data da: $x_{CM} = \int x\, dm / \int dm = \int x\, \rho_M\, dV / \int \rho_M\, dV$. La dipendenza funzionale della densità di massa ρ_M dalla coordinata x, che rappresenta la distanza dall'estremo ("a massa nulla") dell'asta si deduce dal testo: per esprimere una dipendenza **lineare** si può porre ad esempio $\rho_M = \rho_0\, x/L$. Tenendo conto che l'elemento di volume si può scrivere $dV = Sdx$, con S sezione dell'asta, ed integrando sulkl'intera lunghezza dell'asta, cioè usando estremi di integrazione $0,L$, si ottiene il risultato]

Commento alla risposta: .... l'equilibrio richiede bilanciamento delle forze e dei momenti. Le forze (peso e reazione del tavolo) sono sempre bilanciate; affinché siano bilanciati i momenti occorre che la reazione vincolare sia in grado di produrre un momento di segno opposto rispetto a quello della forza peso (applicata al centro di massa) rispetto al perno istantaneo di rotazione, costituito dal bordo del tavolo. Questa condizione richiede che la verticale passante per il centro di massa iaccia all'interno del piano del tavolo, condizione rispettata finché $\Delta \le \Delta_{MAX} = L-x_{CM}$.

b) Con l'asta nelle condizioni espresse nella domanda precedente, cioè in modo tale che la parte a sbalzo è lunga esattamente Δ_{MAX} , una massa puntiforme m = 0.10 kg parte da ferma da un punto collocato sulla verticale dell'estremità a sbalzo dell'asta e posto ad un'altezza h = 4.9 cm da questa (vedi figura). L'urto tra massa puntiforme ed asta può essere considerato come totlamente **anelastico**, cioè dopo l'urto la massa rimane conficcata nell'asta. In seguito all'urto si osserva che l'asta comincia a ruotare: quanto vale la sua velocità angolare ω **subito dopo l'urto**?

ω = …………………………………… ~ ……….. rad/s $m v\Delta_{MAX}/I_{tot} = m(2gh)^{1/2}(L/3)/(ML^2/2 - M(2L/3)^2+m\Delta_{MAX}^2) = m(2gh)^{1/2}(L/3)/(ML^2/18 + mL^2/9) = 6m(2gh)^{1/2}/(L(M+2m)) \sim$ 1.6 rad/s [il sistema è isolato rispetto ai momenti delle forze e quindi si conserva il suo momento angolare totale. Pertanto deve essere $L_{in} = mv\Delta_{MAX} = L_{fin} = I_{tot}\,\omega$. La vecloità v della massa m subito prima dell'urto si ottiene dalla conservazione dell'energia: $v = (2gh)^{1/2}$. Il momento di inerzia complessivo del sistema è dato dalla somma di I_{CM} dell'asta (nelle condizioni del problema il polo di rotazione coincide praticamente con il centro di massa) e I_m, momento di inerzia della massa "conficcata", pari a $m\Delta_{MAX}^2$. Per il calcolo di I_{CM} conviene servirsi del teorema degli assi paralleli: $I_{CM} = I_0 - Mx_{CM}^2$, dove $I_0 = \int_0^L x^2 \rho_M\, dV = ML^2/2$. Notate che l'energia cinetica del sistema **non** si conserva, essendo l'urto anelastico, e **non** si conserva neanche la quantità di moto (lungo la direzione verticale), a causa della presenza delle forze di reazione esercitate dal tavolo sull'asta che hanno carattere impulsivo]

4. Un grande recipiente cilindrico di sezione S = 98.0 cm^2, dotato di un tappo di massa trascurabile scorrevole senza attrito in direzione verticale e di pareti (e tappo) isolanti termicamente, contiene un volume V_0 = 19.6 litri di elio (che può essere considerato come un gas perfetto monoatomico) e una **grande quantità** di ghiaccio fondente mescolato ad acqua. Inizialmente sul tappo si trova una massa M = 67.0 kg ed un fermo meccanico impedisce al tappo di scendere; inoltre al di sopra del tappo è fatto il vuoto pneumatico, cioè non agsice la pressione atmosferica. [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti e ponete g = 9.80 m/s^2 per l'accelerazione di gravità; supponete immiscibili elio ed acqua solida e liquida, cioè considerateli come tre sistemi indipendenti che si trovano alla **stessa temperatura di equilibrio**]

a) Ad un dato istante il fermo meccanico viene rimosso ed il tappo scende **bruscamente** verso il basso per un tratto Δh = 20.0 cm. Dopo aver atteso il raggiungimento di una nuova condizione di equilibrio, si osserva che una certa quantità di ghiaccio si è fusa. Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è λ = 3.35x10^5 J/kg, quanto vale la massa Δm di ghiaccio che si fonde? [Supponete che il ghiaccio **non** venga fuso completamente nel processo e supponete trascurabile la variazione di volume dell'acqua nella trasformazione da solido a liquido]

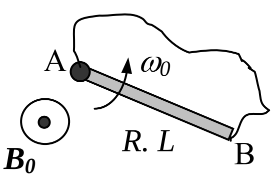
Δm = …………………………………… = …….. kg $Mg\,\Delta h/\lambda$ = 3.92x10^{-3} kg[la trasformazione è isoterma, dato che rimane del ghiaccio fondente, anche se non necessariamente reversibile. Per il primo principio scritto per il gas si ha: $Q_{gas} = L_{gas}$. D'altra parte $L_{gas} = -L_{peso} = -Mg\Delta h$ e, essendo il gas in equilibrio con il ghiaccio fondente, $Q_{gas} = -Q_{gh} = \Delta m\lambda$ (il calore liberato dal gas scioglie parte del ghiaccio)]

b) Successivamente la massa viene rimossa e la superficie esterna del tappo viene messa in contatto con la pressione atmosferica P_{ATM} = 1.00x10^5 Pa. Supponendo che la trasformazione che ne consegue avvenga in condizioni tali da poterla ritenere **reversibile**, quanto vale il volume finale V_2 del gas? [Supponete che anche durante tutta questa trasformazione rimanga nel recipiente una miscela di acqua e ghiaccio]

V_2 = …………………………………… = …….. litri $Mg(V_0/S-\Delta h)/P_{ATM}$ = 1.18x10^{-2} m^3 = 11.8 litri [stando al testo, la trasformazione è isoterma reversibile; quindi, con ovvio uso dei simboli, $V_2 = P_1V_1/P_2$. Si ha poi: $P_1 = Mg/S$, $P_2 = P_{ATM}$ e $V_1 = V_0 - S\Delta h$, da cui la soluzione]

-- **PARTE 3**

5. In una data regione di spazio insiste un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B_0}$. Una sottile barretta omogenea di materiale conduttore, di lunghezza L e resistenza R, è mantenuta in rotazione a velocità angolare costante ω attorno ad un suo estremo da un motore esterno; la rotazione della barretta avviene su un piano ortogonale alla direzione del campo magnetico, secondo quanto schematizzato in figura. Un sistema di contatti striscianti mantiene costantemente collegati i due estremi della sbarretta, consentendo allo stesso tempo la rotazione; il collegamento è realizzato con un filo di resistenza elettrica trascurabile.



a) Come si esprime, in funzione dei dati del problema, la differenza di potenziale ΔV che si misura tra le estremità della barretta in condizioni stazionarie? Quale tra le estremità A e B di figura si trova al potenziale più alto?

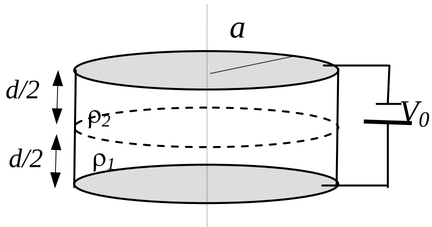
ΔV = …………………………………… $B_0\,\omega_0\,L^2/2$ [sulle cariche libere (positive) che si trovano nella barretta a distanza r dal perno, e che quindi si muovono con velocità tangenziale di modulo ωr , agisce un campo elettrico impresso (dalla forza di Lorentz) che vale in modulo $B_0 v = B_0\omega r$. La differenza di poitenziale ad esso associata si calcola eseguendo l'integrale di linea lungo la barretta, ottenendo il risultato riportato]

Estremità a potenziale più alto: …………………………………… A [la regola della mano destra indica che il campo impresso agisce in modo da spostare le cariche (positive) verso l'estremo B, che quindi deve trovarsi a potenziale minore]

b) Come si scrive la potenza P erogata dal motore per mantenere costante la velocità di rotazione?

P = …………………………………… $\Delta V^2/R = B_0^2 \omega_0^2 L^4/R$ [poiché la barretta ruota a velocità uniforme e si suppone assenza di attrito, il motore deve fornire una potenza hce, in base a ragionamenti di bilancio energetico, deve essere pari alla potenza dissipata per effetto Joule]

6. Un sistema è realizzato con due armature conduttrici circolari di raggio a = 10 cm poste parallelamente tra loro a distanza reciproca d = 2.0 mm. Lo spazio tre le armature è **riempito** per metà da un materiale 1 debolmente conduttore con resistività $\rho_1 = 1.0\text{x}10^3$ ohm m e per metà da un materiale 2, anch'esso debolmente conduttore, ma di resistività $\rho_2 = 5.0\text{x}10^3$ ohm m. Questi materiali sono disposti in modo da riempire lo spazio rispettivamente compreso tra un'armatura ed il piano collocato a distanza $d/2$ da questa, e da qui fino all'altra armatura. I materiali sono a contatto elettrico con le armature. Entrambi i materiali hanno la costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m. Le armature sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale continua V_0 = 50 V e il sistema ha raggiunto l'equilibrio.



Disegno non in scala!!

a) Quanto vale la carica Q che si deposita alla superficie di separazione tra i due materiali 1 e 2?

Q = ……………………………………= .... C $(E_2 - E_1)\, \pi a^2 \varepsilon_0 = (2/d) V_0 ((\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)) \pi a^2 \varepsilon_0 = 9.2\text{x}10^{-9}$ C [il sistema si comporta come un resistore, o meglio come una serie di due resistori (1 e 2). Dato che le armature sono molto estese laterlamente e poco distanti l'un l'altra, si possono trascurare gli effetti ai bordi e quindi si può supporre che i campi elettrici nei due materiali, $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$, siano ortogonali alle armature ed **uniformi** all'interno delle due armature. La condizione sulla differenza di potenziale implica allora: $E_1 d/2 + E_2 d/2 = (E_1+E_2)d/2 = V_0$. I campi hanno intensità diversa, ma, poiché la corrente fluisce in modo uniforme e la densità di corrente deve essere la stessa nei due materiali (per la continuità della corrente), le intensità sono legate dalla relazione: $j_1 = E_1 / \rho_1 = j_2 = E_2 / \rho_2$. Unendo le due equazioni si ottiene : $E_1 = (2/d)V_0\rho_1/(\rho_1+\rho_2)$; $E_2 = (2/d)V_0\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica (sempre di raggio a) con l'asse parallelo all'asse del condensatore e con le superfici di base una nel materiale 1 e l'altra nel materiale 2 permette di legare la discontinuità del campo alla carica che si accumulal sull'interfaccia: $E_2 - E_1 = Q/(\pi a^2 \varepsilon_0)$, da cui la soluzione]

b) Quanto valgono in modulo, direzione e verso i campi magnetici $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ misurati ad una distanza r = 5.0 cm rispetto all'asse passante per i centri delle due armature all'interno dei materiali rispettivamente 1 e 2? [Usate il valore $\mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]

Direzione e verso dei campi: .... direzione tangenziale e verso stabilito dalla regola della mano destra; infatti la presenza di campo magnetico è dovuta alla corrente che fluisce nel sistema e che ha direzione assiale

B_1 = ……………………………………= .... T $\mu_0 J \pi r^2/(2\pi r) = \mu_0 V_0 r/(d(\rho_1+\rho_2)) = 2.6\text{x}10^{-7}$ T [dal teorema di Ampere calcolato su un percorso circolare di raggio r ; la corrente concatenata a questo circuito è data dal flusso di $\boldsymbol{j}$ nel cerchio delimitato dalla circonferenza. L'espressione di j è stata determinata nella risposta al punto precedente]

B_2 = ……………………………………= .... T $B_1 = 2.6\text{x}10^{-7}$ T [dato che $\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{j_2}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/7/2007 Firma: