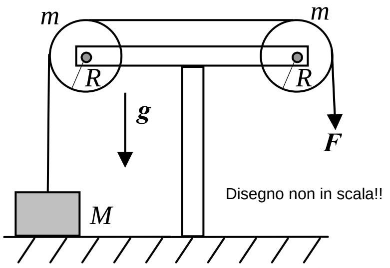
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 14/2/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1) Una macchina per il sollevamento di carichi è costituita da due pulegge identiche, realizzate con due dischi pieni ed omogenei di massa m = 10 kg e raggio R = 20 cm in grado di ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse. Gli assi delle due pulegge sono imperniati ad una struttura rigida come indicato schematicamente in figura. Un filo inestensibile di massa trascurabile è avvolto attorno ai dischi; ad una estremità del filo è attaccato un blocco di massa M = 200 kg; all'altra estremità è applicata una forza costante $\boldsymbol{F}$.diretta verticalmente come indicato in figura. Inizialmente il blocco è poggiato al suolo. [Nelle risposte numeriche usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a. Quanto deve valere il modulo della forza F se si vuole che la fune sia tesa e il corpo resti fermo ed appoggiato al suolo? [Si tratta ovviamente di un "valore limite", nel senso che per valori appena superiori il blocco si stacca dal suolo...]
F = ……………………………. = ………. N Mg = 2.0x10^3 N [nelle condizioni considerate la forza peso Mg è equilibrata dalla tensione T della fune; essendo il sistema all'equilibrio, la tensione della fune è pari in ogni suo punto ad Mg, per cui $F = T = Mg$. Notate che si suppone che in questa situazione limite la reazione vincolare del suolo si annulli]

b. Supponendo che all'istante t_0 = 0 la forza applicata alla fune diventi istantaneamente di modulo $F = F'$ = 3.0x10^3 N, cioè sia tale da mettere in movimento verso l'alto il blocco, e che questo valore di forza si mantenga **costante**, quanto vale, in modulo, l'accelerazione a' che il blocco ha all'istante t' = 10 s? [Supponete che la fune non slitti sulla gola delle pulegge e trascurate ogni forma di attrito o forza dissipativa]
a' = ……………………………. = ………. m/s^2 $(F'-Mg)/(M+m)$ = 5.0 m/s^2 [l'equazione del moto del blocco, scritta per un sistema di riferimento orientato verso l'alto, recita $a = (T_1/M) - g$, dove T_1 è la tensione della fune nel tratto tra puleggia e blocco. Detta T_2 la tensione della fune nel tratto tra le due pulegge, per il moto rotatorio della prima puleggia deve essere $\alpha_1 = (T_2-T_1)R/I$, con α_1 accelerazione angolare della puleggia stessa e I suo momento di inerzia. L'equazione del moto rotatorio della seconda puleggia si scrive invece $\alpha_2 = (F'-T_2)R/I$, dove abbiamo posto attenzione nei segni usati, in modo che per un sollevamento del blocco, cioè per $a > 0$, si ha accelerazione angolare positiva per le due pulegge (il loro moto avveine in senso orario rispetto al disegno). Le tre equazioni vanno complementate con le relazioni tra accelerazioni angolari ed accelerazione lineare che, supponendo ragionevolmente che la fune non strisci sulla gola delle pulegge, si scrivono $a = \alpha_1/R = \alpha_2/R$. Tenendo conto che $I = mR^2/2$ (il momento di inerzia di un disco, ed entrambi le pulegge hanno lo stesso momento di inerzia) si ottiene la soluzione. Notate che l'accelerazione è uniforme e costante e quindi non cambia con il tempo]

c. Quanto vale il lavoro L' che la forza F' di cui al punto precedente compie nell'intervallo di tempo da t_0 = 0 a t' = 10 s?
L' = …………………………………........ = ... J $Mg(a/2)t'^2+(M/2)(at')^2+2(I/2)(at'/R)^2 = (a/2)t'^2(Mg+(M+m)a) = (t'^2/2)((F'-Mg)/(M+m))F'$ = 7.4x10^5 J [per il bilancio energetico, supponendo trascurabili le forze dissipative e tenendo conto che inizialmente il blocco è poggiato al suolo e tutto il sistema è fermo, deve essere $L = \Delta U_g + \Delta E_k = Mgh' + (M/2)v'^2 + 2(I/2)\omega'^2$, dove h' e v' sono quota e velocità del blocco all'istante considerato ed ω' è la velocità delle pulegge (sono due, identiche, e quindi si è moltiplicato per un fattore 2 il termine di energia cinetica di ognuna). Poiché il moto del blocco è uniformemente accelerato e la fune non slitta sulle gola delle pulegge, si ha $h'=(a/2)t'^2$, $v' = at'$, $\omega' = v'/R$, da cui la soluzione]

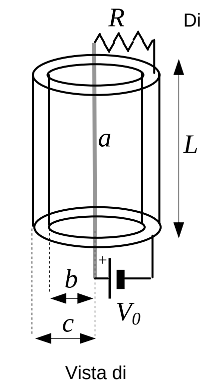
2) Una quantità n = 2.00x10^{-1} moli di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza di trasformazioni **reversibili**: espansione isobara A → B, trasformazione a volume costante B → C, compressione isobara C → D, trasformazione a volume costante D → A. Il volume del gas al punto A del ciclo vale V_A = 8.31 litri, la sua temperatura è T_A = 1000 K e si sa che $V_B = 2V_A$ e che $T_C = T_B/2$ [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la cost. gas perf.]

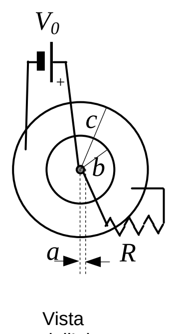
a) Quanti vale il numero N di cicli che il gas deve compiere se si vuole che il lavoro **totale** prodotto sia L_{TOT}=8.31x10^5 J?
N = …………………………………… = …….. cicli $L_{TOT}/(nRT_A/2) = 2L_{TOT}/(nRT_A)$ = 1000 cicli [per ogni ciclo si produce un lavoro $L = P_A(V_B-V_A)+P_C(V_D-V_C)$, dato che nelle isocore il lavoro è nullo. Disegnando il ciclo, si capisce facilmente che $V_A=V_D$ e $V_B=V_C$, per cui $L = (P_A - P_C)(V_B-V_A)$ (è l'area del rettangolo che descrive il ciclo). Notando che $P_A = P_B$ e che $P_B/P_C = T_B/T_C$ (un'isocora connette questi punti), si può scrivere $L = P_AV_A(1-T_C/T_B)(V_B/V_A-1)$; usando i rapporti tra le varie grandezze espressi nel testo si ha $L = P_AV_A/2 = nRT_A/2$. A questo punto il numero di cicli si ottiene semplicemente notando che $L_{TOT}=NL$]

b) Quanto vale il calore **totale** $Q_{ASS,TOT}$ che il gas deve assorbire per produrre il lavoro **totale** L_{TOT}?
$Q_{ASS,TOT}$ = …………………………………… = …….. J $NQ_{ASS} = N(nc_P(T_B-T_A)+nc_V(T_A-T_D)) = (13/2)N(nRT_A/2) = (13/2)\ L_{TOT}$ = 5.40x10^6 J [il calore viene assorbito dal gas nelle trasformazioni A → B e D → A e la sua espressione relativa ad un singolo ciclo vale $Q_{ASS} = nc_P(T_B-T_A)+nc_V(T_A-T_D)$, dove si è tenuto conto della natura rispettivamente isobara ed isocora delle due trasformazioni. D'altra parte per l'isobara è $T_B/T_A = V_B/V_A$ e per l'isocora è $T_D/T_A = P_D/P_A = P_C/P_B= T_C/T_B$, da cui, ricordando le espressioni dei calori specifici per un gas perfetto monoatomico, $Q_{ASS} = nRT_A\ ((5/2)(V_B/V_A - 1)+(3/2)(1-T_C/T_B))$. Usando i rapporti tra le varie grandezze espressi nel testo, si ha $Q_{ASS} = nRT_A(5/2+3/4) = 13nRT_A/4$. Alla soluzione si perviene notando che $Q_{ASS,TOT} = NQ_{ASS}$]

c) Quanto vale il calore **totale** $Q_{CED,TOT}$ che il gas deve cedere per produrre il lavoro **totale** L_{TOT}?
$Q_{CED,TOT}$ = …………………………………… = …….. J $L_{TOT}-Q_{ASS,TOT} = -(11/2)L_{TOT}$ = -4.57x10^6 J [dall'uguaglianza $L = Q_{ASS}+Q_{CED}$ valida per ogni ciclo, ed anche per il totale dei cicli]

Disegni non in scala!!





3) Un cavo coassiale è un sistema fatto da un lungo e sottile filo di raggio a = 1.0 mm e lunghezza L = 1.0 m coassiale rispetto a un guscio cilindrico spesso di raggio interno b = 1.0 cm e raggio esterno c = 2.0 cm (la lunghezza del guscio cilindrico è pari ad L). Filo e guscio sono entrambi realizzati con un materiale buon conduttore. Il sistema, inizialmente scarico, viene collegato ad un generatore ideale di differenza di potenziale continua V_0 = 10 V e ad un resistore elettrico, di resistenza R = 5.0 ohm, disposti come schematizzato in figura. [Nella soluzione tenete conto della geometria del sistema, trascurando gli "effetti ai bordi"; usate i seguenti valori numerici per costante dielettrica e permeabilità magnetica del vuoto: ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m, μ_0 = 4πx10^{-7} T m/A]

a) Quanto valgono, in condizioni stazionarie (ovvero di equilibrio elettrostatico) le cariche elettriche Q_a, Q_b, Q_c che si trovano sulle superfici cilindriche di raggio $r = a$, $r = b$, $r = c$, rispettivamente? [Può farvi comodo ricordare che $ln(10)$~2.3]

Q_a = …………………………………… ~ ……….. C $V_0 2\pi\varepsilon_0 L/(ln(b/a))$ ~ $2.4\text{x}10^{-10}$ C [all'equilibrio, si instaura una differenza di potenziale $\Delta V_{ba} = -V_0$, mentre è anche $\Delta V_{bc} = 0$ (un conduttore in equilibrio è equipotenziale). Dunque deve essere $V_0 = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. D'altronde il campo nella regione $a<r<b$ ha direzione radiale (trascurando gli "effetti ai bordi") e la sua dipendenza da r può essere determinata applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica (le basi non contano essendovi nullo il flusso) coassiale al sistema e di raggio r generico, tale da raqcchiudere la carica Q_a. Si ha: $\Phi(E) = 2\pi r L E(r) = Q_a/\varepsilon_0$, cioè $E(r) = Q_a/(2\pi L r)$. Sostituendo nell'espressione della differenza di potenziale, risolvendo l'integrale e riarrangiando si ottiene la soluzione]

Q_b = …………………………………… ~ ……….. C $-Q_a = -2.4\text{x}10^{-10}$ C [poiché il campo nel guscio, cioè per $b<r<c$, deve essere nullo (si è in un conduttore all'equilibrio), applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio generico $b<r<c$ e tenendo conto della simmetria cilindrica, si ha che la carica che vi è contenuta deve essere nulla, da cui la risposta]

Q_c = …………………………………… = ……….. C 0 [dato che il sistema è inizialmente scarico ed il generatore non fa altro che spostare in posti diversi cariche di segno diverso, il guscio non può portare altra carica rispetto a quella che si trova ad $r=b$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime, da cosa dipende e quanto vale (se si sa dire) il campo elettrico $\mathbf{E}$ nelle tre regioni di spazio caratterizzate da $a<r<b$, $b<r<c$ e $r>$c? Discutete e commentate facendo riferimento anche a direzione e verso. [Notate che le tre regioni considerate si trovano tra filo e guscio, all'interno del guscio, all'esterno del guscio]

Discussione e commento: ………………………………………… [a causa della geometria del problema e della conseguente simmetria di tipo cilindrico (trascurando gli effetti ai bordi!), il campo elettrico, laddove esiste, deve avere direzione radiale. Il verso è stabilito dal segno delle cariche. Si può subito affermare che per $b<r<c$ il campo è nullo, dato che ci si trova all'interno di un conduttore all'equilibrio. Per determinare il campo nella regione $a<r<b$ si applica il teorema di Gauss usando una superficie chiusa cilindrica di raggio r generico; notando che il flusso è nullo attraverso le superfici di base del cilindro e costante sulla superficie (per simmetria il campo può dipendere solo da r , ed r è costante sulla superficie), si ha $2\pi r L = Q_a/\varepsilon_0$, avendo riconosciuto come Q_a la carica contenuta ll'interno della superficie. Da qui si ricava $E(r) = Q_a/(2\pi\varepsilon_0 L r) = V_0/r\ (ln(b/a))$; il verso è positivo, cioè "uscente", dato che la carica è positiva. Al di fuori del guscio, cioè per $r>c$, si può applicare ancora Gauss su una superficie chiusa cilindrica di raggio $r>c$. Poiché la carica contenuta in questa superficie risulta essere $Q_a+Q_b+Q_c = 0$, il campo deve essere nullo per $r>c$]

c) Come si esprime, da cosa dipende e quanto vale (se si sa dire) il campo magnetico $\mathbf{B}$ nelle tre regioni di spazio caratterizzate da $a<r<b$, $b<r<c$ e $r>$c? Discutete e commentate facendo riferimento anche a direzione e verso.

Discussione e commento: ………………………………………… [nel problema ci sono evidentemente delle correnti che scorrono la cui intensità può essere determinata dalla legge di Ohm: $I = V_0/R$. Sicuramente una corrente di questa intensità scorre all'interno (o sulla superficie) del filo, essendo diretta "verso l'alto" rispetto alla figura. La simmetria (cilindrica) del problema suggerisce che il campo magnetico, dove presente, sia diretto tangenzialmente, cioè le sue linee di campo creano tante circonferenze coassiali con l'asse del sistema; il verso è stabilito dalla regola della mano destra. Poiché la simmetria impone anche che il campo magnetico può dipendere solo da r , è facile applicare il teorema di Ampere su una circuitazione lungo una di queste circonferenze, di raggio r generico. Per $a<r<b$ si ottiene: $2\pi r B = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 V_0/R$, da cui $B(r) = \mu_0 V_0/(R 2\pi r)$, avendo riconosciuto come concatenata alla circuitazione la corrente che scorre nel filo. È anche facile affermare che $B = 0$ per $r>c$: infatti applicando ancora il teorema di Ampere a questo caso si nota come la corrente concatenata sia nulla, essendo data dalla somm algebrica di quella chescorre nel filo e quella che scorre nel guscio (uguali ed opposte per come è costruito il sistema). Prevedere il campo all'interno del guscio (cioè per $b<r<c$) richiede un piccolo sforzo di modellizzazione. Si può infatti supporre che la corrente che scorre nel guscio si muova sulla superficie esterna del guscio stesso a causa della "repulsione" esercitata dalle cariche sul filo. Questa affermazione è compatibile sia con il verso della forza magnetica (Lorentz) esercitata dal campo magnetico prodotto dalla corrente che scorre sul filo, sia dagli effetti del campo elettrico, che rendono "negativa" la carica accumulata sulla faccia interna del guscio. Con questa approssimazione, il campo per $b<r<c$ ha la stessa espressione del campo per $a<r<b$. Tuttavia non si possono escludere altre considerazioni, basate su ragionamenti più avanzati, che potrebbero condurre ad affermazioni anche completamente diverse]

d) Com'è fatto (modulo, direzione e verso) il vettore di Poynting $\mathbf{S}$ nelle varie regioni considerate sopra?

Discussione e commento: ………………………………………… il vettore di Poynting, essendo definito come prodotto vettoriale $\mathbf{E}\text{x}\mathbf{B}/\mu_0$ è non nullo solo dove sono non nulli i campi elettrico e magnetico, cioè esiste solo nella zona $a<r<b$. In questa zona il suo modulo, espresso in funzione di r , vale $(V_0^2/R)/(2\pi r^2)$, la direzione è assiale ed il verso è quello verso l'alto di figura. Tenendo presente il significato fisico del vettore di Poynting come densità superficiale di potenza, e notando che la potenza viene trasferita dal generatore al carico (la resistenza), direzione e verso sono in perfetto accordo con quanto si può immaginare qualitativamente]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 14/2/2008 Firma: