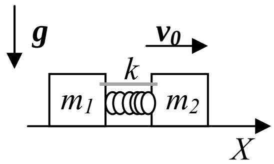
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 6/6/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1/2**

1. Un sistema è composto da due blocchi di massa m_1 = 1.0 kg e $m_2 = 3m_1$ che possono muoversi con **attrito trascurabile** lungo la direzione **orizzontale** X. Attaccata al blocco 1 si trova una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 12 N/m, che funge da "respingente". Inizialmente i due blocchi sono legati da una corda inestensibile di massa trascurabile, che mantiene compressa la molla per un tratto Δ = 0.50 m; in queste condizioni essi si muovono come un solo corpo con velocità uniforme e costante di modulo v_0 = 1.0 m/s nel verso positivo dell'asse X, come indicato in figura.



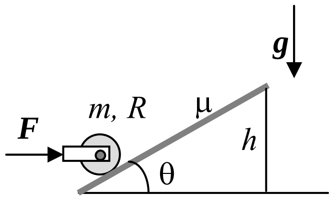
a) All'istante t_0 = 0 la corda si spezza e la molla comincia ad estendersi: quanto vale, **subito dopo** la rottura della corda, l'accelerazione **relativa** dei due blocchi $a_{REL} = a_2 - a_1$? [Esprimete il **modulo** di questa accelerazione]
a_{REL} = …………………………………… = ... m/s^2 $k\Delta/\mu = k\Delta\ (1/m_1+1/m_2) = (4/3)k\Delta/m_1$ = 8.0 m/s^2
[l'equazione del moto relativo stabilisce $a_{REL} = F_{INT}/\mu$, dove la forza di interazione è, in questo caso, $F_{INT} = k\Delta$, da cui la soluzione]

b) Si riscontra che all'istante t' = 10 s i due blocchi si ritrovano completamente separati l'un l'altro (cioè la molla non è più a contatto con il blocco 2 ed ha una lunghezza pari a quella di riposo). Quanto valgono le velocità dei due blocchi, v_1 e v_2 , in queste condizioni? [Scrivete le componenti delle velocità lungo X, cioè esprimete anche il segno]
v_1 = …………………………………… = ... m/s $4v_0 - 3(v_0+(k/(12m_1))^{1/2}\Delta)$ = -0.50 m/s $L/g)^{1/2}/(4\pi)$ ~ 3.6x10^{-2} s   [il sistema è isolato e non ci sono dissipazioni, per cui valgono le conservazioni di quantità di moto (lungo X) ed energia meccanica, cioè: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v_0$ e $(m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2 = ((m_1+m_2)/2)v_0^2+(k/2)\Delta^2$. Impiegando la condizione $m_2=m_1$ le espressioni diventano più maneggevoli: $v_1+3v_2=4v_0$ e $v_1^2+3v_2^2=4v_0^2+k\Delta^2/m_1$. Queste due equazioni danno luogo ad un sistema che conduce ad un'equazione algebrica del secondo grado la cui soluzione per v_2 è: $v_2 = v_0 \pm (k/(12m_1))^{1/2}\Delta$. La scelta del segno si fa notando che ci si aspetta che v_2 aumenti la sua velocità (positiva nel riferimento adottato). Inoltre la conservazione della quantità di moto fornisce $v_2 = 4v_0-3v_2$, da cui la soluzione]
v_2 = …………………………………… = ... m/s $v_0+(k/(12m_1))^{1/2}\Delta$ = 1.5 m/s   [vedi sopra]

c) Sapendo che all'istante t_0 = 0 il sistema dei due blocchi, considerato globalmente come puntiforme, passa per l'origine del sistema di riferimento e supponendo che all'istante t' considerato nella domanda precedente la coordinata del blocco 2 valga x'_2 , come si esprime la coordinata x'_1 del blocco 1 allo stesso istante? [**Non usate** valori numerici per questa risposta, ma solo i dati letterali del problema]
x'_1 = …………………………………… $(m_1+m_2)v_0t'/m_1-(m_2/m_1)x'_2=4v_0t'-3x'_2$ [essendo il sistema isolato, il suo centro di massa si muove come si muoveva prima della rottura della corda, cioè di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. La sua legge oraria del moto è, per un istante generico t : $x_{CM}=v_0t$, dove si è tenuto conto del fatto che all'istante iniziale si ha x_{CM0} =0 . D'altra parte per definizione è sempre $x_{CM}=(m_1x_1+m_2x_2)/(m_1+m_2)$, da cui la soluzione]

-- **PARTE 3**

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa m = 1.0 kg e raggio R = 10 cm, sale lungo un piano inclinato (angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale) scabro (coefficiente di attrito statico μ = 0.70) sotto l'azione di una forza uniforme e costante $\boldsymbol{F}$ orizzontale applicata all'asse del cilindro tramite un giogo di massa trascurabile come rappresentato in figura. Il modulo di questa forza vale F = 20 N: si osserva in queste condizioni che il cilindro risale sul piano rotolando **senza strisciare**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$ = 0.50 e $cos(\pi/6)$ = 0.87; considerate trascurabile l'attrito dovuto alla rotazione del cilindro attorno all'asse solidale al giogo]



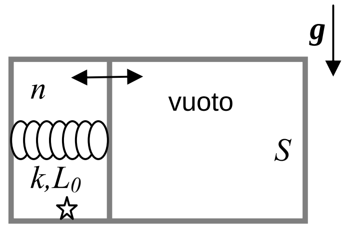
a) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della forza di attrito F_A tra generatrice del cilindro e piano inclinato?
F_A = …………………………………… = ……….. N $(F\ cos\theta - mgsin\theta)/(1+mR^2/I) = (F\ cos\theta - mgsin\theta)/3$ = 4.2 N   [l'equazione del moto rotazionale si scrive $\alpha = a_{CM}/R = F_AR/I$, con $I = (m/2)R^2$ momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo per rotazione attorno al suo asse. L'equazione del moto traslazionale del centro di massa del cilindro si scrive: $a_{CM} = (Fcos\theta-mgsin\theta-F_A)/m$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per F_A si ottiene la soluzione. Notate che, come è facile verificare, questo valore della forza di attrito è "compatibile" con il coefficiente di attrito dato, cioè la scabrosità del piano inclinato è sufficientemente alta da garantire le condizioni di rotolamento puro]

b) Supponendo che all'istante $t_0 = 0$ il cilindro si trovi fermo alla base del piano e che a partire da questo istante esso risenta della forza $\boldsymbol{F}$ di cui al punto precedente, e sapendo che l'altezza del piano inclinato è $h = 2.0$ m, quanto vale la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro quando questo raggiunge la sommità del piano inclinato?

v_{CM} = …………………………………… ~ ……….. m/s $((4h/3)(F\cos\theta/(m\sin\theta)-g))^{1/2} \sim 8.1$ m/s

[la soluzione si può ottenere con due approcci, basati sulla legge oraria del moto e sul bilancio energetico. Nel primo caso, dalla soluzione del punto precedente si nota che $a_{CM}=F_AR^2/I=2F_A/m=2(F\cos\theta -mg\sin\theta)/(3m)$ è costante ed uniforme. Quindi $v_{CM}=a_{CM}t'$, dove t' è il tempo necessario alla salita per il piano, che ha lunghezza $l=h/\sin\theta$; per un moto uniformemente accelerato come quello considerato (con partenza da fermo), si ha: $t'=(2l/a_{CM})$. Quindi $v_{CM}=((2h/\sin\theta)a_{CM})^{1/2}$: Un metodo più rapido si basa sul bilancio energetico, che, detto $L = Fl\cos\theta = Fh\cos\theta/\sin\theta$, impone: $L = (m/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2+mgh$. Per il rotolamento puro si ha $\omega = v_{CM}/R$, da cui, usando come sopra $I = (m/2)R^2$ e rimaneggiando l'algebra, si ottiene una soluzione identica a quella trovata prima]

3. Un recipiente cilindrico con area di base $S = 10$ cm^2 è realizzato di materiale termicamente isolante ed è suddiviso in due parti da un setto, anch'esso fatto di materiale termicamente isolante, che può scorrere senza attrito in direzione orizzontale. Una delle due parti in cui è suddiviso il recipiente contiene una quantità $n = 2.00\text{x}10^{-1}$ moli di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, mentre dall'altra parte è stato fatto il vuoto pneumatico. Una molla, di massa e volume trascurabile, collega il setto con una delle basi del cilindro, come rappresentato in figura; la molla ha costante elastica $k = 8.31\text{x}10^2$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 10$ cm. Inizialmente il sistema è all'equilibrio e la temperatura del gas è $T_0 = 300$ K. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]



a) Quanto vale il volume V_0 occupato inizialmente dal gas?

V_0 = …………………………………… = …….. m^3 $L_0S(1+(1+4nRT_0/(kL_0^2))^{1/2})/2=$ $8.25\text{x}10^{-4}$ m^3

[all'equilibrio la forza di pressione P_0S deve essere bilanciata dalla forza elastica $k(L-L_0)$, dove $L_0=V_0/S$ è la lunghezza della parte di recipiente occupata dal gas. Dalla legge dei gas perfetti deve poi anche essere $V_0 = nRT_0/P_0=nRT_0/(k(V_0/S-L_0))$. Da qui si ottiene l'equazione algebrica del secondo grado: $kV_0^2/S^2-kL_0V_0/S=nRT_0$, la cui soluzione fornisce la risposta; notate che delle due soluzioni possibli dell'equazione di secondo grado solo una è fisicamente possibile (l'altra fornirebbe un volume negativo…)]

b) Supponete ora che nella parte "di sinistra" del recipiente oltre all'Elio sia contenuta anche una piccola carica esplosiva, di **volume e massa trascurabili**. Ad un dato istante, questa carica esplode liberando una quantità di energia Q. Passato un certo tempo, necessario ad avere di nuovo condizioni di equilibrio, si osserva che il volume del gas è raddoppiato, cioè vale $V' = 2V_0$. Come si esprime l'energia Q liberata nell'esplosione? [Per questa risposta **non** usate valori numerici, ma fate riferimento ai valori letterali dei parametri noti del problema]

Q = …………………………………… $(k/2)(V_0/S)(3V_0/S-2L_0+2V_0/S-L_0)=(kV_0/(2S))(5V_0/S-3L_0)$ [per il primo principio, essendo il sistema isolato termicamente, deve essere $Q = W + \Delta U$ dove W è il lavoro compiuto dal gas contro la forza della molla e $\Delta U = nc_V\Delta T$ è la variazione di energia interna del gas. Nella trasformazione considerata, che è sicuramente **irreversibile**, il gas compie il suo lavoro per estendere la molla dal valore $L=V_0/S$ al nuovo valore $L'=V'/S=2L$, per cui $W = -L_{ela}=\Delta U_{ela} = (k/2)(L'-L_0)^2-(k/2)(L-L_0)^2=(k/2)((2L-L_0)^2-(L-L_0)^2) = (k/2)(3L^2-2LL_0)=(k/2)(V_0/S)(3V_0/S-2L_0)$. La variazione di energia interna del gas è $\Delta U=nc_V\Delta T=(nc_V/(nR))(P'V'-P_0V_0)=(3/2)V_0(2P'-P_0)$. Poiché lo stato finale, a volume $V'=2V_0$, è ancora di equilibrio, si ha $P'=k(L'-L_0)/S=k(V'/S-L_0)/S=(k/S)(2V_0/S-L_0)$, per cui si può scrivere: $\Delta U=(3k/2)(V_0/S)(2V_0/S-L_0)$. La soluzione si trova sommando algebricamente i due termini e manipolando un po' l'algebra. Per curiosità, il valore numerico corrispondente è $Q = 1.9\text{x}10^6$ J, una bella botta!]

--- PARTE 4

4. Un dispositivo elettrico è costituito da due gusci cilindrici (di spessore trascurabile) coassiali fatti di materiale buon conduttore, entrambi di lunghezza $L = 20$ cm e di raggio rispettivamente $a = 5.0$ mm e $b = 1.0$ cm. Lo spazio tra i due gusci è riempito con un materiale **debolmente conduttore**, con conducibilità $\sigma_C = 1.0\text{x}10^{-6}$ (ohm m)$^{-1}$. I due gusci sono collegati ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 20$ V (il polo positivo è collegato al guscio di raggio a e quello negativo al guscio di raggio b). [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto, che vale anche per il materiale debolmente conduttore impiegato per riempire lo spazio tra i due gusci, e considerate trascurabili gli "effetti ai bordi"]

a) Quanto vale la carica Q che si trova sull'armatura interna in condizioni stazionarie?

Q = …………………………………… ~ ……… C $V_0 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(b/a) \sim 3.2\text{x}10^{-10}$ C [il sistema si comporta come un condensatore cilindrico. Per trovare la carica occorre determinare la funzione $E(r)$ attraverso Gauss su una scatola cilindrica coassiale di raggio $a<r<b$ generico (il campo è ovviamente radiale e dipendente solo da r per simmetria, dato che si considerano trascurabili gli effetti ai bordi); si ottiene facilmente $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 Lr)$. Quindi, tenendo conto della presenza del generatore che impone una differenza di potenziale tra e armature, si deve avere: $\Delta V = -V_0 = -\int_a^b E(r)dr=(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))\ln(a/b)$, da cui la soluzione]

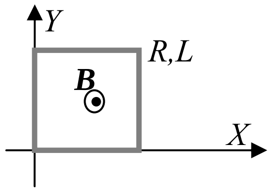
b) Quanto vale la corrente I fornita dal generatore in condizioni stazionarie?

I = …………………………………… ~ ……… A $\int_{SUP} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_{SUP}\sigma_C\, E dS= \sigma_C\, E\int_{SUP} dS = \sigma_C\, E\, 2\pi Lr = \sigma_C(Q/(2\pi Lr\ \varepsilon_0)2\pi Lr = \sigma_C Q/\varepsilon_0 =\sigma_C\ V_0 2\pi L/\ln(b/a) \sim 3.6\text{x}10^{-5}$ A [a causa della presenza del materiale debolmente conduttore, tra le armature (i gusci cilindrici) si determina una corrente la cui densità è $\boldsymbol{j} = \sigma_C \boldsymbol{E}$. Questa denistà di corente è radiale e dipendente solo da r così come il campo elettrico. Calcolandone il flusso attraverso una superficie cilindrica coassiale alle altre e di raggio $a<r<b$ generico si ottiene il risultato che, come deve essere, non dipende da r (la corrente è la stessa attraverso tutte le superfici cilindriche coassiali). Ovviamente il calcolo del flusso à banale, dato che il campo, e quindi la densità di corrente, sono uniformi su tutta la superficie, ed il flusso non è altro che il semplice prodotto della densità di corrente per la superficie (laterale) del cilindro. Se confrontate il risultato con quello stabilito per la geometria piana , dove la resistenza è espressa come $R=l/(S\sigma_C)$, potete notare che in questo caso il rapporto l/S (lunghezza su sezione per un ordinario conduttore circolare) vale $\ln(b/a)/(2\pi\, L)$, un'espressione ben diversa rispetto a quella che si trova nella geometria piana!]

c) Come si scrive l'espressione della corrente $I(t)$ nel caso in cui il generatore in continua di cui alla domanda precedente venga rimpiazzato con un generatore di differenza di potenziale alternata $V(t) = V_0 cos(\omega t)$? Commentate, supponendo che il valore di ω sia sufficientemente basso da poter trascurare effetti di irraggiamento elettromagnetico.

Commento: ……………………………………… il circuito è equivalente ad un parallelo di resistore e capacità, i cui valori di resistenza e capacità possono essere facilmente determinati dalle risposte alle domande precedenti. In condizioni alternate la corrente passa in parte per la resistenza, dando un contributo $V(t)/R$, e in parte va verso le armature del condensatore (e se ne torna indietro continuamente). Questo termine di corrente si esprime come $dQ/dt=CdV/dt$. La corrente complessiva è data dalla somma dei due termini: $I(t) = V(t)/R + CdV(t)/dt = (V_0/R)(cos(\omega t)-\omega RCsin(\omega t))$, espressione dalla quale si nota che in condizioni di "bassa frequenza" (ωRC<<1) prevale il termine resistivo, viceversa prevale quello capacitivo, che provoca uno sfasamento di $-\pi/2$ della corrente rispetto alla tensione del generatore. Per precisione, determinando i valori di R e C dalle risposte precedenti, si ha $RC = Q/I \sim 10^{-5}$ s^{-1}; dunque nel sistema considerato si hanno condizioni di "alta frequenza" per $\omega >> 10^5$ rad/s]

5. In una certa regione di spazio insiste un campo magnetico uniforme, ma dipendente dal tempo, $\mathbf{B}(t)$ diretto nel verso positivo dell'asse Z di un riferimento cartesiano. Inizialmente il modulo del campo magnetico vale B_0; quindi all'istante $t_0 = 0$ esso comincia a diminuire in modo **linearmente proporzionale** con il tempo, fino ad annullarsi all'istante t'. Sul piano XY si trova una spira fatta di filo elettrico la cui resistenza vale R; la spira è quadrata ed il lato è L, come rappresentato in figura. [**Non** usate valori numerici, che non avete, ma fate riferimento ai dati letterali noti del problema]



a) Come si esprime e che verso ha la corrente elettrica $I(t)$ indotta nella spira per $t > t_0$? Spiegate **bene** la scelta del verso!

$I(t) =$ ……………………………………… $L^2 B_0/(t'R)$ [per la legge di Ohm $I(t)=fem(t)/R$, dove la forza elettromotrice indotta si trova con la legge di Faraday: $fem(t)=-d\Phi(\mathbf{B}(t))/dS$. Il flusso del campo magnetico che attraversa la spira si ottiene semplicemente moltiplicando l'intensità del campo per l'area L^2 della spira stessa (il campo è uniforme e disposto ortogonalmente al piano della spira). L'andamento temporale dell'intensità del campo è $B(t)=B_0-(B_0/t')t$, come si ottiene **molto facilmente** sfruttando la descrizione data nel testo. Nell'approccio si suppone ovviamente che la variazione del campo magnetico non sia così brusca da creare ulteriori fenomeni di natura elettromagnetica (ad esempio si considera trascurabile l'autoinduzione della spira). Notate che la corrente ottenuta è costante (ma naturalmente esiste solo finché il campo varia, cioè nell'intervallo t_0, t' , al di fuori del quale èi nulla]

Verso (rispetto alla figura) e **spiegazione**: ……………………………………… il verso è antiorario rispetto alla figura; infatti il significato del segno meno nella legge di Faraday, che spesso va sotto il nome di "legge di Lenz", è che il sistema reagisce in modo da creare un controcampo magnetico la cui variazione di flusso bilancia la variazione di flusso del campo esterno. Nel problema considerato questa variazione di flusso è negativa, dato che l'intensità del campo diminuisce. Dunque la corrente indotta nella spira avrà verso tale da creare un controcampo che ha lo stesso verso del campo esterno. Per la regola della mano destra in versione "ciao ciao" questo significa appunto che la corrente deve scorrere in senso antiorario rispetto alla figura.

b) Come si esprime l'**energia** E "dissipata" dalla spira nell'intervallo di tempo t_0, t'?

$E =$ ……………………………………… $L^4 B_0^2 t'/(t'^2 R) = L^4 B_0^2/(t'R)$ [l'energia viene "dissipata" dalla spira perché essa ha comportamento resistivo. La **potenza "dissipata"** , che rappresenta l'energia "dissipata" per unità di tempo, si esprime $W(t) = RI^2(t)=L^4 B_0^2/(t'^2 R)$. L'integrale di questa potenza, che è costante nel tempo, è banale e dà la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 6/6/2008 Firma: