Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 27/6/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

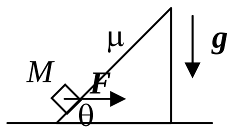
-- **PARTE 1/2**

1. Un razzo giocattolo parte dall'origine di un sistema di riferimento fissato al suolo (asse X orizzontale ed asse Y verticale); il razzo ha massa M = 2.0 kg e la sua velocità iniziale è rappresentata da un vettore di modulo v_0 = 9.0 m/s che forma un angolo $\theta=\pi/3$ rispetto all'orizzontale. Arrivato al **punto di massima altezza** della sua traiettoria, il razzo si separa in due frammenti di massa rispettivamente $m_1 = M/4$ ed $m_2 = 3M/4$ a causa dell'azione di un'esplosione interna; la velocità del frammento 1 rispetto al suolo, misurata subito dopo l'esplosione, è v_1 = 3.0 m/s diretta **orizzontalmente** nel verso positivo dell'asse X. Trascurate ogni forma di attrito nel moto del razzo e dei suoi frammenti, e considerateli puntiformi. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità che è, ovviamente, diretta verticalmente verso il basso; può farvi comodo ricordare che $cos(\pi/3)=1/2$ e $sin(\pi/3)$~0.87]

   a) Quanto vale l'energia E liberata dall'esplosione? [Supponete che l'energia dell'esplosione sia interamente sfruttata per separare fra loro i due frammenti]
   E = …………………………………… = ... J $((M/2)v_0^2cos^2\theta-(m_1/2)v_1^2-(m_2/2)v_2^2)=(M/2)(2v_0v_1cos\theta-v_0^2cos^2\theta-v_1^2)/3)=(M/6)(v_1-v_0cos\theta)^2$= 0.75 J [il sistema è isolato (la forza che provoca la frammentazione è interna) e quindi si conserva la quantità di moto. Nel punto di massima altezza, cioè subito prima della frammentazione, il razzo ha velocità diretta solo orizzontalmente di valore pari alla componente orizzontale della velocità iniziale, $v_0cos\theta$, e si sa che uno dei frammenti ha anche velocità diretta solo orizzontalmente. Dunque anche il frammento 2 avrà velocità solo orizzontale, il cui valore esce dalla conservazione della quantità di moto: $Mv_0cos\theta = m_1v_1+m_2v_2 =M(v_1+3v_2)/4$, da cui $v_2=(4v_0cos\theta - v_1)/3$. Poiché l'esplosione "modifica" l'energia del sistema, deve essere $0 = E + \Delta E$, dove ΔE è la variazione di energia del sistema misurata subito dopo e subito prima della frammentazione. Dato che nel breve intervallo di tempo considerato l'energia potenziale (gravitazionale) non può cambiare (la quota dei componenti del sistema non cambia), si ha $\Delta E = \Delta E_K = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2- (M/2)v_0^2cos^2\theta$, dove si è tenuto in debito conto il fatto che prima dell'urto l'energia cinetica del razzo è data solo dalla componente X della velocità (il razzo non ha movimento verticale), da cui la soluzione]

   b) Quali sono le coordinate x_1 ed x_2 di impatto al suolo dei due frammenti?
   x_1 = …………………………………… ~ .... m $v_0sin\theta(v_0cos\theta+v_1)/g$ ~ 6.0 m -$3(v_0+(k/(12m_1))^{1/2}\Delta)$ = -0.50 m/s $L/g)^{1/2}/(4\pi)$ ~ 3.6x10^{-2} s [l'istante in cui il razzo raggiunge la massima altezza si trova dalla relazione $t' = v_0sin\theta/g$, che si ottiene immediatamente ricordando la legge oraria della velocità nel moto uniformemente accelerato. Poiché la frammentazione avviene proprio nell'istante in cui il razzo raggiunge la massima altezza ed i frammenti non hanno velocità in direzione verticale (vedi sopra), il tempo di discesa è pari a quello di salita, Tenendo conto che il frammento 1 si muove inizialmente (in direzione orizzontale) con la velocità del razzo, $v_0cos\theta$, e quindi, a partire dall'istante t' e per un intervallo pari a t', con la velocità v_1, si ottiene la soluzione]
   x_2 = …………………………………… ~ .... m $8v_0^2sin\theta cos\theta/(3g)-x_1/3=8v_0^2sin\theta cos\theta/(3g)-v_0^2sin\theta cos\theta/(3g)-v_0v_1sin\theta/(3g)= 7v_0^2sin\theta cos\theta/(3g)-v_0v_1sin\theta/(3g)$ ~ 44 m [essendo il sistema isolato, la traiettoria del centro di massa coincide con quella che avrebbe il razzo se rimanesse intatto. La coordinata X di caduta del centro di massa ("gittata") si determina facilmente: $X = 2v_0cos\theta t'=2v_0^2sin\theta cos\theta/g$. Si ha quindi $X = 2v_0^2sin\theta cos\theta/g = (m_1x_1+m_2x_2)/M = (x_1+3x_2)/4$. Da qui, usando anche la soluzione al quesito precedente, si ottiene la risposta]

2. Una piccola cassa di massa M risale lungo un piano inclinato che forma un angolo $\theta=\pi/4$ rispetto all'orizzontale sotto l'azione di una forza $\boldsymbol{F}$ diretta orizzontalmente, come rappresentato in figura. Il piano è scabro e presenta un coefficiente di attrito dinamico μ per il moto della cassa.

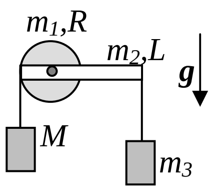


   a) Sapendo che la forza $\boldsymbol{F}$ è **uniforme e costante**, come si scrive l'accelerazione a della cassa nella direzione parallela al piano inclinato? [Considerate positivo il verso orientato verso l'alto e **non usate** valori numerici per questa risposta]
   a = …………………………………… $(Fcos\theta-mgsin\theta-F_{A,D})/m=(Fcos\theta-mgsin\theta-\mu N)/m=(Fcos\theta-mgsin\theta-\mu(mgcos\theta+Fsin\theta))/m=cos\theta((F/m)(1-\mu)-g(1+\mu))$ [nella direzione considerata la cassa subisce la proiezione della forza $\boldsymbol{F}$, la componente "attiva" della forza peso e la forza di attrito dinamico]

   b) Supponendo M = 5.0 kg, F = 1.4x10^3 N, μ = 0.50, e sapendo che l'altezza del piano è h = 5.0 m, quanto vale il lavoro L fatto dalla forza $\boldsymbol{F}$ nell'intero spostamento (da fondo a cima del piano inclinato)? [Attenti a capire **bene** la domanda!]
   L = …………………………………… = …….. J $Fh/tg\theta$ = 5.0x10^3 J [essendo la forza costante, uniforme e diretta lungo la direzione orizzontale, il lavoro è semplicemente pari al prodotto del suo modulo per lo spostamento orizzontale. Notate che il risultato è giusto solo se la forza è sufficiente per muovere fino alla sommità del piano la cassa. Questo può essere facilmente verificando inserendo i valori numerici nell'espressione dell'accelerazione scritta sopra e notando che essa risulta ampiamente positiva]

-- **PARTE 3**

3. Un sistema meccanico è costituito da un disco pieno e omogeneo di raggio R = 50 cm e massa m_1 = m = 10 kg libero di muoversi ruotando senza attrito su attorno ad un perno passante per il suo centro, ed una sottile sbarra omogenea, di lunghezza $L = 4R$ = 2.00 m e massa $m_2 = m_1 = m$. Come mostrato in figura, la sbarra è solidale al disco, essendovi avvitata in modo che il centro del disco si trovi ad una distanza $R = L/4$ dal suo estremo di sinistra (rispetto alla figura); all'estremo di destra è appesa una massa m_3 = 2.0 kg. Inoltre sulla superficie laterale del disco è avvolta una fune inestensibile di massa trascurabile che termine con un blocco di massa M (incognita): il disco si comporta da puleggia e la fune non slitta sulla sua superficie. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto deve valere la massa M del blocco agganciato alla fune affinché la situazione descritta sia di equilibrio? [Considerate orizzontale la direzione della sbarra]

M = ... = ... kg $m_2 + 3m_3$ = 16 kg [l'equilibrio rotazionale del sistema (quello traslazionale è garantito dal vincolo del perno) richiede che siano nulli i momenti delle forze rispetto ad un polo, che qui conviene prendere sul centro del disco. Tenendo conto delle lunghezze dei bracci e del segno dei vari momenti, e del fatto che la forza peso della sbarra si trova applicata al suo centro di massa (a metà lunghezza, essendo la sbarra omogenea), si ha: $MgR = m_2gR+m_3g3R$, da cui la soluzione]

b) Supponendo che all'istante t_0 = 0 la massa m_3 venga staccata dall'estremo della sbarra (la fune che la lega all'estremo della sbarra viene tagliata), quanto vale, in modulo, l'accelerazione angolare α con cui il sistema sbarra+disco comincia a ruotare? [Usate il valore di M determinato nella risposta precedente per la massa del blocco collegato alla puleggia; può farvi comodo ricordare il "teorema degli assi paralleli": $I' = I_{CM}+md^2$, dove I_{CM} è il momento di inerzia per una rotazione attorno ad un asse per il centro di massa di un corpo di massa m generica e d è la distanza tra questo asse ed un altro asse, parallelo al primo, rispetto al quale il momento di inerzia vale I']

α = ... ~ .... rad/s^2 $3m_3gR/((17/12)mR^2) = (36/17)(m_3/m)(g/R)$ = ?? rad/s^2 [essendo il sistema vincolato, occorre considerare rotazioni attorno al perno, cioè il polo è sull'asse del disco. Il momento di inerzia complessivo del sistema vale $I = I'+I_{DISCO}$, dove $I' = I_{CMSBARRA}+m_2R^2$. Poiché $I_{CMSBARRA} = m_2L^2/12=m_216R^2/12=4m_2R^2/3$, mentre $I_{DISCO}=m_1R^2/2$, tenendo conto che $m_1=m_2=m$ si ha $I=(17/12)mR^2$. Dato che nell'istante successivo a $t_0=0$ la sbarra si trova ancora in direzione praticamente orizzontale, i momenti delle forze rispetto al polo considerato valgono complessivaente $MgR-m_2gR=(M-m_2)gR=3m_3gR$, dove si sono scelti segni coerenti con il verso dei vettori momento e della rotazione e si è usata la relazione trovata prima per M, L'equazione del moto rotazionale fornisce allora il risultato]

4. Una macchina termica, che lavora con una quantità n = 2.00x10^{-2} moli di un gas perfetto monoatomico, esegue in ogni ciclo una successione di tre trasformazioni reversibili: espansione adiabatica A→B, compressione a pressione costante B→C, trasformazione a volume costante C→A. Si sa che la temperatura al punto A vale T_A = 900 K e che in ogni ciclo la macchina assorbe dalle sorgenti "calde" una quantità di calore Q_{ass} = 83.1 J. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la minima temperatura T' raggiunta dal gas durante il ciclo?

T' = ... = ... K $T_A-Q_{ass}/((3/2)nR)$ = 567 K [poiché A→B è un'espansione adiabatica, si ha $T_B<T_A$. Inoltre, essendo B→C una compressione isobara, si ha anche $T_C<T_B$. Dunque il punto C è quello a temperatura minore per l'intero ciclo, cioè $T'=T_C$. Il calore viene scambiato solo nelle trasformazioni B→C (dove il gas cede calore) e C→A: quest'ultima è proprio quella in cui il gas acquista calore. Pertanto $Q_{ass}=nc_V(T_A-T_C)=(3/2)nR(T_A-T')$, da cui la soluzione]

b) Sapendo che V_B/V_C = 1.20, quanto vale l'efficienza η del ciclo?

η = ... = ... $1+Q_{ced}/Q_{ass}=1+nc_P(T_C-T_B)/(nc_V(T_A-T_C))=1+(5/3)(T'-T'V_B/V_C)/(T_A-T')=1+(5/3)(1-V_B/V_C)/(T_A/T'-1)$ = 0.424 [il calore ceduto si esprime come $Q_{ced}=nc_P(T_C-T_B)=(5/2)nR(T'-T_B)$. La temperatura T_B si determina a partire da $T_C=T'$ notando che i due punti sono collegati da una isobara: si ha $T_B=T'V_B/V_C$, da cui la soluzione. ATTENZIONE: il valore numerico riportato nel testo distribuito all'esame era errato e conduceva ad una soluzione "assurda" (η<0!): se ne è tenuto conto in fase di correzione degli elaborati]

-- **PARTE 4**

5. Un dispositivo elettrico è costituito da tre dischetti, I, II, III, di sezione S = 10 cm^2 e altezza h = 2.5 cm, disposti l'uno sull'altro (in modo coassiale e tale da porre a contatto coppie di superfici di base). I materiali di cui sono fatti i dischetti sono debolmente conduttori: in particolare, i dischetti I e III sono fatti di materiale con **resistività** ρ_A = 2.0x10^5 ohm m, mentre il materiale del dischetto II ha resistività ρ_B = 4.0x10^5 ohm m. Le superfici di base del sistema dei tre dischetti (cioè le superfici "esterne" dei dischetti I e III) sono ricoperte da elettrodi realizzati di materiale ottimo conduttore; questi elettrodi sono collegati ad un generatore di differenza di potenziale ideale V_0 = 10 V (il polo positivo è collegato all'elettrodo alla base del dischetto I); supponete che il sistema abbia raggiunto condizioni **stazionarie**. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, che vale anche per il materiale debolmente conduttore impiegato per costruire i dischetti, e considerate trascurabili gli "effetti ai bordi"]

a) Quanto vale il campo elettrico nelle tre regioni, E_I, E_{II}, E_{III}? [Indicate in brutta anche direzione e verso; considerate nullo il campo elettrico all'esterno del dispositivo]

E_{I} = …………………………………… = ……… V/m $V_0/(h(2+\rho_B/\rho_A))=1.0\text{x}10^2$ V/m [potendo trascurare gli effetti ai bordi, i campi elettrici sono diretti lungo l'asse del dispositivo (dall'elettrodo negativo a quello positivo) e uniformi all'interno di ogni regione. Deve essere inoltre $V_0=E_Ih+E_{II}h+E_{III}h$; per la continuità della corrente (***J*** costante ed uniforme) si ha anche $E_I/\rho_A = E_{II}/\rho_B = E_{III}/\rho_A$, da cui, immediatamente, $E_I=E_{III}$. Dunque $V_0=E_Ih(2+\rho_B/\rho_A)$, da cui la soluzione]

E_{II} = …………………………………… = ……… V/m $E_I\rho_B/\rho_A=2.0\text{x}10^2$ V/m [vedi sopra]

E_{III} = …………………………………... = ……… V/m $E_I=1.0\text{x}10^2$ V/m [vedi sopra]

b) Quanto valgono, se ci sono, le cariche elettriche Q_{AB} e Q_{BA} presenti, in condizioni stazionarie, sulle interfacce poste rispettivamente tra le regioni I e II e le regioni II e III? [Esprimetene anche il segno]

Q_{AB} = …………………………………… = ……… C $\varepsilon_0(E_{II}-E_I)S=8.8\text{x}10^{-13}$ C [per il teorema di Gauss, ovvero per le condizioni di continuità e discontinuità delle componenti normali dei campi su un'interfaccia piana, si ha $Q_{AB}=\varepsilon_0(E_{II}-E_I)$, come si può facilmente verificare usando per il teorema di Gauss una scatola cilindrica di sezione pari a quella del dispositivo, con asse coincidente con quello del dispositivo e con le superfici di base una nella regione I e l'altra nella regione II. Per la soluzione occorre ricordare, nella definizione di flusso, la presenza di un prodotto scalare per il versore "uscente" dalla scatola, che dà luogo ai segni considerati]

Q_{BA} = …………………………………… = ……… C $-Q_{AB}=-8.8\text{x}10^{-13}$ C [si ottiene o ragionando come sopra oppure applicando Gauss ad una scatola cilindrica con le superfici di base nelle regioni I e III: essendo il flusso del campo elettrico nullo ($E_I=E_{III}$), la carica contenuta deve essere nulla, da cui la soluzione]

6. Un lungo solenoide è realizzato con un numero grande N di spire di filo di resistività trascurabile avvolte in modo da formare una superficie cilindrica di raggio a ed altezza h (con $h>>a$). Il solenoide è collegato ad un generatore di corrente la cui intensità $I(t)$ è variabile nel tempo: inizialmente il generatore è spento e non passa corrente; all'istante t_0 = 0 esso viene acceso e l'intensità di corrente cresce in modo **linearmente proporzionale** al tempo fino a raggiungere il valore I_0 all'istante t'. [Non usate valori numerici, che non ci sono in questo esercizio, ma esprimete la soluzione in funzione dei parametri letterali noti; indicate con ε_0 e μ_0 la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto]

a) Come si esprime l'intensità del campo magnetico $B(t)$ all'interno del solenoide nell'intervallo di tempo 0,t'? [Sfruttate il fatto che il solenoide è molto lungo, ed assumete che il tempo t' non sia "così breve" da creare irraggiamento di "onde elettromagnetiche" e gli effetti associati]

$B(t)$ = …………………………………… $\mu_0NI_0t/(ht')$ [sulla base della descrizione riportata nel testo è facile scrivere: $I(t) = I_0t/t'$. Applicando il teorema di Ampere al solenoide (supposto infinitamente lungo) si trova il risultato. Il campo considerato, visto che il solenoide è "molto lungo", si può ritenere uniforme e diretto assialmente (il campo esterno al solenoide è nullo). Ovviamente questa procedura suppone di poter impiegare un approccio "quasi-stazionario", basato sull'uso di equazioni di Maxwell per condizioni stazionarie o con variazioni temporali limitate; questo è il significato della considerazione riportata fra parentesi]

b) Come si esprime la differenza di potenziale $V(t)$ misurata ai capi del solenoide?

$V(t)$ = …………………………………… $-d\Phi(\mathbf{B}(t))/dt=-N\pi a^2\mu_0NI_0/(ht')$ [per la legge di Faraday, notando che il flusso "concatenato" con il solenoide è, essendo il campo uniforme, pari a $B\pi a^2N$. Notate che questo risultato presuppone che non ci sia una differenza di potenziale "spontaneamente" presente ai capi del generatore di corrente, situazione che rispecchia quella dei generatori di corrente ideali. Nella realtà, poiché la resistenza del filo di cui è fatto il solenoide potrà essere difficilmente ritenuta nulla, così come la resistenza "interna" del generatore, ci sarà anche un contributo legato alle resistenze del sistema e alla caduta di potenziale relativa]

c) Commentate su direzione, verso e intensità del vettore di Poynting che "interessa" il solenoide. [Ricordate che il vettore di Poynting è definito come $\mathbf{S} = \mathbf{E}\text{x}\mathbf{B}/\mu_0$]

Commento: …………………………………… sulla base delle risposte date in precedenza si ha che il campo magnetico è assiale (con verso determinato dalla regola della mano destra, versione "ciao ciao", ed intensità crescente linearmente con il tempo secondo la legge determinata sopra). Per determinare il campo elettrico, osserviamo che sicuramente sarà presente un campo elettrico all'interno del filo del solenoide, dato che in esso scorre corrente. Questo campo ha la stessa direzione e verso della corrente, dunque, se le spire sono realizzate in modo "denso", ha direzione praticamente tangenziale. Notiamo però che, non essendo noti i parametri geometrici del filo e non conoscendone la resistività, questo campo non è determinabile in modo diretto. Inoltre, se si suppone che il filo elettrico sia "molto sottile", il campo magnetico all suo interno, che non si può determinare, può essere considerato nullo, e quindi il campo in questione non contribuisce al vettore di Poynting. Diversa è la situazione per il campo elettrico indotto dalla variazione temporale del campo magnetico. Infatti questo campo è presente in tutto il solenoide; esso è responsabile per la forza elettromotrice determinata dalla legge di Faraday. Nella risposta al punto precedente si è determinato questo campo lungo la linea di circuitazione che comprende il filo del solenoide. Dato che il campo magnetico è uniforme, calcolando il flusso su una superficie contenuta all'interno del solenoide ugualmente si conclude che esiste una forza elettromotrice indotta, e quindi un campo elettrico indotto. L'intensità di questo campo non sarà uniforme (facendo i conti dovrebbe venire che esso varia linearmente con la distanza dall'asse del solenoide), ma, sulla base della risposta precedente, si potrà concludere che esso è costante nel tempo (all'interno dell'intervallo considerato!). Per ragioni di simmetria, la direzione di questo campo è approssimativamente tangenziale (vedi sopra), mentre il suo verso, per Lenz, è opposto a quello della corrente. Di conseguenza il vettore di Poynting sarà non nullo all'interno del solenoide, non uniforme (cresce linearmente con il raggio) e non costante (cresce linearmente con il tempo); la direzione sarà radiale ed il verso entrante nel solenoide. Ricordando che il flusso del vettore di Poynting è rappresentativo della potenza scambiata, questa osservazione è in accordo con il fatto che l'energia (magnetica) viene immagazzinata nel volume racchiuso dal solenoide durante il processo considerato.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 27/6/2008 Firma: