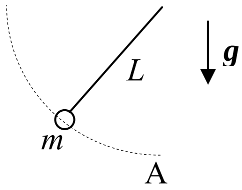
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 17/7/2008

Nome e cognome: …………………………………………………….. **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1/2**

1. Un piccolo sasso di massa m = 200 g è attaccato all'estremità di una fune inestensibile e di massa trascurabile, la cui lunghezza è L = 1.00 m. L'altro estremo della fune è vincolato ad un perno conficcato in una parete rigida verticale: in questo modo il sasso può compiere un movimento, con **attrito trascurabile**, su un piano verticale, come rappresentato in figura. In particolare, in opportune condizioni la traiettoria compiuta dal sasso è circolare; infatti si osserva che quando il sasso passa per la posizione A indicata in figura (il punto "più basso" della traiettoria) con una velocità angolare $\omega_A \geq \omega_{MIN}$, esso percorre una traiettoria circolare completa (cioè fa un "giro della morte"). [Usate il valore g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità che è, ovviamente, diretta verticalmente verso il basso]



   a) Quanto vale ω_{MIN}?

   ω_{MIN} = …………………………………… = ... rad/s $(5g/L)^{1/2}$ = 7.0 rad/s   [affinché il sasso, supposto puntiforme, possa percorrere il giro della morte occorre che esso abbia una velocità angolare ω', misurata nel punto **"più alto"** della traiettoria, almeno tale che $m\omega'^2L = mg$. In queste condizioni, infatti, l'accelerazione centripeta necessaria per percorrere l'orbita circolare viene fornita dalla sola forza peso, mentre la tensione della fune aggiusta il suo valore in modo da annullarsi. Per considerazioni di bilancio energetico, cioè di conservazione dell'energia meccanica, si vede subito che $(m/2)(\omega'^2-\omega_{MIN}^2)L^2+mg2L=0$, da cui $\omega'^2= \omega_{MIN}^2-4g/L$. Inserendo questa espressione nella condizione sopra stabilita si ottiene la soluzione]

   b) Supponendo ora che il sasso passi per la posizione A con una velocità angolare $\Omega = (4/5)\omega_{MIN}$, con ω_{MIN} determinato nella risposta precedente, si osserva che esso non percorre più per intero una traiettoria circolare. quanto vale l'altezza massima h, misurata rispetto alla quota del punto A, raggiunta dal sasso? Per semplicità, rispondete al quesito supponendo che, nel punto di massima altezza, il sasso sia completamente **fermo**. Spiegate poi, in modo breve ma chiaro, se ritenete ragionevole questa approssimazione.

   h = …………………………………… = ... m $\Omega^2L^2/(2g) = (8/5)L$ = 1.60 m   [per la conservazione dell'energia meccanica, $0 = -(m/2)\Omega^2L^2+mgh$, da cui la risposta. Notate che la forza di tensione che la fune esercita sul sasso (questa forza è attiva solo finché la traiettoria è circolare, dato che poi la fune perde la sua tensione) non compie lavoro essendo ortogonale allo spostamento]

   Spiegazione: ...…………………………………… l'approssimazione non è ragionevole. Infatti nel punto di massima altezza il sasso potrà avere una componente di velocità orizzontale. Questa componente può essere calcolata; infatti, dato che la fune può trasferire una forza al sasso, e quindi modificare la sua velocità, solo se rimane tesa, la componente orizzontale della velocità sarà pari a quella che il sasso nell'istante in cui comincia a deviare dalla traiettoria circolare. In tale istante la componente radiale della forza peso è in grado di fornire da sola l'accelerazione centripeta al sasso, cioè, detta ω'' la velocità angolare del sasso subito prima che esso inizi a deviare dalla traiettoria circolare ed α il valore dell'angolo formato dal raggio vettore che punta sul sasso rispetto alla verticale (misurato in modo che α = 0 quando il sasso è nella posizione A) deve essere $\omega''^2L = g\sin\alpha$ In tale istante, come suggerito dalla trigonometria, il sasso si trova ad una quota h' (misurata rispetto al punto A) data da: $h' = L(1+\sin\alpha)$. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha allora: $\omega''^2=\Omega^2-2g/h'=\Omega^2-2g/(L(1-\sin\alpha))$. Deve quindi verificarsi: $g\sin\alpha/L=\Omega^2-2g/(L(1-\sin\alpha))$. Questa equazione consente, con un certo grado di difficoltà algebrica, di determinare il valore dell'angolo α al quale avviene il "distacco", cioè per il quale la traiettoria comincia a non essere più circolare. La velocità orizzontale v_X in questo punto si trova ancora usando un po' di trigonometria; si ha infatti, in modulo, $v_X=\omega''L\cos\alpha$. Poiché da questo istante in poi non agiscono sul sasso forze in direzione orizzontale, questa è la velocità orizzontale del sasso quando esso raggiunge il punto di massima altezza; quindi l'equazione di conservazione dell'energia scritta nella soluzione al quesito precedente dovrebbe essere modificata aggiungendo il termine $(m/2)v_X^2$. Di conseguenza il punto di massima altezza si troverebbe più in basso rispetto a quanto calcolato. Notate infine che tutto il ragionamento si basa sul fatto che il "distacco" avvenga dopo che il sasso ha percorso almeno un quarto di circonferenza, altrimenti il punto di massima altezza apparterrebbe ancora alla circonferenza (precisamente all'arco corrispondente al suo primo quarto). Che questo non si verifichi con i dati del problema si può facilmente trovare notando che, per la conservazione dell'energia meccanica, la velocità angolare del sasso nel alla fine del primo quarto di circonferenza è $\omega'''=(\Omega^2-2g/L)^{1/2}=(6g/(5L))^{1/2}$ > 0. Pertanto la fune è ancora tesa quando il sasso raggiunge il punto considerato, dovendo fornire al sasso stesso un'accelerazione centripeta.

2. Due piccoli oggetti di massa $m_A = m$ ed $m_B = 3m$, con m nota, sono uniti da una molla di massa trascurabile, costante elastica k (nota) e lunghezza di riposo L_0 (incognita). I due oggetti possono muoversi con **attrito trascurabile** lungo un asse X **orizzontale** X. All'istante t_0 = 0 si osserva che entrambi gli oggetti si muovono con la stessa velocità v_0 (la velocità è la stessa sia in modulo che in verso!), mentre le loro posizioni sono; x_{0A}.= 0; $x_{0B} = d_0$, con d_0 nota. Si osserva poi che ad un certo istante t_1 (incognito) le posizioni dei due oggetti sono tali che la loro distanza è $x_{1B} - x_{1A} = d_0$, valore di distanza iniziale (nota!). [Nessuna forza esterna è applicata al sistema dei due oggetti in direzione orizzontale; inoltre l'istante t_1 è il **primo** di una (infinita) serie di istanti in cui si verifica la condizione considerata]

   a) Come si esprime, in funzione dei parametri letterali noti del problema, l'istante t_1?

   t_1 = …………………………………… $\pi(3m/k)$ [l'equazione del moto relativo del sistema recita $a_{REL} = -(k/\mu)(d(t)-L_0)$, con $d(t)=x_B(t)-x_A(t)$ distanza tra gli oggetti e μ massa ridotta: $1/\mu=1/m_A+1/m_B=(4/3)(1/m)$. Il moto relativo è quindi armonico, con pulsazione ω

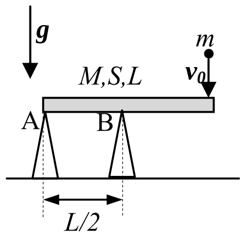
$= (k/\mu)^{1/2}=2(k/(3m))^{1/2}$.La condizione che si verifica all'istante t_1, in cui la distanza assume di nuovo il valore iniziale, si realizza dopo un intervallo temporale pari al periodo $T=2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime la posizione x_{1A} occupata dall'oggetto di massa m_A all'istante t_1? [Spiegate **bene** in brutta il procedimento impiegato!]

x_{1A} = …………………………………… $X_0+v_0t_1-(3/4)d_0 = v_0t_1$, con t_1 determinato sopra [essendo il sistema palesemente isolato nella direzione X (non agiscono forze esterne), si conserva la quantità di moto, ovvero il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante $V_{CM} = (m_Av_0+m_Bv_0)/(m_A+m_B) = v_0$. All'istante $t_0 = 0$ il centro di massa si trova nella posizione $X_0 = m_Bd_0/(m_A+m_B) = 3d_0/4$. All'istante t_1 la sua posizione sarà $X_1 = X_0+v_0t_1 = (m_Ax_{1A}+m_Bx_{1B})/(m_A+m_B)=(x_{1A}+3x_{1B})/4$. D'altra parte si sa che $x_{1B}=x_{1A}+d_0$, da cui, risolvendo, esce la soluzione. Notate che la soluzione trovata indica corrisponde ad uno spostamento di moto rettilineo uniforme (a velocità v_0) dell'oggetto di massa A, anche se in realtà il suo moto è ben diverso!]

-- **PARTE 3**

3. Una sottile trave **omogenea** di massa M = 10 kg, sezione di area S = 50 cm^2 e lunghezza L = 2.0 m si trova in equilibrio sopra due supporti "puntiformi" (denominati A e B) solidali ad un pavimento rigido e indeformabili; tali supporti sono in grado di generare sulla trave forze di reazione che hanno solo componenti verticali. I due supporti contattano la trave ad una sua estremità ed al punto di mezzo, come rappresentato in figura. Nelle condizioni di equilibrio considerate, la trave ha direzione **orizzontale**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto valgono, in modulo, le forze $\boldsymbol{F_A}$ ed $\boldsymbol{F_B}$ che i due supporti esercitano sulla trave? Spiegate brevemente su quali considerazioni basate il procedimento per la determinazione di queste forze

F_A = …………………………………… = ……….. N 0

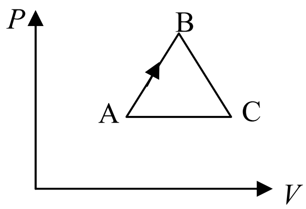
F_B = …………………………………… = ……….. N Mg = 98 N 'equilibrio rotazionale del sistema (quello traslazionale è garantito dal vincolo del perno) richiede che siano nulli i momenti delle forze rispetto ad un polo, che qui conviene prendere sul centro del disco. Tenendo conto delle lunghezze dei bracci e del segno dei vari momenti, e del fatto che la forza peso della sbarra si trova applicata al suo centro di massa (a metà lunghezza, essendo la sbarra omogenea), si ha: $MgR = m_2gR+m_3g3R$, da cui la soluzione]

Spiegazione: …………………………………… l'equilibrio traslazionale impone $F_A+F_B = Mg$; l'equilibrio rotazionale rispetto ad un polo collocato, ad esempio, in A stabilisce che $F_BL/2 = MgL/2$, dove si è sfruttato il fatto che il centro di massa della trave è collocato alla metà della sua lunghezza, in un punto la cui verticale passa per B

b) Immaginate ora che un chiodo, di massa m = 100 g, venga sparato in direzione verticale sull'estremo "di destra" della trave (vedi figura); sapendo che la velocità del chiodo, subito prima dell'impatto, è diretta verticalmente ed ha modulo v_0 = 50 m/s e che il chiodo rimane conficcato nella trave, quanto vale la velocità angolare ω con cui il sistema trave+chiodo comincia a ruotare **subito dopo** l'arrivo del chiodo?

ω=…………………………………~………..rad/s $mv_0(L/2)/(ML^2/3+mL^2/4)=6mv_0/(L(M+3m))\sim6(m/M)(v_0/L)$ = 1.5 rad/s [dopo l'arrivo del chiodo la trave (comprensiva del chiodo che ci si è conficcato dentro) comincia a ruotare attorno al polo B. Il fenomeno è un urto anelastico dove, però, non si conserva la quantità di moto a causa della presenza del vincolo B, che impedisce la traslazione del centro di massa. Infatti il sistema non è isolato in direzione verticale, non soltanto a causa della forza peso (che, non essendo impulsiva, non è in ogni caso capace di modificare la quantità di moto del sistema nella breve durata dell'evento di urto), ma anche per la presenza della forza $\boldsymbol{F_B}$, che invece può avere carattere impulsivo (si suppone che i supporti siano sufficientemente rigidi). Tuttavia nell'urto si conserva sicuramente il momento angolare complessivo calcolato rispetto ad un asse passante per B, dato che la forza generata dal vincolo B ha braccio nullo rispetto a tale polo. Prima dell'urto il momento angolare vale (in modulo, la sua direzione è uscente dal foglio, rispetto alla figura) $mv_0L/2$; dopo l'urto esso vale $I_{tot}\omega$, con I_{tot} momento di inerzia complessivo del sistema. Il momento di inerzia complessivo è dato dalla somma del momento di inerzia $I_{CM}=ML^2/12$ per la trave omogenea (per rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa) e del momento di inerzia del proiettile conficcato, $I'=m(L/2)^2$. Numericamente si può osservare come questo termine contribuisca in modo trascurabile]

4. Una macchina termica, che lavora con una quantità n = 2.00x10^{-2} moli di un gas perfetto monoatomico, percorre il ciclo (di forma "triangolare") che è rappresentato nel piano PV come indicato schematicamente in figura: si sa che $V_C = 2V_A$, $P_B = 2P_A$, $V_B = (3/2)V_A$. Inoltre il punto A è completamente determinato, essendo noto che V_A = 2.00 litri e P_A = 8.31x10^5 Pa. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti; se serve, supponete reversibili le trasformazioni coinvolte]



a) Quanto vale il lavoro L compiuto dal gas in ogni ciclo?

L = …………………………………… = …….. J $P_AV_A/2$ = 831 J [il lavoro è l'area del triangolo (isoscele!) racchiuso dal ciclo nel piano PV. È semplice rendersi conto che esso vale $(P_B-P_A)(V_B-V_A)/2=P_AV_A/2$]

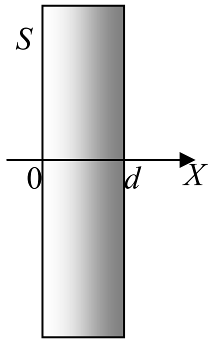
b) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, η del ciclo?

η = …………………………………… = ……….. $L/Q_{ass}=(P_AV_A/2)/((15/4)P_AV_A)$ = 2/15 = 0.133 [per definizione è $\eta = L/Q_{ASS} = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}$. Per la risposta occorre valutare lo scambio di calore in ogni singola trasformazione. Nella C→A si ha $Q_{CA} = nc_P(T_A-T_C)=(c_P/R)P_A(V_A-V_C)=-(5/2)P_AV_A$, dove abbiamo considerato che la trasformazione è a pressione costante, per cui $c_P=(5/2)R$ (gas perfetto monoatomico) ed abbiamo espresso le grandezze rilevanti usando la legge dei gas perfetti. Per la A→B si può scrivere, applicando il primo principio: $Q_{AB}=L_{AB}+\Delta U_{AB}=(P_B-P_A)(V_B-V_A)/2+P_A(V_B-V_A)+nc_V(T_B-T_A)=P_AV_A/4+P_AV_A/2+nc_V(P_BV_B-P_AV_A)/(nR)=(3/4)P_AV_A+(3/2)(2P_A(3/2)V_A-P_AV_A)=P_AV_A(3/4+(3/2)(3-1))=(15/4)P_AV_A$, dove si è fatto uso di ragionamenti analoghi a quelli già adottati in precedenza. Simili considerazioni conducono a esprimere il calore scambiato nella trasformazione B→C come

Q_{BC}=-(3/4)$P_A V_A$ (allo stesso risultato si arriva anche attraverso la legge, valida sul ciclo, $L = Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CA}$, da cui $Q_{BC}=L-Q_{AB}-Q_{CA}$). Quindi il calore viene assorbito nella sola trasformazione A→B; sostituendo l'espressione trovata nella definizione si ottiene la soluzione]

-- **PARTE 4**

5. Una lastra molto estesa e sottile di materiale non conduttore porta al suo interno una distribuzione di carica volumica **disomogenea**. Come indicato in figura, in cui la lastra è vista "di profilo", le superfici (facce) "di base" della lastra, che hanno area S = 0.10 m^2, sono ortogonali rispetto all'asse X. Lo spessore della lastra è d = 1.0 mm (si ha evidentemente $d << S$) e la carica complessiva contenuta nella lastra vale Q = 1.0x10^{-5} C. Si sa che la densità di carica dipende dalla sola coordinata x, in particolare aumentando linearmente da 0 fino al valore ρ_0 (incognito) quando si passa dalla faccia "di sinistra" in figura, collocata ad x = 0, alla faccia "di destra", che si trova ad $x = d$. Si sa anche che $E(x)$=0 per $x \leq 0$. [Considerate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m la costante dielettrica sia all'interno che al di fuori della lastra; supponete **trascurabili gli "effetti ai bordi"**]



Disegno non in scala!

a) Come si scrive l'espressione del campo elettrico $\boldsymbol{E}(x)$ nelle regioni 0 <x<d e x>d (cioè dentro la lastra e "alla destra" della lastra stessa)? [**Non** usate alcun valore numerico per questa risposta, che va espressa in funzione dei parametri letterali noti del problema; indicate in brutta direzione e verso del campo, nell'ipotesi che si possano trascurare gli effetti ai bordi]

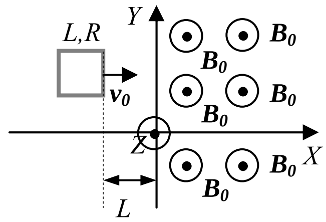
$E(x)$ = ... per 0 <x<d $Q_{int}(x)/(S\varepsilon_0)-E(x\leq 0) = (\int_0^x \rho(x)S\,dx)/(S\varepsilon_0) = (\rho_0/(d\varepsilon_0)) \int_0^x x\,dx = (2Q/(2Sd^2\varepsilon_0))x^2 = Qx^2/(Sd^2\varepsilon_0)$ [se si trascurano gli effetti ai bordi, come lecito viste le dimensioni della lastra, il sistema ha simmetria piana. Quindi il campo elettrico è diretto lungo X (nel verso positivo, essendo positiva la carica) e dipende solo dalla coordinata x . Il suo valore si ottiene da Gauss, usando una scatola a forma di parallelepipedo di cui le due facce di base, con superficie pari ad S, sono poste una ad $x \leq$ 0 e l'altra ad una qualche coordinata x generica all'interno della lastra. Per la soluzione occorre poi esprimere la densità $\rho(x)$. Sulla base della descrizione riportata nel testo, deve essere $\rho(x) = \rho_0\, x/d$ e tenere in debito conto la condizione $E(x\leq 0)=0$. La costante ρ_0 si determina dalla condizione che l'intera carica all'interno della lastra sia pari a Q, che fornisce $\rho_0 = 2Q/(Sd)$, da cui la soluzione]

$E(x)$ = ... per x>d $Q/(S\varepsilon_0)$ [è il campo generato da una carica complessiva Q distribuita con simmetria piana, come se fosse su una lastra. A questo risultato si arriva anche applicando Gauss come suggerito sopra, avendo cura di porre la faccia di destra della scatola nella regione x>d]

b) Quanto vale la differenza di potenziale ΔV tra la faccia "di sinistra" e quella "di destra" in figura? [Per azzeccare il segno giusto, che è richiesto per la soluzione, tenete presente che si intende $\Delta V = V(x=0)-V(x=d)$]

ΔV = ... = ... V $-\int_0^x E(x)dx = -Qd^3/(3Sd^2\varepsilon_0) = -Qd/(3S\varepsilon_0) =$ 3.8x10^3 V [dalla definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x\leq 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

6. Una spira quadrata di lato L noto, fatta di filo elettrico con resistenza complessiva R (nota), viaggia di **moto rettilineo uniforme** a velocità v_0 nota (diretta nel verso positivo dell'asse X di un certo riferimento) essendo spostata da un operatore esterno. Durante il suo movimento la spira giace sempre sul piano XY del riferimento citato; si sa che nel solo semispazio x > 0 è presente un campo magnetico (esterno, cioè generato da cause esterne alla spira) **uniforme e costante** diretto nel verso positivo dell'asse Z e di modulo B_0 noto La figura rappresenta schematicamente la situazione (notate che per x < 0 non c'è alcun campo magnetico). All'istante t_0 = 0 la situazione è esattamente quella rappresentata in figura: il lato "di destra" della spira si trova a distanza L dall'asse Y.



a) Determinate l'andamento dell'intensità di corrente $I(t)$ che fluisce nella spira in tutto l'intervallo compreso tra t_0 = 0 e l'istante $t_{fin} = 4L/v_0$, specificando anche il verso della corrente (orario o antiorario, rispetto alla figura). [State attenti a capire **bene** cosa succede e, se necessario, suddividete l'intero intervallo temporale in diversi sotto-intervalli; esprimete la soluzione in funzione dei parametri letterali noti del problema. Supponete che la velocità con cui si muove la spira sia "ragionevolmente bassa"]

$I(t)$ = ... 0 per $t < L/v_0$ e per $t > 2L/v_0$; B_0Lv_0/R per $L/v_0<t<2L/v_0$

[per la legge di Faraday si ha $|fem(t)| = d\Phi(\boldsymbol{B})/dt$, dove $\Phi(\boldsymbol{B})$ rappresenta il flusso del campo magnetico che attraversa la spira. Finché la spira si trova **completamente** nel semispazio x < 0 il flusso è nullo, come anche la sua variazione temporale. Analogamente la variazione temporale dle flusso (ma non il flusso!) è nulla quando la spira si trova **completamente** nel semispazio x > 0. Osservando che la spira si muove di moto rettilineo uniforme e tenendo conto delle condizioni iniziali del moto (la posizione all'istante t_0=0), è facile rendersi conto che la spira sarà completamente nel semispazio x<0 fino all'istante $t_1 = L/v_0$; dunque fino a questo istante la forza elettromotrice, e quindi la corrente nella spira, saranno nulle. Analogamente la corrente sarà nulla a partire dall'istante $t_2=2L/v_0$, quando la spira sarà completamente nel semispazio x>0. Nell'intervallo di tempo compreso tra t_1 e t_2 il flusso vale $\Phi(\boldsymbol{B})=B_0Lv_0(t-t_1)$, per cui $|fem| = B_0Lv_0$. Da qui esce la soluzione, che si ottiene usando la legge di Ohm $(I(t)=|fem|/R)$. Per la precisione occorrerebbe osservare che la transizione tra i vari regimi (dal valore nullo al valore, costante, appena determinato) richiede del tempo che potrebbe essere calcolato attraverso il coefficiente di autoinduttanza della spira. Tuttavia, visto che si suppone che la velocità sia sufficientemente bassa (e quindi la corrente sia piuttosto piccola, così come la sua variazione temporale), possiamo evitare di risolvere nei dettagli questo aspetto]

Verso della corrente: .... antiorario rispetto alla figura, ovviamente solo quando $I \neq 0$ [il flusso del campo magnetico aumenta e dunque la corrente indotta produce un controcampo che si oppone al campo esterno]

b) Come si esprime la potenza meccanica P che l'operatore esterno deve applicare alla spira nell'intervallo compreso tra $t' = L/v_0$ e t_{fin}? [Supponete trascurabili gli effetti dell'attrito meccanico]

$P =$ ……………………………………… $RI^2 = (B_0 L v_0)^2/R$ solo nell'intervallo $L/v_0<t<2L/v_0$ [da considerazioni di bilancio energetico si può osservare come l'operatore debba fornire potenza solo per compensare la potenza dissipata per effetto Joule. Infatti la velocità rimane costante e si stanno trascurando altre forze di attrito. L'espressione della potenza dissipata per effetto Joule fornisce la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 17/7/2008 Firma: