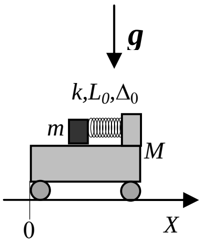
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 12/1/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un carrello di massa M = 5.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una strada orizzontale, è dotato di una sponda verticale rigida a cui è vincolata una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 3.0x10^3 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm. Alla molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è attaccato un piccolo oggetto di massa $m = M/5$ = 1.0 kg, che può scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie del carrello. Inizialmente tutto il sistema (carrello e oggetto) è fermo e la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 50 cm a causa di una fune. La posizione del carrello è tale che la sua estremità indicata in figura ha coordinata X_0 = 0 (rispetto ad un asse X orizzontale). All'istante t_0=0 la fune viene improvvisamente tagliata ed il **sistema** si mette in movimento.

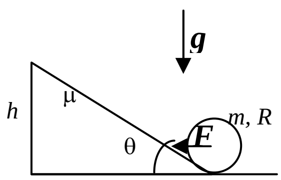


a) Quanto vale la velocità V' del **carrello** nell'istante in cui la molla si trova a passare per la sua lunghezza di riposo?
V' = …………………………………… = …….. m/s $\Delta_0(km/(M(m+M)))^{1/2}$= 5.0 m/s [non essendoci forze dissipative il sistema conserva la sua energia meccanica: $0=\Delta E_K+\Delta U_{ELA}=(m/2)v'^2+(M/2)V'^2-(k/2)\Delta_0^2$. Inoltre il sistema è anche isolatoi (lungo X) e quindi si conserva la quantità di moto totale (inizialmente nulla): $0=mv'+MV'$. Combinando le sue conservazioni si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale la coordinata X' dell'estremo del carrello nell'istante considerato alla domanda precedente? [In pratica vi si chiede di individuare lo spostamento del carrello a quel dato istante]
X' = …………………………………… = ……… m $\Delta_0(m/(m+M))$= 0.42 m [poiché il sistema è isolato, il centro di massa non ha accelerazione, ed essendo inizialmente fermo (tutto è fermo all'inizio), rimane sempre fermo. Pertanto $0=\Delta x'_{CM}=(m\Delta x'+M\Delta X')/(m+M)$, da cui $\Delta X'=-(m/M)\Delta x'=X'$, dove l'ultimo passaggio si deve al fatto che la coordinata iniziale dell'estremo del carrello è nulla. D'altra parte per semplici ragioni geometriche si ha che lo spostamento dell'oggetto misurato nel sistema di riferimento assegnato è $\Delta x'=-\Delta_0+\Delta X'$, essendo $-\Delta_0$ lo spostamento **relativo** dell'oggetto rispetto al carrello (notate il segno!). Da qui si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale l'istante t' in cui si verifica la situazione di cui alle domande precedenti? [Considerate il "primo" di una serie di istanti: infatti il moto **relativo** dell'oggetto è ovviamente **periodico**, e dunque la situazione considerata si ripete periodicamente nel tempo…]
t'= …………………………………… ~ ……… s $T/4=2\pi/(4\omega)=(\pi/2)(\mu/k)^{1/2}=(\pi/2)(M/(6k))^{1/2}$~2.6x$10^{-2}$ s [come suggerito nel testo, il moto **relativo** dell'oggetto rispetto al carrello è periodico. Infatti l'equazione del moto relativo (in direzione orizzontale) è del tipo $a_{REL} = -(k/\mu)x_{REL}$, dove x_{REL} rappresenta la posizione dell'oggetto rispetto ad un riferimento orizzontale solidale al carrello (per comodità, in questa espressone abbiamo centrato questo riferimento con la posizione di riposo della molla; se così non fosse, occorrerebbe tenere conto della lunghezza di riposo della molla, ma questo non modificherebbe affatto i risultati). Il moto relativo che ne consegue è armonico con pulsazione $\omega=(k/\mu)$, dove la massa **ridotta** μ è tale che $1/\mu=1/m+1/M=6/M$ (usando i dati del problema). Dato che l'oggetto parte da fermo, la molla passerà per la lunghezza di riposo (che corrisponde alla posizione di equilibrio del moto armonico considerato) dopo un tempo pari a un quarto di periodo, come sarebbe facile dimostrare, da cui la soluzione]

2. Un cerchione di bicicletta di massa m = 1.0 kg e raggio R = 20 cm si trova a salire lungo un piano inclinato (fisso ed indeformabile), che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, a causa di una forza **costante ed uniforme** di modulo F = 20 N e direzione orizzontale, applicata al suo asse come rappresentato schematicamente in figura. Il piano inclinato è scabro e presenta un coefficiente di attrito statico μ = 0.80; si osserva che il moto del cerchione è di **rotolamento puro**,cioè la sua superficie non slitta sul piano. Tutte le altre possibili forme di attrito sono trascurabili. [Per la soluzione, modellate il cerchione come un anello molto sottile dotato di raggi di massa trascurabile (tutta la massa m si trova alla stessa distanza R rispetto all'asse di rotazione). Nella risposta numerica usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½, $cos(\pi/6)$ ~ 0.87]



a) Quanto vale, in modulo, la forza di attrito statico F_A che permette il rotolamento puro nelle condizioni del problema? Sulla base della descrizione del problema e dei valori numerici forniti, la situazione considerata è fisicamente possibile? Discutete!
F_A = …………………………………… ~ …….. N $(F\cos\theta-mg\sin\theta)/2$~6.2 N [considerando la direzione del moto, che è quella del piano inclinato, e prendendo il verso positivo puntato verso l'alto del piano, l'equazione del moto del centro di massa si scrive: $a_{CM} = (F/m)\cos\theta-g\sin\theta-(F_A/m)$, dove si sono debitamente proiettate le forze peso ed $\boldsymbol{F}$ e si è tenuto conto che la forza di attrito statico si oppone al moto (incipiente) di strisciamento del cerchione. L'equazione del moto rotazionale del cerchione attorno al suo asse si scrive $\alpha = F_AR/I$, dove si è tenuto conto del fatto che l'unica forza a produrre momento è la forza di attrito (statico, non essendoci strisciamento) che ha un braccio pari al raggio R del cerchione. D'altra parte nel rotolamento puro esiste una relazione (geometrica, cioè dovuta all'assenza di strisciamento) tra accelerazione del centro (di massa) del cerchione ed accelerazione angolare: $a_{CM}=\alpha R$. Si ottiene quindi un sistema di tre equazioni e tre incognite che, risolto per F_A , fornisce la soluzione. Notate inoltre che il momento di inerzia del cerchione, modellato secondo il suggerimento del testo, è $I=mR^2$]
Discussione: …………………………………… affinché la situazione considerata sia fisicamente possibile è necessario valutare se il coefficiente di attrito statico fornito nel testo è sufficientemente grande da produrre la forza di attrito considerata in precedenza. Si sa infatti che $F_{A,MAX}=\mu N$, dove N è il modulo della reazione vincolare esercitata dal piano sul cerchione. Per la geometria del problema, si ha $N = mg\cos\theta+F\sin\theta$~19 N. Sostituendo i valori numerici del problema si vede che $F_{A,MAX}>F_A$ per cui la situazione considerata è fisicamente possibile

b) Supponendo che inizialmente il cerchione si trovi fermo alla base del piano inclinato e che quindi esso venga istantaneamente interessato dalla forza $\boldsymbol{F}$ di cui sopra e sapendo che l'altezza del piano inclinato vale h = 10 m, quanto vale la velocità v'_{CM} del centro di massa con cui esso raggiunge la sommità del piano inclinato? [Ovviamente la forza esterna $\boldsymbol{F}$ si mantiene **costante** durante l'intera salita]
v'_{CM} = …………………………………… ~ ……… m/s $((h/m)(F/tg\theta-mg))^{1/2}$~ 17 m/s [non essendoci forze dissipative che fanno lavoro (l'attrito è di tipo statico!), si può risolvere con il bilancio energetico: $L_F=\Delta E_K+\Delta U_G=(m/2)v'^2_{CM}+(I/2)\omega'^2+mgh=mv'^2_{CM}+mgh$, dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della relazione (geometrica) $\omega'=v'_{CM}/R$, valida per il rotolamento puro, e dell'espressione $I=mR^2$ (vedi risposta

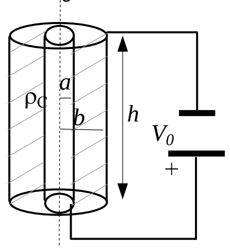
precedente). Il lavoro della forza esterna, tenendo conto della sua costanza e della sua direzione, può essere facilmente espresso come $L_F=Fh/tg\theta$, da cui la soluzione. Notate che lo stesso risultato si deve ottenere anche considerando la dinamica del centro di massa del cerchione, che è animato di moto uniformemente accelerato secondo l'accelerazione a_{CM} di cui alla risposta precedente e che deve percorrere uno spostamento pari a $h/tg\theta$: provate a verificarlo!]

3. Una quantità n di moli di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza delle seguenti tre trasformazioni **reversibili**: espansione adiabatica A → B, compressione isobara (a pressione costante) B → C, trasformazione isocora (a volume costante) C → A. Si sa che nell'espansione adiabatica A → B il gas dimezza la sua pressione, cioè $p_B=p_A/2$. [Ricordate che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma=c_P/c_V=5/3$; può farvi comodo sapere che $2^{3/5}\sim 1.52$]
   a) Sapendo che V_A = 5.0 litri, quanto vale il volume V_B che il gas occupa nel punto B del ciclo?
   V_B = ... ~ …….. m^3 $V_A (p_A/p_B)^{1/\gamma} = V_A 2^{3/5} \sim 7.6\text{x}10^{-3}$ m^3 [dalla legge delle adiabatiche reversibili, pV^γ = costante]

   b) Quanto vale l'efficienza η del ciclo?
   η= .... ~ …….. $1+Q_{CED}/Q_{ASS}=1+Q_{BC}/Q_{CA}=1+nc_P(T_C-T_B)/(nc_V(T_A-T_C))=1+\gamma(T_C-T_B)/(T_A-T_C)=1+\gamma(p_CV_C-p_BV_B)/(p_AV_A-p_CV_C)=1+\gamma(p_BV_A-p_BV_B)/(p_AV_A-p_BV_A)=1+\gamma p_B(V_A-V_B)/(V_A(p_A-p_B))=1+\gamma p_B(1-V_B/V_A)/(2p_B-p_B)=1+\gamma(1-(p_A/p_B)^{1/\gamma})=1+(5/3)(1-2^{3/5})\sim 0.140$ [il gas cede calore nella trasformazione B→C e lo assorbe nella C→A (ovviamente non scambia calore nell'adiabatica!). La soluzione si ottiene facendo debito uso dell'algebra, delle relazioni di calore a volume e pressione costante, delle leggi di stato per le trasformazioni (reversibili) considerate, della legge dei gas perfetti]

4. Una sottile e lunga bacchetta cilindrica di materiale **perfettamente conduttore** ha raggio a = 1.0 mm ed altezza h = 2.0 cm. La bacchetta è circondata da un sottile guscio cilindrico di materiale **perfettamente conduttore**, coassiale alla bacchetta e della stessa altezza di questa; il raggio del guscio è b = 5.0 mm. Lo spazio tra i due conduttori è riempito da un materiale **omogeneo debolmente conduttore**, dotato di resistività ρ_C = 1.0x10^3 ohm m. La bacchetta ed il guscio conduttore esterno possono essere collegati ai poli di un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 come rappresentato in figura. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del materiale; supponete di poter trascurare gli "effetti ai bordi" grazie alle dimensioni del sistema]

Disegno non in scala!



   a) Indicando con Q_0 la carica accumulata sulla bacchetta (l'armatura interna) in **condizioni stazionarie** e con r la distanza dall'asse di bacchetta e guscio, come si esprime il modulo del campo elettrico $E(r)$ tra le due armature, cioè per $a<r<b$? [Per rispondere a questa domanda dovete scrivere la **funzione** che determina il campo elettrico all'interno del sistema; **non** usate valori numerici per la risposta, ma impiegate le espressioni letterali dei dati del problema]
   $E(r)$ = ... $Q_0/(2\pi\varepsilon_0 hr)$ [applicando il teorema di Gauss ad una superficie (chiusa) di forma cilindrica, coassiale al sistema e di raggio r generico, si ottiene il risultato]

   b) Quanto vale la capacità C del sistema? [Discutete per benino, in brutta, la soluzione; può farvi comodo sapere che, numericamente, $ln(5)$ ~ 1.6]
   C = ... ~ …….. F $2\pi\varepsilon_0 h/ln(b/a) \sim$ 6.9x10^{-13} F [per definizione, la capacità $C = Q/V$ dipende solo dalle caratteristiche geometriche e costruttive del sistema. Per determinarne il valore, occorre legare la carica Q_0 con la differenza di potenziale V_0 che ne determina l'accumulo. A questo scopo sufficiente notare che deve essere $\Delta V = -V_0 = -\int_a^b E(r)dr = Q_0 ln(b/a)/(2\pi\varepsilon_0 h)$, da cui la soluzione]

   c) Quanto vale la resistenza elettrica R del sistema? [Suggerimento: ricordate il legame microscopico tra corrente e campo elettrico]
   R = ... ~ …….. ohm $2\pi\varepsilon_0 h/ln(b/a) \sim$ 6.9x10^{-13} F [per definizione, la densità di corrente è legata al campo elettrico attraverso la relazione $\mathbf{j} = (1/\rho_C)\mathbf{E}$. Quindi tra le armature in condizioni stazionarie si determina una corrente radiale (di verso dall'armatura positiva a quella negativa) e di modulo pari a $E(r)/\rho_C$. La corrente si trova calcolando il flusso di questo vettore su una superficie cilindrica di raggio generico: si ottiene dunque $I = Q_0/(\varepsilon_0\rho_C)$. Per la legge di Ohm deve essere $R=V_0/I$ e usando la relazione scritta alla risposta precedente tra V_0 e Q_0 si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 12/1/2009 Firma: