Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 19/2/2009

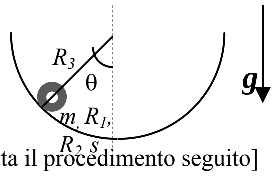
Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Su un piano con attrito trascurabile su cui è posto un sistema di riferimento XY, una biglia di massa M si muove con velocità rettilinea uniforme $\mathbf{V_0}$ diretta lungo l'asse X. Ad un dato istante, essa urta contro una seconda biglia, di massa $m = M/2$, che inizialmente è ferma sul piano. **L'urto non è "centrale"** , cioè il problema non può essere considerato unidimensionale, dato che le direzioni di moto delle biglie prima e dopo l'urto non sono le stesse. Inoltre a priori **non si sa** se l'urto sia completamente elastico o no.
   a) Sapendo che dopo l'urto la velocità $\mathbf{V}$ della biglia di massa M si è ridotta, **in modulo**, a una frazione pari a $1/\sqrt{3}$ del valore iniziale [cioè $V = V_0/3^{1/2}$)] e che essa forma un angolo $\Theta = \pi/6$ rispetto all'asse X, quanto vale l'angolo θ formato rispetto allo stesso asse dalla velocità $\mathbf{v}$ della biglia m dopo l'urto? [Può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$. Suggerimento: ragionate sulle "conservazioni"…]
   θ = …………………………………… = ... rad $arctan(v_Y/v_X)=arctan((-(M/m)Vsin\Theta)/((M/m)V_0-(M/m)Vcos\Theta)) = - \pi/6$
   [nell'urto si conservano entrambi le componenti, X ed Y, della quantità di moto. Per la componente X deve essere: $MV_0 = MVcos(\pi/6)+mvcos\theta$. Per la compoente Y deve essere $0 = MVsin(\pi/6)+mvsin\theta$. Usando i dati del problema, cioè $m=M/2$ e $V = V_0/3^{1/2}$, quest'ultima conservazione dà luogo a: $v=-2V_0sin(\pi/6)/(3^{1/2}sin\theta)$, che, sostituita nella conservazione della quantità di moto lungo X, fornisce il risultato. Si noti che il segno negativo indica che le componenti Y delle velocità hanno verso opposto, come deve essere]

   b) L'urto è completamente elastico o no? Motivate **quantitativamente** la vostra risposta.
   □ Non completamente elastico   ✖□ Completamente elastico   □ Non si può dire
   Spiegazione sintetica della risposta: .... si verifica che $v = (M/m)V$, da cui, eseguendo i debiti calcoli, si ha conservazione dell'energia cinetica, per cui l'urto è elastico per definizione

2. Un cilindro **cavo** di lunghezza s = 10 cm, raggio **interno** R_1 = 10 cm, raggio **esterno** R_2 = 20 cm è fatto di un materiale **omogeneo** che ha densità volumica di massa **uniforme** pari a $\rho_M = 5.0\text{x}10^3$ kg/m^3. Inizialmente tale cilindro si trova fermo, essendo trattenuto da una qualche forza esterna, "a mezza altezza" di una guida semicircolare fissa, rigida ed indeformabile di raggio R_3 = 1.0 m disposta su un piano verticale come in figura. [Per intendersi, "a mezza altezza" significa che l'angolo indicato in figura vale $\theta = \theta_0 = \pi/4$].



   a) Quanto vale il momento di inerzia I del cilindro per rotazioni attorno al suo asse? [Indicate chiaramente in brutta il procedimento seguito]
   I = …………………………………… ~ ………… kg m^2 $\rho_M \pi s (R_2^4 - R_1^4)/2 \sim 1.2$ kg m^2 [per definizione di momento di inerzia, si ha $I = \int \rho_M r^2 dV = \int_{R1}^{R2} \rho_M r^2 2\pi rsdr = 2\pi s\rho_M \int_{R1}^{R2} r^3 dr$, dove si è tenuto conto del fatto che il materiale è omogeneo e che, a causa della simmetria cilindrica, l'elemento di volume si scrive $dV = 2\pi rdr$. Risolvendo l'integrale si ottiene la soluzione]

   b) Ad un dato istante il cilindro, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi verso il basso della guida semicircolare. Si osserva che il moto del cilindro è di **rotolamento puro** , cioè avviene senza che ci sia strisciamento tra la sua superficie e quella della guida. Quanto vale, in modulo, la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro quando questo si trova a passare per il punto più basso della guida? [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   v_{CM} = …………………………………… ~ ………… m/s $(2mg(R_2-R_1)(1-cos\theta_0)/(m + I/R_1^2))^{1/2}=(4g(R_2-R_1)(1-cos\theta_0)/3)^{1/2} \sim 1.2$ m/s   [la forza di attrito fra cilindro è guida non compie lavoro e quindi si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta U + E_K = - mgR_2 + (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2$; notate che $|R_2-R_1|(1-cos\theta_0)$ è la variazione di quota del centro di massa del cilindro; inoltre, dato che il rotolamento è puro, la relazione tra le velocità è $v_{CM} = \omega R_1$, da cui la soluzione]

   c) Quanto deve valere il coefficiente di attrito (statico) μ tra guida e cilindro che permette il rotolamento puro nell'**intero** processo (cioè per la discesa completa del cilindro, dalla quota di partenza a quella più bassa)?
   $\mu \geq$ …………………………………… ~ ………… $I\alpha/(R_1^2 N) = I\alpha/(R_1^2 mgcos\theta) = ((2/3)mR_1^2) ((3/5) gsin\theta)/ (R_1^2mgcos\theta) = (2/5) tg\theta = 0.23$ [l'equazione del moto traslazionale del centro di massa del cilindro (che avviene lungo la guida, cioè in direzione tangenziale) si scrive $a_{CM} = gsin\theta - F_A/m$, avendo indicato con F_A la forza di attrito, con m la massa del cilindro (trovata prima) e con θ l'angolo formato tra il "raggio vettore" e la verticale, come in figura. L'equazione del moto rotazionale attorno al centro di massa si scrive invece $\alpha = F_A R_1/I$, dove I rappresenta il momento di inerzia sopra determinato. Per il rotolamento puro deve essere $a_{CM}=\alpha R_1$. Si ottiene quindi un sistema di tre equazioni algebriche che, risolto per F_A, fornisce $F_A = mgsin\theta/3$. D'altra parte, si ha anche $F_A \leq N\mu = \mu mgcos\theta$, da cui $\mu \geq tg\theta/3$. Notate che questa relazione dipende dalla posizione in cui si trova il cilindro; poiché il problema stabilisce che il moto di rotolamento puro si ha per l'intero processo e la funzione tangente è monotona decrescente per θ che diminuisce da $\pi/4$ a 0, come si verifica nel processo considerato, per rispondere alla domanda occorre considerare il massimo valore della funzione tangente, che si ha per $\theta = \theta_0$, quando $tg\theta_0 = 1$, da cui la soluzione]

3. Un campione di $n = 2.00\text{x}10^{-1}$ moli di gas perfetto monoatomico si trova alla temperatura iniziale T_0 = 300 K all'interno di un recipiente cilindrico di sezione di area S = 10.0 cm^2 ed altezza molto grande. Inizialmente, il tappo del recipiente, che ha **massa trascurabile**, è **fisso** rispetto alla parete laterale del cilindro, e l'altezza del volume occupato dal gas è h_0 = 83.1 cm.
   a) Il recipiente viene messo a contatto con una sorgente di calore (dotata di grandissima capacità termica) che si trova a temperatura T_1 = 600 K ed il gas viene portato a questa temperatura. Quanto vale la variazione ΔP della pressione del gas al termine del processo di riscaldamento, che potete supporre **reversibile**? [Ricordate che la costante dei gas perfetti vale R = 8.31 J/(K mole)]
   ΔP = ……………………………………= ……… Pa $(nR/(Sh_0))(T_1-T_0) = 6.00\text{x}10^5$ Pa   [stando alla descrizione del processo, la trasformazione reversibile da considerare avviene a volume costante (isocora). Per la legge delle isocore, si ha $P_1 = P_0\, T_1/T_0$. Essendo ovviamente $\Delta P = P_1-P_0$, con $P_0 = nRT_0/V_0$, e $V_0 = Sh_0$, si ottiene la soluzione]

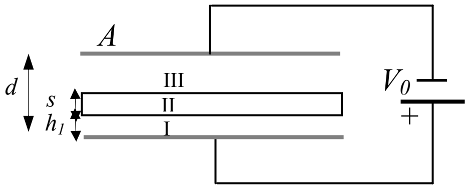
   b) Successivamente la sorgente di calore viene rimossa, il recipiente viene rivestito completamente (tappo incluso!) con una camicia **impermeabile al calore** e il sistema che fissa il tappo alla parete viene scollegato, così che esso diventa **libero di muoversi** in direzione verticale; si supponga che il gas compia anche in questa fase una trasformazione che si può considerare **reversibile** (ipotesi poco realistica, ma che supponiamo valida per questo caso). Sapendo che la pressione esterna vale $P_{ATM} = 1.00\text{x}10^5$ Pa, quanto vale il lavoro L fornito o subito dal gas durante quest'ultimo processo? [Per la soluzione numerica, potrebbe farvi comodo sapere che $12^{-2/5} \sim 0.370$]
   L = ……………………………………~ ……… J $-(3/2)\, nRT_1((2\Delta P/P_{ATM})^{-2/5}-1) \sim 942$ J   [sulla base della descrizione, la trasformazione può essere considerata come una adiabatica reversibnile per un gas perfetto monoatomico. Infatti la traasformazione avviene senza scambio di calore, mentre pressione, temperatura e volume cambiano il proprio valore. Per il primo principio della termodinamica applicato alle adiabatiche si ha $L = -\Delta U = -nc_V(T_2-T_1)$. D'altra parte, se si considera un'adiabatica reversibile, deve essere $T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{g-1}$., ovvero, usando la legge dei gas perfetti, $T_2P_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_1P_1^{(1-\gamma)/\gamma}$. Pertanto, tenendo conto che, ad equilibrio raggiunto, si ha $P_2=P_{ATM}$, mentre era $P_1=P_0+\Delta P=2\Delta P$ (il fattore 2 è conseguenza dei calcoli eseguiti nella risposta alla domanda precedente), si ha $T_2=T_1(2\Delta P/P_{ATM})^{(cV-cP)/cP} = T_1(2\Delta P/P_{ATM})^{-2/5}$, dove si è tenuto conto del fatto che c_V-c_P=-R e, per un gas monotamico, $c_P=5R/2$. Combinando le varie espressioni, si ottiene la soluzione]

4. Due sottili lamine conduttrici di spessore **trascurabile** ed area A = 1.0 m^2 sono poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza pari a d = 10 cm. Ad un dato istante, le due lamine, che inizialmente erano **scariche**, vengono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 160 V. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto e supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**]

a) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore per portare il sistema all'equilibrio (cioè perché le cariche elettriche si distribuiscano in modo opportuno sulle lamine)?

L = …………………………………… = ……….. J $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0 A/d)\, V_0^2/2 = 1.1\text{x}10^{-6}$ J [il lavoro è pari alla energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale, all'equilibrio, $CV_0^2/2$; la capacità C si esprime come $\varepsilon_0 A/d$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che nello spazio (vuoto) tra le lamine venga posta una lastra conduttrice **scarica**, di area A identica a quella delle lamine e spessore s = 2.0 cm. La configurazione è descritta schematicamente in figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza h_1 = 1.0 cm dalla lamina "inferiore". Quanto valgono, all'equilibrio, i **moduli** dei campi elettrici E_I, E_{II}, E_{III} che si misurano nelle regioni I, II, III di figura? [Le tre regioni indicate si riferiscono rispettivamente al volume compreso tra lamina "inferiore" e lastra, all'interno della lastra, al volume compreso tra lastra e lamina "superiore"]



E_I = …………………………………… = ……….. V/m $E_{III} = V_0/(d-s) = 2.0\text{x}10^3$ V/m

E_{II} = …………………………………… = ……….. V/m 0

E_{III} = …………………………………… = ……….. V/m $E_I = V_0/(d-s) = 2.0\text{x}10^3$ V/m [si può subito affermare che, all'equilibrio, essendo la lastra fatta di materiale conduttore, si avrà E_{II}=0. Inoltre, applicando il teorema di Gauss ad una scatola (esempio, un cilindro) che ha il suo asse diretto verticalmente (rispetto alla figura) e le sue basi una nella regione I e una nella regione III, si vede immediatamente che $E_I=E_{II}$, dato che, essendo la lastra scarica, il flusso complessivo del campo elettrico deve essere nullo (notate che in questa risposta si sfrutta anche la geometria/simmetria piana del sistema, giustificata dal fatto che si possono trascurare gli effetti ai bordi e quindi i campi, quando presenti, sono verticali e uniformi nelle varie regioni). A questo punto il valore dei campi nella regione I e II si ottiene imponendo che la differenza di potenziale tra le lamine sia pari a V_0 (e notando, come già affermato, che questi campi sono uniformi e verticali nelle rispettive regioni)]

c) Quanto vale la capacità C' del sistema nella sua configurazione finale, cioè con la lastra al suo interno (come mostrato in figura)?

C' = …………………………………… = ……….. pF $\varepsilon_0 A/(d-s) = 1.1\text{x}10^{-10}$ F = $1.1\text{x}10^2$ pF [a questa domanda si può rispondere calcolando la carica che si trova sulle lamine quando la lastra è in posizione, oppure si può notare che la configurazione ottenuta è analoga a due condensatori in serie, per cui $1/C' = 1/C_I+1/C_{III}$. Le capacità dei due condensatori C_I e C_{III} si ottengono usando la relazione prima citata: $C_I=\varepsilon_0 A/h_1$ e $C_{III}=\varepsilon_0 A/(d-h_1-s)$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/2/2009 Firma: