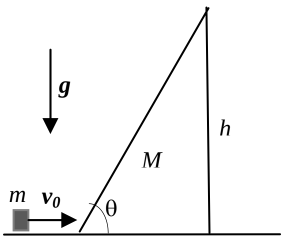
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 2/7/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1,2**

1. Un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale ed ha altezza $h = 2.0$ m è **libero di muoversi** scivolando con attrito trascurabile lungo una direzione orizzontale (asse X). Il piano inclinato, che inizialmente è **fermo**, ha una massa M il cui valore numerico non è noto (non serve per la soluzione). Un corpo puntiforme di massa $m = M/4$ giunge alla base del piano avendo una velocità orizzontale diretta come in figura di modulo v_0 (incognita). [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$; trascurate ogni forma di attrito]



   a) Per quale valore della velocità v_0 si verifica che il corpo puntiforme m percorre per intero il piano inclinato fermandosi (istantaneamente) sulla sua sommità? [In pratica il corpo puntiforme, quando arriva sulla sommità del piano inclinato, si arresta per un istante **rispetto al piano inclinato**, chiaro?]

   v_0 = ………………………… = ……… m/s $(10gh/4)^{1/2} = 7.0$ m/s   [nel sistema si conserva l'energia meccanica, non essendoci forze dissipative, e la quantità di moto lungo l'asse X, essendo il sistema isolato, cioè privo di forze esterne, lungo tale direzione. Nell'istante in cui il corpo si ferma (istantaneamente) sulla sommità del piano inclinato, esso ha una velocità **relativa** nulla rispetto al piano inclinato stesso. Poiché il piano inclinato non può muoversi (si suppone) in direzione verticale, questo vuol dire che a quell'istante le due masse m e M hanno la **stessa velocità** $\boldsymbol{V}$ (che ha solo direzione orizzontale). In queste condizioni, la conservazione dela quantità di moto dà luogo all'equazione: $mv_0 = (m+M)V$, cioè $V = v_0/5$ (le due masse sono uguali in valore). La conservazione dell'energia meccanica recita invece: $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = mgh + (m+M)V^2/2 - mv_0^2/2$, cioè $2gh = v_0^2 - 5V^2$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo si ottiene la soluzione]

   b) Quanto vale e che direzione e verso ha la velocità V_{CM} del **sistema** corpo+piano inclinato nell'istante considerato sopra? [Considerate la situazione descritta nel quesito precedente, cioè supponete che il corpo puntiforme abbia la velocità iniziale v_0 determinata sopra]

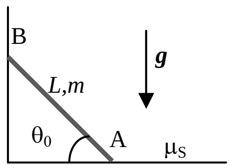
   Direzione e verso: ………………………….. orizzontale verso la destra di figura

   V_{CM} = ………………………………….. = ……….. m/s $v_0/5 = 1.4$ m/s   [come considerato nella risposta precedente, il sistema è isolato lungo l'asse X e dunque la velocità del centro di massa lungo questa direzione non cambia, cioè $V_{CM} = V_{CM,0} = mv_0/(m+M) = v_0/5$. Inoltre non ci sono componenti di velocità in direzione verticale, né all'inziio né all'istante considerato, da cui la soluzione]

   c) Che relazione lega tra loro i **moduli** delle velocità v_0 (velocità iniziale del corpo puntiforme), V' (del piano inclinato) e v' (del corpo puntiforme) quando il corpo puntiforme si trova a **salire** lungo il piano inclinato? [Attenzione: in questa domanda si ha che il corpo non è fermo rispetto al piano inclinato! Ovviamente **non** dovete usare valori numerici per questa risposta]

   V' = …………………………………… $(m/M)(v_0 - v'cos\theta) = v_0/4 - v'/8$ [come già affermato, si conserva la quantità di moto totale del sistema lungo X . Notate che, nel corso della salita del corpo sul piano inclinato, la velocità v' ha anche componenti verticali, per cui nella conservazione della quantità di moto occorre considerare la sola componente orizzontale della velocità $\boldsymbol{v'}$, che vale $v'cos\theta$]

2. Un'asta **omogenea** sottile di massa $m = 10$ kg e lunghezza $L = 1.0$ m è appoggiata nel suo estremo B (vedi figura) ad una parete liscia, cioè con **attrito trascurabile**. L'altro suo estremo (A in figura), invece, poggia su un pavimento indeformabile scabro, cioè in grado di produrre un **attrito non trascurabile**; il coefficiente di attrito statico vale $\mu_S = 0.80$. Si sa che la situazione rappresentata in figura, in cui l'angolo vale $\theta_0 = \pi/4$, è di **equilibrio**. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 2^{1/2}/2$ con $2^{1/2} \sim 1.4$]



   a) Quanto vale, **nelle condizioni descritte**, il modulo della forza di attrito F_A che si determina al punto di contatto tra asta e pavimento?

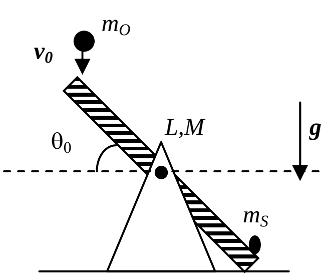
   F_A = ……………………………………= ……… N $mg/2 = 49$ N   [deve esserci equilibrio delle forze e dei momenti delle forze (rispetto ad un dato polo). Se scegliamo come polo il punto A, le uniche forze che hanno un momeento non nullo sono la forza peso, applicata al centro di massa (il punto di mezzo dell'asta sottile) e la reazione vincolare $\boldsymbol{F_B}$ che la parete esercita sul punto B dell'asta. Questa forza è, per definizione, ortogonale alla parete, cioè orizzontale. Dunque l'equilibrio dei momenti richiede : $mg(L/2)cos\theta_0 = F_B L sin\theta_0$, da cui $F_B = mg/2$. Per l'equilibrio traslazionale questa forza deve essere equilibrata da una forza di direzione orizzontale : tale forza è proprio la forza di attrito richiesta, che è diretta orizzontalmente dovendosi opporre allo strisciamento dell'estremo A sul pavikento. Naturalmente tale forza di attrito è di tipo statico, esercitandosi tra oggetti che sono fermi l'uno rispegtto all'altro (all'equilibrio !). Si verifica facilmente che questo valore di forza è compatibile con la **massima** forza di atttrito che può essere prodotta, che vale $F_{A,MAX} = mg\mu_S = 78$ N]

   b) Supponete ora che il mago Zurlì faccia scomparire in modo istantaneo la parete. L'asta si mette ovviamente in moto fino a cadere sul pavimento. Quanto vale la velocità (tangenziale) v_B dell'estremo B nell'istante in cui l'asta (e quindi anche l'estremo B) tocca il pavimento? [Trascurate ogni forma di attrito nel movimento dell'asta]

   Δ = ……………………………………~ ……… m $(3gLcos\theta_0)^{1/2} \sim 4.5$ m/s   [quando la parete viene fatta scomparire (in modo istantaneo), non c'è più alcuna forza di reazione vincolare e non c'è più alcuna forza di attrito statico. Dunque l'asta prende a routare attorno a un asse (ortogonale al foglio, in figura) che passa per il punto A. non essendoci forze dissipative, nel processo si conserva l'energia meccanica. Pertanto si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$ dove $\Delta E_K = (I/2)\omega^2 = (ML^2/6)\omega^2$ e la variazione di energia potenziale, che è di natura gravitazionale, è dovuta alla variazione di quota del centro di massa. Si ha quindi $\Delta U = -mg(L/2)cos\theta_0$. Osseevando che la velocità (tangenziale, è solo tangenziale) del punto B è legata alla velocità angolare ω dalla relazione geometrica $v_B = L\omega$, si ottiene la soluzione]

-- **PARTE 3**

3. In un vecchio filmino di comiche, Stanlio se ne sta tranquillo tranquillo a cavalcioni all'estremo di un'altalena, costituita da una trave sottile omogenea di lunghezza $L = 4.0$ m e massa $M = 60$ kg, imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno ad un asse che passa per il suo centro di massa (il punto di mezzo della trave). Inizialmente la trave, che è ovviamente ferma, forma un angolo $\theta_0 = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. Ad un dato istante, quel mattacchione di Ollio salta sull'altro estremo della trave avendo una velocità diretta verticalmente (verso il basso) di modulo $v_0 = 2.0$ m/s; dopo l'urto, sia Ollio che Stanlio rimangono aggrappati alla trave. Per la soluzione considerate sia Stanlio che Ollio come **puntiformi**, e supponete che le loro masse siano $m_S = 50$ kg e $m_O = 2m_S = 1.0 \times 10^2$ kg; naturalmente si suppone che il perno attorno a cui ruota la trave sia sufficientemente robusto da resistere imperturbato alle sevizie dell'esperimento descritto.



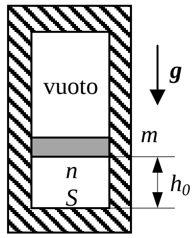
   a) Discutete per benino, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema (trave+Stanlio+Ollio) si conservano nell'urto, tra energia cinetica, quantità di moto e momento angolare.

   Discussione: …………………………….   L'energia cinetica non si conserva, essendo l'urto palesemente anelastico (Ollio rimane aggrappato alla trave!). Neanche la quantità di moto si conserva, dato che dopo l'urto si ha solo movimento di rotazione; infatti il perno può trasferire forze di tipo impulsivo al sistema, le quali, avendo un'origine esterna al sistema, lo rendono non isolato. Tuttavia tali forze hanno un momento nullo rispetto all'asse di rotazione: di conseguenza si conserva il momento angolare. Osservate che la forza di reazione vincolare che il suolo esercita sulla trave quando il sistema è nella configurazione iniziale si annulla istantaneamente appena comincia la rotazione, dato che viene istantaneamente a mancare il contatto

   b) Quanto vale la velocità angolare ω con cui la trave **comincia a ruotare** (subito dopo l'arrivo di Ollio) attorno al proprio asse?

ω = ……………………………. = ……… rad/s $2m_O v_O cos\theta_0/(L(M/3+m_O+m_S))$ = 0.83 rad/s [conservandosi il momento angolare rispetto al perno, possiamo scrivere, per i moduli, $L_0=L'$. Prima dell'urto il momento angolare rispetto al perno è dovuto alla quantità di moto di Ollio e il suo valore è $m_= v_0(L/2)cos\theta_0$, dato che il "braccio" della quantità di moto rispetto al perno vale proprio $(L/2)cos\theta_0$. Subito dopo l'urto il momento angolare si può esprimere come $L'=I'\omega$, dove I' è il momento di inerzia complessivo del sistema calcolato rispetto al perno. Data l'additività del momento di inerzia, sapendo che, per una trave sottile, si ha $I_{CM}=ML^2/12$, e vista la posizione delle due masse, si ha $I'=ML^2/12+(m_O+m_S)(L/2)^2 = (L^2/4)(M/3+m_O+m_S)$, da cui la soluzione]

4. Un recipiente cilindrico indeformabile di sezione S = 8.31 cm^2 è rivestito di materiale **isolante termico**. Al suo interno si trova un tappo di massa m = 10.0 kg che può scorrere **con attrito trascurabile** in direzione verticale; il tappo, che è a tenuta stagna, divide il volume interno al recipiente in due parti, come schematizzato in figura. Nella parte superiore è fatto il vuoto pneumatico. Nella parte inferiore, invece, si trova un campione di n = 1.00x10^{-2} moli di gas perfetto monoatomico oltre a un piccolo riscaldatore elettrico, di massa e volume trascurabile, in grado di fornire al gas una potenza costante W = 8.31 W. Inizialmente il sistema è in equilibrio con il tappo che si trova ad una quota h_0 = 8.31 cm misurata dal fondo del recipiente (vedi figura). [Ricordate che, per un gas perfetto monoatomico, si ha $c_v = 3R/2$; usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti e g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



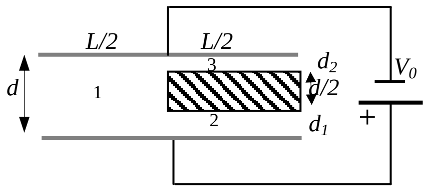
a) Quanto vale la temperatura T_0 del gas in queste condizioni di equilibrio?
T_0 = …………………………………..= ……… K $mgh_0/(nR)$ = 98.0 K [la pressione è dovuta alla forza peso del tappo, cioè $P_0 = mg/S$, da cui, usando la legge dei gas perfetti e notando che $V_0 = Sh_0$, si ottiene la soluzione]

b) Ad un certo istante, il riscaldatore elettrico viene acceso. Quanto vale la temperatura T raggiunta dal gas dopo un intervallo di tempo Δt = 2.00 s ? [Supponete che la trasformazione a cui è sottoposto il gas proceda « per stati di equilibrio »]
T = …………………………………..= ……… K $2W\Delta t/(5nR)+T_0$ =178 K [la trasformazione può essere considerata come un'isobara reversibile. Per il primo principio, si ha $Q = nc_P\Delta T$, con $c_P = (5/2)R$. Notando che la quantità di calore ceduta al gas è, ovviamente, $Q = W\Delta t$ si ottiene il risultato]

c) Quanto vale il lavoro L compiuto dal gas nel processo ?
L = …………………………………..= ……… J $nR\Delta T$ = 6.65 J [per il primo principio, $Q = L + \Delta U = L + nc_V\Delta T$, da cui $L = Q-nc_V\Delta T=n\Delta T(c_P-c_V)=nR\Delta T$. A questo risultato si arrivava, ovviamente, anche considerando il lavoro compiuto dall'isobara reversibile]

-- **PARTE 4**

5. Lo spazio tra le armature di un condensatore ad armature piane e parallele è parzialmente occupato da una lastra spessa di materiale ottimo conduttore. Si sa che le armature del condensatore sono lastre **sottili** (spessore trascurabile) quadrate con lato L e che la loro distanza è d (con $d<<L$). Si sa inoltre che la lastra di conduttore, globalmente **neutra**, ha la forma di un parallelepipedo di altezza $d/2$ e base di lati rispettivamente L e $L/2$. La configurazione geometrica è rappresentata in figura, che mostra una vista "dal davanti" (in sezione) del sistema. Notate che le distanze d_1 e d_2 di figura non sono note, ma è ovviamente $d = d_1+d_2+d/2$. Evidentemente la presenza della lastra divide lo spazio vuoto tra le armature in tre regioni, marcate come 1, 2, 3 in figura. Il condensatore è collegato a un generatore di differenza di potenziale nota V_0 e si suppone che siano state raggiunte condizioni stazionarie. [Rispondete supponendo che il sistema goda di una perfetta simmetria piana e trascurate gli "effetti ai bordi"; pertanto assumete che il campo elettrico sia nullo fuori dal condensatore. Notate che non ci sono valori numerici in questo esercizio, per cui dovete esprimere i risultati in funzione delle espressioni letterali dei parametri noti, quelli che "si sanno"]



Vista da davanti
(in sezione)

a) Quanto valgono, in modulo, i campi elettrici E_1, E_2, E_3 che si misurano nelle tre regioni di spazio sopra definite?
E_1 = …………………………………… V_0/d
E_2 = …………………………………… $2V_0/d$
E_3 = …………………………………… $E_2=2V_0/d$ [in tutte e tre le regioni il campo elettrico è verticale e diretto verso l'alto, vista la configurazione del generatore e il fatto che possiamo trascurare gli effetti ai bordi. Inoltre i campi sono omogenei ed uniformi all'interno delle varie zone, sempre perché stiamo supponendo di essere in simmetria piana. Il campo E_1 si calcola facilmente dalla differenza di potenziale: si trova $E_1 = V_0/d$. I campi elettrici E_2 ed E_3 sono uguali, come può essere facilmente dimostrato applicando il teorema di Gauss ad una scatola che ha le sue basi nelle regioni 2 e 3 rispettivamente (ad esempio una scatola cilindrica con il suo asse in direzione verticale): la carica interna a questa scatola è nulla, essendo la lastra neutra. Dunque il flusso del campo elettrico è anche nullo, cioè i campi (supposti verticali e omogenei nelle varie regioni di spazio considerate) sono uguali. A causa della presenza del generatore, è inoltre $E_2d_1+E_3d_2=V_0=E_2(d_1+d_2)=E_2(d-d/2)=E_2d/2$ (il campo è ovviamente nullo dentro la lastra, trattandosi di un conduttore all'equilibrio) da cui la soluzione]

b) Quanto vale la capacità C del condensatore? [Indicate con ε_0 la costante dielettrica del vuoto]
C = …………………………………… $(3/2)\varepsilon_0L^2/d$ [per definizione è $C = Q/V_0$. La carica elettrica è evidentemente distribuita sulle armature in modo **non uniforme**. Questo si può vedere facilmente usando ancora il teorema di Gauss con una scatola che ha una sua base all'interno e l'altra all'esterno del condensatore (dove si suppone che il campo sia nullo): si trova che il campo è legato alla densità di carica superficiale attraverso la relazione $E = \sigma/\varepsilon_0$. Quindi $\sigma_1 = \varepsilon_0E_1$, ma $\sigma_2 = \varepsilon_0E_2$. Vista la geometria del sistema, si ha $Q = (L^2/2)(\sigma_1+\sigma_2)=\varepsilon_0(L^2/2)(V_0/d+2V_0/d)=\varepsilon_0(L^2/2)(3/d)V_0$, da cui la soluzione. Notate che alla soluzione si arriva anche trattando il sistema come composto da un parallelo tra un condensatore piano parallelo con armature distanti d e di superficie $L^2/2$ con una serie di due condensatori piani paralleli con armature di superficie $L^2/2$ e separazione d_1 e d_2]

6. Una spira circolare di area S è realizzata con un sottile filo metallico che presenta una resistenza elettrica R. La spira è mantenuta in rotazione uniforme a velocità angolare ω attorno a un asse che passa per un suo diametro. Nella sua rotazione, la spira attraversa una regione in cui è presente un campo magnetico esterno **uniforme e costante** diretto ortogonalmente all'asse di rotazione; la geometria è tale che all'istante t_0 = 0 il piano della spira è parallelo al campo magnetico (ovviamente l'angolo tra il campo magnetico e la normale alla spira varia in modo lineare con il tempo).

a) Come si esprime la differenza di potenziale $V(t)$ che si misura ai capi della spira in funzione del tempo? [Dovete scrivere una funzione del tempo basata sulle espressioni letterali dei parametri noti del problema]
$V(t)$ = …………………………………… $\omega SB_0cos(\omega t)$ [per la legge di Faraday si ha che la forza elettromotrice, ovvero la differenza di potenziale, ai capi della spira, è $V(t) = -d\Phi(\mathbf{B_0})/dt$ Il flusso del campo magnetico si esprime come $SB_0cos(\omega t+\theta_0)$, dove l'angolo è quello tra la normale alla spira e il campo. Vista la condizione iniziale proposta nel testo, si ha $\theta_0 = \pi/2$ (oppure $-\pi/2$), da cui $\Phi(\mathbf{B_0})=-SB_0.sin(\omega t)$ Da qui si ottiene la soluzione. Notate che il segno (legge di Lenz) non è particolarmente significativo in questo contesto, dato che non è facile trovare una convenzione sul verso di percorrenza della corrente indotta nella spira]

b) Come si esprime il **valore mediato nel tempo** <P> della potenza "dissipata" nella spira per effetto Joule? [Immaginate che la spira sia chiusa su se stessa]
<P> = …………………………………… $(\omega SB_0)^2/(2R)$ [per definizione è $P(t)=V^2(t)/R=\omega^2S^2B_0^2cos^2(\omega t)/R$. Il risultato si ottiene ricordando il valor medio della funzione periodica $cos^2(\omega t)$ calcolato su un periodo]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 2/7/2009 Firma: