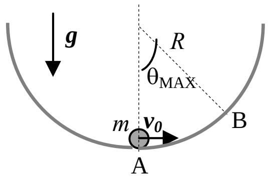
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 29/1/2010

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto (puntiforme) di massa m = 1.0 kg può muoversi con **con attrito trascurabile** su una guida rigida e fissa che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 5.0 m e si trova su un piano verticale, come rappresentato in figura. Ad un certo istante l'oggetto passa per il punto "più in basso" della guida (indicato come punto "A" in figura) avendo una velocità di modulo v_0 = 7.0 m/s (diretta verso la destra, in figura). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che la guida esercita sull'oggetto nell'istante in cui esso passa per il punto "A"?

N = …………………………………… = ………. N $mv_0^2/R+mg$ = 20 N   [l'oggetto si sta muovendo su una circonferenza di raggio R con velocità (tangenziale) v_0 ; dunque esso risente di un'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v_0^2/R$ e direzione verticale verso l'alto (rispetto alla figura). Le forze che agiscono sull'oggetto sono il peso mg , diretto verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare N , diretta verticalmente verso l'alto. Dunque, facendo attenzione ai segni, deve essere: $ma_C = N - mg$, da cui la soluzione]

b) Dopo essere passato per il punto "A", l'oggetto "risale" lungo la guida fino a fermarsi in un certo punto "B". Quanto vale il coseno dell'angolo θ_{MAX} compreso tra la direzione verticale e il raggio vettore spiccato dal centro della circonferenza e il punto "B"? Quanto vale, nell'istante di arresto, il modulo della forza totale F che agisce sull'oggetto? [Per capire cosa è $\cos\theta_{MAX}$ osservate la figura]

$\cos\theta_{MAX}$ = …………………………………… = ……… $2gR/v_0^2-1$ = ½ [essendo l'attrito trascurabile, si conserva l'energia meccanica dell'oggetto, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Poiché l'oggetto si arresta al punto "B", è $\Delta E_K = -(m/2)v_0^2$. Inoltre l'unica forza (conservativa) che fa lavoro è la forza peso, per cui $\Delta U = mgR(1-\cos\theta_{MAX})$, come si può facilmente dedurre sulla base di semplici ragionamenti di trigonometria. Da qui esce la soluzione]

F = …………………………………… ~ ………. N $mg\sin\theta_{MAX} = mg(1-\cos^2\theta_{MAX})^{1/2}$ ~ 8.5 N   [sull'oggetto agiscono sempre la forza peso e la reazione vincolare. Nel punto "B" l'oggetto si ferma, e dunque non c'è accelerazione centripeta. Pertanto la reazione vincolare è uguale e opposta alla componente radiale della forza peso, e l'unica componente "attiva" della forza è la componente tangenziale della forza peso, che si esprime come in risposta]

2. Un trenino è composto da due carrellini uguali, entrambi di massa m = 1.0 kg, collegati da una molla di costante elastica k = 2.0 N/m e massa trascurabile. Il trenino si muove **con attrito trascurabile** lungo una direzione **orizzontale** (asse X). Inizialmente i due carrelli si muovono entrambi con la stessa velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s e la molla si trova compressa per un tratto Δ_0 = 10 cm ; la compressione della molla è mantenuta da una fune che, all'istante t_0 = 0, viene improvvisamente tagliata. Si osserva allora che la molla comincia a distendersi fino a raggiungere un'estensione massima il cui valore assoluto è Δ_{MAX}. [Notate che le estremità della molla rimangono sempre agganciate ai due carrellini; supponete inoltre che l'asse della molla rimanga sempre parallelo all'asse X]

a) Quanto vale Δ_{MAX}? [Spiegate per bene in brutta il procedimento adottato!]

Δ_{MAX} = …………………………….. ~ .... m Δ_0 = 0.10 m   [sul sistema non agisce attrito, dunque l'energia meccanica si conserva, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Dette v_1 e v_2 le velocità dei due carrellini all'istante di massima estensione della molla, si ha $\Delta E_K = (m/2)(v_1^2+v_2^2) - (m/2)(2v_0^2)$. L'unica forza conservativa che fa lavoro è la forza elastica, per cui $\Delta U = \Delta U_{ELA} = (k/2)(\Delta_{MAX}^2-\Delta_0^2)$. Inoltre il sistema è isolato lungo l'asse X, per cui si conserva la quantità di moto totale in questa direzione, cioè $2mv_0 = m(v_1+v_2)$, ovvero $2v_0 = v_1+v_2$. Le due equazioni di conservazione danno luogo a un sistema di due equazioni e tre incognite. Per la soluzione occorre trovare un'altra equazione. Poiché l'istante, o configurazione, considerata è quella di massima estensione della molla, occorre che $v_1 = v_2$. Se si deve conservare la quantità di moto, è allora necessario che $v_1 = v_2 = v_0$. La conservazione dell'energia meccanica stabilisce allora $\Delta_{MAX}^2 = \Delta_0^2$, da cui la soluzione (esprimendo i valori assoluti della compressione/estensione della molla, il segno è lo stesso, ma ovviamente la configurazione fisica è diversa)]

b) Quanto valgono, nell'istante in cui la molla raggiunge la massima estensione Δ_{MAX}, le velocità v_1 e v_2 dei due carrellini?

v_1 = …………………………….. =........... m/s v_0 = 5.0 m/s v_2 = …………………………….. =........... m/s v_0 = 5.0 m/s [vedi sopra]

c) Quanto vale lo spostamento Δx_{CM} del **centro di massa** del sistema tra l'istante t_0 = 0 e l'istante t' in cui la molla raggiunge la massima estensione Δ_{MAX}? [Considerate il primo dei tanti istanti in cui si verifica periodicamente la condizione richiesta]

Δx_{CM} = …………………………….. ~........... m $v_0T/2=v_0\,\pi(m/(2k))^{1/2}$ = 7.85 m   [essendo il sistema isolato lungo la direzione X , il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con velocità apri a $v_{CM0} = v_0$. Dunque $\Delta x_{CM} = v_0t'$. Il moto **relativo** dei due carrellini avviene sotto l'azione della forza (interna) generata dalla molla. Indicando con x_1 e x_2 le posizioni dei due carrellini in un istante generico, si ha $F_{INT} = -k(x_2-x_1-L_0)$, con L_0 lunghezza di riposo della molla (non nota, ma non serve!). L'equazione del moto relativo recita $a_{REL} = d^2(x_2-x_1)/dt^2 = F_{INT}/\mu$, dove la massa ridotta è $1/m_1+1/m_2 = 2/m$. L'equazione scritta indica che il moto relativo è armonico, con pulsazione $\omega = (2k/m)^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/(2k))^{1/2}$. Essendo la velocità relativa iniziale nulla, è facile rendersi conto che l'istante t' corrisponde a metà del periodo, da cui la risposta]

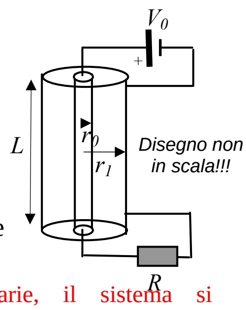
3. Un campione di n (incognita) moli di gas perfetto monoatomico si trova all'interno di un recipiente cilindrico che ha area di base S = 0.98 cm^2 ed è dotato di pareti indeformabili fatte di materiale isolante termico. Il contenitore è chiuso da un tappo, anch'esso impermeabile al calore, di massa m **incognita**, che può scorrere **con attrito trascurabile** mantenendosi per una sua faccia a contatto con la pressione atmosferica P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa. Inizialmente il gas occupa il volume V_0 = 0.16 litri e il recipiente è disposto con il suo asse (si intende l'asse del cilindro) in direzione orizzontale ed il gas si trova in equilibrio alla temperatura T_0 (incognita). Quindi il recipiente viene ruotato e alla fine il suo asse si trova in direzione verticale: la rotazione è effettuata molto lentamente, in modo tale che la trasformazione subita dal gas avvenga passando per **stati di equilibrio** e si sa che alla fine il gas si trova in una nuova condizione di equilibrio a un volume V_1 che vale 1/8 del volume iniziale, cioè $V_1 = V_0/8$. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e R = 8.3 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la massa m del tappo?

m = ………………………………… = ...… kg $P_{ATM}S((V_0/V_1)^\gamma-1)/g = P_{ATM}S(32-1)/g$ = 31 kg   [poiché la trasformazione avviene molto lentamente, non ci sono attriti e il recipiente è impermeabile al calore, si può assumere che la trasformazione sia un'adiabatica reversibile. Di conseguenza deve essere $P_1V_1^\gamma = P_0V_0^\gamma$, con $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ per un gas perfetto monoatomico e $P_0 = P_{ATM}$. D'altra parte anche la configurazione finale è di equilibrio, per cui, tenendo conto che alla fine anche il peso del tappo contribuisce alla pressione "sul" gas (all'inizio ciò non si verifica, essendo la forza peso del tappo bilanciata dalla reazione vincolare della parete del recipiente) deve essere $P_1 = P_0 + mg/S$. Deve quindi verificarsi che: $(P_{ATM}+mg/S)/P_{ATM} = (V_0/V_1)^{\gamma}$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale, nel processo considerato, la variazione di energia interna ΔU del gas?

ΔU = …………………………………… = …….. J $(3/2)P_{ATM}V_0((V_0/V_1)^{\gamma-1}-1) = (3/2)P_{ATM}V_0(4-1) = (9/2)P_{ATM}V_0$ = 72 J [essendo il gas perfetto e monoatomico si ha $\Delta U = nc_V(T_1-T_0) = (3/2)(P_1V_1-P_0V_0)$. Usando la legge delle adiabatiche reversibili si ha $P_1V_1 = P_0(V_0/V_1)^{\gamma}V_1 = P_0V_0(V_0/V_1)^{\gamma-1}$, da cui, ricordando che $P_0 = P_{ATM}$, la soluzione] notiamo innanzitutto che, essendo la fune inestensibile, il tratto Δh è legato all'aumento ΔV del volume del gas. Infatti deve essere $\Delta V = S\Delta h$. Applichiamo il primo principio della termodinamica alla trasformazione (l'applicazione del primo principio non dipende dalla reversibilità della trasformazione). Deve essere $Q = L + \Delta U$. Essendo il gas perfetto (e monoatomico), possiamo subito affermare $\Delta U = nc_V\Delta T = (3/2)nR\Delta T = (3/2)nR(T'-T_0) = (3/2)(P'V'-P_0V_0) = (3/2)Sh_0(P'$ Osserviamo poi che la trasformazione considerata non può essere paragonata a nessuna dell la somma dei lavori compiuti o subiti nelle varie trasformazioni, che si ottiene facilmente calcolandosi il lavoro dell'isoterma, L_1, e il lavoro dell'isobara, L_2 (l'isocora ha ovviamente lavoro nullo). La risposta si ottiene usando le espressioni delle variabili di stato determinate prima]



4. Un sistema di conduttori, noto come "cavo coassiale", è costituito da un cilindro pieno di materiale ottimo conduttore, di raggio r_0 = 1.0 mm e lunghezza L = 1.0 m, a cui è coassiale un sottile guscio cilindrico di materiale ottimo conduttore, di spessore trascurabile, raggio r_1 = 1.0 cm e lunghezza pari a L. Un'"estremità" del cavo coassiale è collegata a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 23 V come mostrato in figura (il polo positivo è collegato al conduttore centrale), mentre l'altra "estremità" è chiusa su un resistore R = 46 ohm. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica e $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto e trascurate gli "effetti ai bordi", cioè supponete che la simmetria del cavo coassiale sia effettivamente cilindrica]

a) Quanto vale, se diversa da zero, la carica elettrica Q che si accumula in condizioni stazionarie sul conduttore centrale? [Spiegate bene in brutta! Può farvi comodo ricordare che $ln(10) \sim 2.3$]

Q = ………………………………… ~ ...… C $2\pi\varepsilon_0 LV_0/ln(r_1/r_0) \sim 1.4\times10^{-10}$ C [in condizioni stazionarie, il sistema si comporta dal punto di vista elettrostatico come un condensatore cilindrico, le cui armature sono i due conduttori. La differenza di potenziale tra le armature (essendo i materiali ottimi conduttori non c'è caduta di tensione muovendosi lungo la lunghezza del cavo coassiale) è $\Delta V = -V_0$ (il segno negativo dipende dal fatto che il conduttore esterno si trova a potenziale minore di quello interno per come è collegato il generatore). D'altra parte per definizione è $\Delta V = -\int_{r1}^{r2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{r1}^{r2}Edr$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo scelto un sistema di riferimento cilindrico concentrico al cavo coassiale e notato che, per la simmetria del problema, il campo deve essere radiale. Il campo elettrico nella regione di spazio tra i conduttori non è uniforme e il suo modulo dipende dalla distanza r dall'asse del sistema. Per trovare la dipendenza $E(r)$ conviene usare il teorema di Gauss: $Q/\varepsilon_0 = \Phi_S(E)$.Scegliendo per il calcolo del teorema di Gauss un "barattolo" cilindrico di raggio generico r compreso tra i due conduttori, asse parallelo all'asse del cavo coassiale e lunghezza pari a quella del cavo coassiale si ha, tenendo conto del già citato carattere radiale del campo (il flusso passa solo attraverso la superficie laterale del barattolo), $\Phi_S(E) = 2\pi rLE(r)$. Si ottiene quindi: $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 Lr)$. A questo punto, tale espressione funzionale del campo elettrico può essere introdotta nell'integrale scritto in precedenza, che dunque recita: $\Delta V = -V_0 = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))\int_{r1}^{r2}(1/r)dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))ln(r_2/r_1)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo risolto l'integrale. Da qui, esplicitando Q, si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale in modulo, e che direzione e verso possiede, il campo magnetico B che si misura in condizioni stazionarie in un punto che si trova nella regione di spazio tra i due conduttori, a una distanza r_2 = 5.0 mm rispetto all'asse del cavo coassiale? [Spiegate bene in brutta il procedimento seguito!]

Direzione e verso: ……………………….. per la simmetria del sistema, il campo magnetico ha direzione tangenziale, cioè le linee di campo formano delle circonferenze concentriche all'asse del cavo coassiale. Il verso si deduce con la regola della mano destra (versione "ciao ciao"), tenendo conto che la corrente scorre nel conduttore centrale, l'unico che ha una corrente concatenata (vedi dopo), da sinistra verso destra di figura

B = …………………………………… = …….. T $\mu_0 V_0/(2\pi r_2 R) = 2.0\times10^{-5}$ T [avendo stabilito per ragioni di simmetria quale è la direzione del campo, conviene servirsi del teorema di Ampere. Usando come linea (chiusa) di circuitazione una circonferenza concentrica al cavo e di raggio r_2, e notando che l'intensità del campo magnetico nella simmetria considerata può dipendere solo dal raggio, e dunque è costante su questa circonferenza, si ha che la circuitazione del campo vale $2\pi r_2 B$. D'altra parte la corrente concatenata a questa circuitazione è tutta e solo la corrente che passa nel conduttore centrale, la cui intensità può essere facilmente determinata con la legge di Ohm come $I = V_0/R$. Da qui si ottiene la soluzione]

c) Supponete ora che all'istante t_0 = 0 il generatore venga scollegato dalle armature. In queste condizioni si osserva che la corrente $I(t)$ che fluisce nel resistore segue un andamento "esponenziale decrescente" con il tempo t. Quanto vale il "tempo caratteristico" τ di tale esponenziale decrescente?

τ = …………………………………… ~ .... s $2\pi\varepsilon_0 LR/ln(r_1/r_0) \sim 1.1\times10^{-9}$ s [come già affermato, dal punto di vista elettrostatico il cavo coassiale si comporta come un condensatore cilindrico che si viene a "scaricare" attraverso la resistenza R. Detta C la capacità del condensatore, il tempo caratteristico di scarica si esprime come RC. D'altra parte la capacità è stata in pratica determinata nella risposta al quesito a), poiché per definizione essa vale $C = |Q/\Delta V| = 2\pi L\varepsilon_0/ln(r_2/r_1)$. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 29/1/2010 Firma: