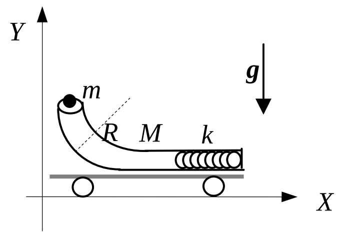
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 10/6/2010

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

--- *PARTE 1/2 (MECCANICA PUNTO E SISTEMI)*

1. Un tubo (cavo) che ha la forma di un arco di circonferenza di raggio R = 30 cm seguito da un tratto orizzontale, è montato su un carrellino che può muoversi con **attrito trascurabile** nella direzione X (**orizzontale**) di un piano rigido e indeformabile. La massa complessiva del sistema tubo+carrellino (più ruote e quant'altro!) è M = 1.0 kg. L'estremità del tubo rivolta verso "l'alto" (vedi figura) è aperta; l'altra estremità è chiusa e una molla di costante elastica k = 9.8 N/m e massa trascurabile è saldata al tappo di chiusura, in modo che il suo asse sia orizzontale e che la sua estremità libera sia disposta come in figura. Inizialmente il carrellino è fermo. Ad un dato istante una pallina (puntiforme) di massa m = $M/2$ = 0.50 kg viene lasciata cadere, con velocità iniziale nulla, dall'estremità superiore del tubo (in figura si rappresenta questa condizione iniziale del problema). La pallina penetra nel tubo, dove si muove con **attrito trascurabile**, giungendo sull'estremità libera della molla, che dunque viene compressa. Le domande che seguono si riferiscono all'istante in cui la molla raggiunge la **massima compressione.** [Considerate **trascurabile la sezione del tubo**; usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!!! (in particolare, la sezione del tubo deve ritenersi trascurabile)

a) Quanto valgono, componente per componente, gli spostamenti Δx_{CM} e Δy_{CM} del **centro di massa del sistema** costituito da pallina+tubo+carrellino che si misurano tra l'istante iniziale (quando tutto è fermo) e l'istante "finale" (quando la molla raggiunge la massima compressione)? [Riferitevi al sistema cartesiano di figura]

Δx_{CM} = …………………………………… = ………. m   0   [sul sistema non agiscono forze esterne in direzione X , dunque esso è isolato lungo tale direzione. Di conseguenza, il centro di massa non ha accelerazione lungo X e, essendo fermo inizialmente, fermo rimane per tutto il processo. Quindi non c'è spostamento in questa direzione]

Δy_{CM} = …………………………………… = ………. m $-R/3$= -0.10 m   [in questa direzione il sistema non è isolato dato che su di esso agiscono forze esterne (forza peso e reazione vincolare del piano sulle ruotine del carrellino). Di conseguenza il centro di massa si sposta. Per definizione di posizione di centro di massa si ha $\Delta y_{CM} = \Delta(my+My)/(m+M) = (\Delta y + \Delta Y)/3$, dove abbiamo indicato con Δ l'"operatore" che indica una variazione, con Δy la variazione della posizione della pallina, con ΔY quella del carrellino (si intende, lungo la direzione Y) e dove abbiamo tenuto in conto che le masse non cambiano durante il processo e che $M = 2m$. Evidentemente si ha $\Delta Y = 0$ e $\Delta y = -R$ (il tubo ha sezione trascurabile e il sistema di riferimento punta verso l'alto), da cui il risultato]

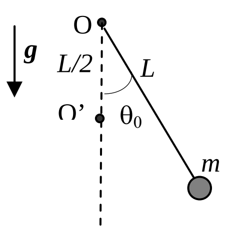
b) Quanto vale la velocità V del carrellino nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione? [Spiegate bene, in brutta, il procedimento usato]

V = …………………………………… = ………. m/s   0   [poiché il sistema è isolato in direzione X , in questa direzione, che è quella di moto del carrellino, si conserva la quantità di moto. Inizialmente tutto è fermo e quindi la quantità di moto è nulla, per cui, in ogni istante, deve essere $mv_X+MV = 0$. Nell'istante di massima compressione la pallina, se si muove, si muove in direzione X; inoltre in questo istante deve essere $v=V$ (altrimenti la molla continuerebbe a comprimersi oppure si starebbe estendendo). Da qui la soluzione]

c) Quanto vale, in modulo, la compressione massima Δ_{MAX} della molla? [A scanso di equivoci, si ricorda che la compressione rappresenta la differenza fra lunghezza di riposo e lunghezza "attuale" della molla; anche in questo caso spiegate bene il procedimento]

Δ_{MAX} = …………………………………… ~ ………. m $(2mgR/k)^{1/2}$ ~ 0.55 m   [nel problema agiscono solo forze conservative, per cui si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Sia all'inizio che all'istante di massima compressione della molla tutto è fermo, per cui ΔE_K=0. La variazione di energia potenziale del sistema è dovuta a variazione di quota, $\Delta U_G = -mgR$ (il tubo ha sezione trascurabile) e compressione della molla (all'inizio, essa si trova ovviamente alla lunghezza di riposo), $\Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta_{MAX}^2$. Uguagliando si ottiene la soluzione]

2. Una massa puntiforme m = 50 g è attaccata ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L = 98 cm, che all'altro estremo è inchiodato nel punto O a una parete rigida verticale. In queste condizioni il sistema costituisce in pratica un pendolo, che può muoversi con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente la massa viene mantenuta ferma da una qualche forza esterna in modo che la fune sia tesa e che formi un angolo $\theta_0 = \pi/6$ rispetto alla verticale; a un dato istante, la massa viene lasciata libera di muoversi da questa posizione con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)$=1/2 e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune quando la massa passa per la posizione di equilibrio (cioè quando la fune è diretta lungo la verticale)?

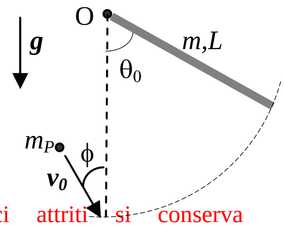
T = …………………………….. ~ .... N $2mg(1-cos\theta_0) +mg$~ 0.62 N   [nell'istante considerato la massa è dotata di velocità di direzione orizzontale e modulo v che può essere ricavato attraverso la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U_G=(m/2)v^2-mg\Delta h$. La variazione di quota Δh può essere facilmente calcolata in funzione di θ_0 da semplici ragionamenti di trigonometria: $\Delta h = L(1-cos\theta_0)$, da cui $v = (2gL(1-cos\theta_0))^{1/2}$. Allora nell'istante considerato la massa si sta muovendo lungo un'orbita circolare con la velocità istantanea appena calcolata: affinché questo sia possibile è necessario che sulla massa agisca un'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v^2/L = 2g(1-cos\theta_0)$. Le uniche forze in direzione verticale che agiscono sulla massa sono la forza peso mg , diretta verso il basso, e la tensione della fune T , che ha direzione centripeta. Dunque deve essere $ma_C = mv^2/L = 2mg(1-cos\theta_0)=T-mg$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che, sulla verticale del chiodo O, al di sotto di questo, si trovi un altro chiodo, o perno, O', rigido e fissato rigidamente alla parete verticale. In queste condizioni, quando la fune passa per la verticale giunge sul perno O' e "comincia ad avvolgervisi". Sapendo che la distanza OO' è $L/2$ (vedi figura), quanto vale l'angolo ϕ che la fune forma rispetto alla verticale nell'istante in cui la massa inverte la direzione del proprio moto? [Trascurate ogni eventuale forma di "dissipazione" di energia dovuta all'interazione tra fune e perno O']

ϕ = …………………………….. ~.......... gradi $arcos(2cos\theta_0\text{-}1)$ ~ 43 gradi   [nel punto di inversione la massa si trova istantaneamente ferma; poiché si suppone di poter trascurare ogni forza non conservativa, nella posizione di inversione la massa deve trovarsi allo stesso potenziale (dovuto alla forza peso) che aveva all'inizio, ovvero alla stessa quota iniziale, cioè deve essere: $mgL(1\text{-}\cos\theta_0) = mg(L/2)(1\text{-}\cos\phi)$, da cui la soluzione]

--- PARTE 3a (CORPO RIGIDO)

3. Un'asta sottile e omogenea di massa m = 0.10 kg e lunghezza L = 30 cm è imperniata a un suo estremo (O in figura) in modo da poter ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente l'asta viene mantenuta ferma nella posizione di figura (l'angolo rispetto alla verticale vale $\theta_0=\pi/3$) da una forza esterna che a un dato istante viene improvvisamente rimossa: l'asta si mette dunque in movimento con velocità angolare iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3)$=1/2 e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



a) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta quando essa passa per la posizione di equilibrio?

ω = …………………………………… = ……… rad/s $(3g/(2L))^{1/2}$= 7.0 rad/s   [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U_G$, con $\Delta E_K = (I/2)\omega^2$ (inizialmente l'asta è ferma) e $\Delta U_G = -mg(L/2)(1\text{-}cos\theta_0)=-mgL/4$. Essendo per un'asta omogenea che ruota attorno a un perno passante per un suo estremo $I = (m/3)L^2$, si ottiene la soluzione] la somma dei lavori compiuti o subiti nelle varie trasformazioni, che si ottiene facilmente calcolandosi il lavoro dell'isoterma, L_1, e il lavoro dell'isobara, L_2 (l'isocora ha ovviamente lavoro nullo). La risposta si ottiene usando le espressioni delle variabili di stato determinate prima]

b) Supponete ora che, esattamente quando l'asta passa per la posizione di equilibrio, il suo estremo "in basso" (quello non imperniato) venga colpito da un proiettile puntiforme, di massa m_P = $m/2$ che, subito prima dell'urto, ha velocità $\boldsymbol{v_0}$ di modulo incognito e direzione come in figura (l'angolo rispetto alla verticale vale ϕ = π/6). In seguito all'urto il proiettile rimane **conficcato** nell'asta. Discutete per bene, in brutta, quali grandezze si conservano nel processo (considerando il sistema subito prima e subito dopo l'urto).

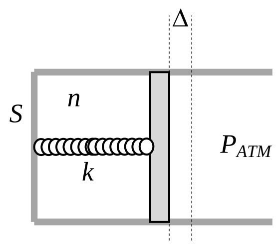
Discussione: …………………………………… l'urto è anelastico e dunque non si conserva l'energia cinetica del sistema. Inoltre esso non è isolato, a causa della presenza del perno in O che può trasferire forze impulsive sull'asta. Tuttavia, scegliendo come polo proprio il punto O, si vede che le forze esterne (impulsive, la forza peso fa comunque effetto trascurabile nella breve durata dell'urto) non producono momento, per cui si conserva il momento angolare (assiale) rispetto a tale polo.

c) Sapendo che, **subito** dopo l'urto, l'asta (ovvero il sistema composto da asta+proiettile conficcato) si ferma istantaneamente, quanto vale v_0?

v_0 = …………………………………… = ……… m/s $4\omega L/3$ = 2.8 m/s   [come già discusso al punto precedente, l'unica quantità che si conserva è il momento angolare (assiale) rispetto al polo O. Dopo l'urto esso è nullo, dato che il sistema è fermo. Prima dell'urto esso è dovuto al movimento di rotazione dell'asta e al movimento traslatorio del proiettile, cioè: $L_0 = I\omega+L_{PROIETT.}$. Il momento angolare del proiettile prima dell'urto può essere calcolato dalla definizione vettoriale $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v_0}x\boldsymbol{R}$', essendo $\boldsymbol{v_0}$ il vettore velocità e $\boldsymbol{R}$ il vettore che congiunge il polo O con il punto di impatto. Si vede chiaramente che $|L| = m_P\, v_0 L sin\phi = mv_0L/4$ (si è usato m_P=$m/2$ e $sin(\pi/6)$=$cos(\pi/3)$=$1/2$). Per quanto riguarda il segno, esso è opposto rispetto a quello del momento angolare dell'asta, come si può facilmente dedurre esaminando i versi dei vari spostamenti. Quindi imponendo la conservazione del momento angolare si ottiene la soluzione]

--- PARTE 3b (TERMODINAMICA)

4. Una quantità (incognita) n di moli di gas monoatomico perfetto è contenuta in un recipiente (rigido) cilindrico che ha sezione di area S = 200 cm^2. Il recipiente è chiuso da un tappo a tenuta che ha **massa trascurabile** e può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale. Il tappo è collegato alla base del recipiente da una molla di massa trascurabile e costante elastica (incognita) k; inoltre esso è a contatto con l'ambiente esterno, che si trova alla pressione P_{ATM} = 1.00x10^5 Pa. Inizialmente il gas si trova in equilibrio alla temperatura θ_0= -73 ^{0}C e occupa il volume V_0 = 8.31 litri; in tali condizioni la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]



a) Quanto vale il numero di moli n del gas?

n = ……………………………… = …….. moli $P_{ATM}V_0/(RT_0)$=0.500 moli [il gas, che possiamo considerare perfetto, è all'equilibrio alla pressione $P_0 = P_{ATM}$, infatti sul gas non agiscono altre forze se non quelle dovute alla pressione atmosferica, che spinge sul tappo. Quindi dalla legge dei gas perfetti si ottiene la soluzione, dove, ovviamente, la temperatura va espressa in Kelvin, cioè $T_0 = 273+\theta_0$ e il volume in m^3]

b) Il sistema viene quindi lasciato termalizzare con l'ambiente, che si trova a temperatura θ = 27 ^{0}C (e si comporta, ovviamente, da termostato). Nella nuova condizione di equilibrio si osserva che il tappo si è allontanato dal fondo del recipiente per un tratto Δ = 5.00 cm. Quanto vale la costante elastica k della molla? [Supponete trascurabile ogni effetto termodinamico della variazione di temperatura sulla molla!]

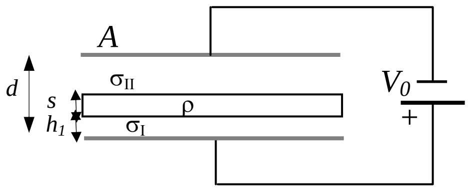
k = …………………………………… = ……… N/m $(S/\Delta)(nRT/(V_0+S\Delta))\text{-}P_{ATM} = P_{ATM}(S/\Delta)((V_0/(V_0+S\Delta))(T/T_0))$ = 1.34x10^4 N/m   [nella nuova condizione di equilibrio il gas si trova alla pressione $P = P_{ATM}+k\Delta/S$, dato che su di esso agisce anche la pressione dovuta all'estensione della molla, che corrisponde a una forza, in modulo, $k\Delta$. Deve essere $P = nRT/V$, con $V = V_0+S\Delta$, da cui la soluzione] vale appunto, in è la somma dei lavori compiuti o subiti nelle varie trasformazioni, che si ottiene facilmente calcolandosi il lavoro dell'isoterma, L_1, e il lavoro dell'isobara, L_2 (l'isocora ha ovviamente lavoro nullo). La risposta si ottiene usando le espressioni delle variabili di stato determinate prima]

c) Quanto valgono il lavoro L fatto dal gas nel processo e il calore Q che esso scambia con l'ambiente durante il processo?

L = …………………………………… = ... J $P_{ATM}S\,\Delta + (k/2)\Delta^2$ = 117 J   [il lavoro del gas è opposto al lavoro L_{EXT} fatto dalle forze esterne sul gas. Queste forze sono quelle dovute alla pressione esterna, che è costantemente mantenuta al valore P_{ATM} , e quelle dovute alla forza della molla, che è invece non costante durante il processo. Si ha: $L_{PATM} = -SP_{ATM}\Delta$ e L_{MOLLA}=-$\Delta \underline{U_{ELA}}$ = $-(k/2)\Delta^2$ (ricordate che inizialmente la molla è alla lunghezza di riposo!). Da qui si ottiene la soluzione]

Q = …………………………………… = ... J $L+\Delta U = L+nc_V(T\text{-}T_0)$ = 740 J   [dal primo principio, ricordando che c_V =$(3/2)R$ per un gas perfetto monoatomico. Notate che, non essendo la trasformazione riferibile ad alcuna delle trasformazioni (reversibili, e questa non è detto che lo sia!) "canoniche", il risultato non si può ottenere per altra via]

5. Due sottili lamine di materiale ottimo conduttore, spessore **trascurabile** ed area A = 1.0 m^2 sono poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza d = 10 cm. Nello spazio (vuoto) tra le lamine si trova una lastra conduttrice globalmente **scarica**, di area A identica a quella delle lamine e spessore s = 2.0 cm. La configurazione è descritta schematicamente nella figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza h_1 = 1.0 cm dalla lamina "inferiore". Ad un dato istante, le due lamine, che inizialmente erano **scariche**, vengono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 100 V. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto e supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**]



Disegno non in scala!!!

a) Quanto valgono, in condizioni stazionarie, la densità di carica di volume ρ all'interno della lastra conduttrice e le densità di carica superficiale σ_I e σ_{II} sulle sue due facce indicate in figura (rispettivamente quella inferiore e superiore, nel disegno)?

ρ = …………………………………... = ………… C/m^3 0 [essendo il sistema in condizioni stazionarie, cioè di equilibrio, il campo elettrico interno alla lastra deve essere nullo, e nulla deve essere la densità di carica di volume, come si può facilmente dimostrare]

σ_I= …………………………………… = ………… C/m^2 $-\varepsilon_0 V/(d-s)$ =-1.1x10^{-10} C/m^2

σ_{II}= …………………………………… = ………… C/m^2 $-\sigma_I$ =1.1x10^{-10} C/m^2 [detti E_1 ed E_2 i campi nella regioni compresa tra lamina inferiore e lastra e tra lastra e lamina superiore, per Gauss deve essere $\sigma_I = - E_1\varepsilon_0$ (il segno negativo viene dal fatto che il versore rilevante è antiparallelo al campo!); per la neutralità della lastra deve essere $\sigma_{II} = - \sigma_I$; d'altra parte per Gauss deve anche essere $E_2 = \sigma_B/\varepsilon_0 = E_1$. Sfruttando la definizione di differenza di potenziale, detta $h_2 = d - s - h_1$ la distanza tra faccia superiore della lastra e lamina superiore, deve allora essere $V_0 = E_1h_1+E_2h_2 = E_1(d-s)$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore per portare il sistema in condizioni stazionarie?

L = …………………………………… = ………… J $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0 A/(d-s)) V_0^2/2$ = 3.5x10^{-7} J [il lavoro è pari alla energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale, all'equilibrio, $CV_0^2/2$; la capacità C del condensatore ad armature piane e parallele con all'interno la lastra conduttrice scarica si determina come segue: $C=Q/V_0$, essendo Q la carica che si trova all'equilibrio sulla lamina collegata la polo positivo. D'altra parte, tenendo conto delle considerazioni sui campi svolte nella risposta al quesito precedente, deve essere $V_0 = E_1(d-s)$. Applicando Gauss a una scatola cilindrica con asse verticale e superfici di base una fuori del condensatore e l'altra nella regione tra lamina e lastra, si ha $\sigma = \varepsilon_0 E_1$. D'altra parte la densità di carica σ che si trova sulla lamina è tale che $Q = \sigma A$ (si suppone distribuzione omogenea dato che si possono trascurare gli effetti ai bordi), da cui, combinando, si ottiene: $C = \varepsilon_0 A/(d-s)$, da cui la soluzione. Si noti che allo stesso risultato si può giungere anche considerando il sistema come una serie di due condensatori piani paralleli con distanza tra le armature rispettivamente h_1 e h_2]

6. Sul piano XY di un sistema cartesiano XYZ si trovano due sottili fili di materiale ottimo conduttore elettrico. I due fili, che sono entrambi lunghi L = 10 m (la lunghezza è molto maggiore del diametro, così che essi possono essere considerati "infiniti" dal punto di vista "elettromagnetico"), sono entrambi paralleli all'asse X. In particolare il filo 1 si trova alla coordinata $y = d$ = 1.0 cm , mentre il filo 2 si trova in $y = -d$ = -1.0 cm (le estremità dei fili si trovano, per entrambi, alle posizioni $x_{LEFT}=-L/2$ e $x_{RIGHT} = L/2$). Le estremità "di sinistra" sono collegate a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 20 V, disposto in modo che il polo positivo sia attaccato al filo 1 e quello negativo al filo 2; quelle "di destra" sono collegate tra loro attraverso un resistore di resistenza elettrica R = 0.50 ohm. Il sistema va considerato in condizioni stazionarie. [Usate μ_0 = 4πx10^{-7} T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]

a) Quanto vale il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ che si misura in un punto dell'asse X (si intende, con $-L/2<x<L/2$)? [Esprimete il risultato in modo vettoriale, cioè chiarendo anche direzione e verso]

$\boldsymbol{B}$ = ……………………………… = …….. T $-\mu_0(V_0/R)\boldsymbol{z}/(\pi d)$ = (-1.6x10^{-3} T)$\boldsymbol{z}$, con $\boldsymbol{z}$ versore dell'asse Z [in condizioni stazionarie attraverso i due fili circola la stessa corrente di intensità $I = V_0/R$. Questa corrente dà luogo a un campo di induzione magnetica la cui direzione è tangenziale e il verso può essere determinato con la regola della mano destra, versione "ciao ciao". In particolare, la corrente scorre nel verso positivo dell'asse X all'interno del filo 1 e in quello negativo nel filo 2. Nello spazio tra i due fili, e quindi anche sull'asse X (che è sulla "mezzeria" del sistema), il filo 1 genera un campo magnetico diretto lungo $-Z$ e il filo 2 anche.L'intensità del campo magnetico si determina con il teorema di Ampere; detta r la distanza dal filo (infinito), si ha $B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$. Sull'asse X per entrambi i fili si ha $r = d$ e quindi l'intensità del campo magnetico è doppia rispetto a quella generata da un solo filo. Da qui la soluzione]

b) Quanto vale la forza $\boldsymbol{F}$ di origine magnetica che il filo 2 esercita sul filo 1? [Anche qui esprimete il risultato vettorialmente]

$\boldsymbol{F}$ = …………………………………… = ……… N $\mu_0(V_0/R)^2L\boldsymbol{y}/(4\pi d)$ = (1.6x10^{-1} N)$\boldsymbol{y}$ [su un elemento di filo 1 di lunghezza $\boldsymbol{dl}$ si esercita una forza $d\boldsymbol{F} = I\, d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$, dove $\boldsymbol{B}$ è il campo magnetico generato dal filo 2 sulla posizione del filo 1. Nel caso del filo 1, $\boldsymbol{dl}$ è diretto lungo X , mentre $\boldsymbol{B}$ è diretto nel verso negativo dell'asse Z (vedi sopra). La regola della mano destra dice che la forza è diretta lungo il verso positivo dell'asse Y (i fili tendono ad allontanarsi tra loro per effetto della forza di interazione magnetica). Inoltre per tutta la lunghezza del filo la forza rimane costante, per cui l'integrazione della forza infinitesima è banale e dà: $F = IBL$. Tenendo conto che il campo magnetico ha intensità di modulo $B = \mu_0 I/(2\pi(2d)) = \mu_0(V_0/R)/(4\pi d)$ si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 10/6/2010 Firma: