Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 1/7/2010

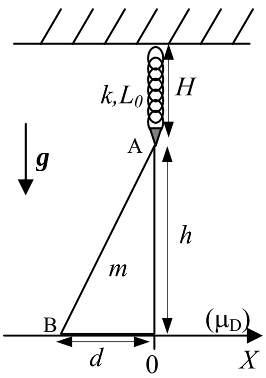
Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

--- *PARTE 1/2 (MECCANICA PUNTO E SISTEMI)*

1. Un blocchettino di massa M = 1.0 kg è attaccato a una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 1.0\text{x}10^2$ N/m il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida verticale. Il blocchettino, che si può muovere con **attrito trascurabile** in direzione **orizzontale**, è inizialmente fermo nella propria posizione di equilibrio. A un dato istante su di esso incide un proiettile (puntiforme) di massa $m = M/4$ che ha una velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta orizzontalmente contro il blocchettino; in seguito all'urto tra i due corpi, da ritenere perfettamente **elastico**, il blocchettino inizia a muoversi comprimendo la molla.
   a) Quanto vale la compressione massima Δ_{MAX} raggiunta dalla molla? [A scanso di equivoci, si ricorda che la compressione è la differenza tra lunghezza di riposo e lunghezza "attuale" della molla]
   Δ_{MAX} = …………………………………… = ……… m $(M/k)^{1/2}(2/5)v_0$ = 0.40 m [il processo può essere diviso in due fasi. Nella prima si ha l'urto, elastico, tra proiettile e blocchettino; nella seconda si assiste allo spostamento del blocchettino e alla compressione della molla. Nella prima fase si conservano quantità di moto e energia cinetica del sistema (l'urto è elastico), per cui si ha: $mv_0 = mv+MV$ e $(m/2)v_0^2 = (M/2)V^2+(m/2)v^2$. Usando la relazione fra le masse e semplificando opportunamente, queste espressioni diventano: $v_0 = v+4V$ e $v_0^2=v^2+4V^2$. Questo è un sistema di due equazioni che, risolto per l'incognita V (la velocità del blocchettino subito dopo l'urto), dà: $V = (2/5)v_0$ (l'altra soluzione, V = 0, non è fisicamente accettabile perché indica che il blocchettino non si muove, ovvero non è colpito dal proiettile). Nella seconda fase, non essendoci forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, per cui, tenendo conto che nell'istante di massima compressione il blocchettino è fermo e che inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. $0 = -(M/2)V^2+(k/2)\Delta_{MAX}^2$, da cui la soluzione]
   b) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra l'istante dell'urto e quello di massima compressione della molla?
   Δt =…………………………………… = ……… s $(\pi/2)(M/k)^{1/2}$ = 0.16 s [dopo l'urto, il blocchettino prende a muoversi di moto armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Ci si può rendere conto facilmente (e si può anche dimostrare matematicamente) che l'intervallo di tempo richiesto è pari a un quarto dell'intero periodo di oscillazione, da cui, ricordando che $T = 2\pi/\omega$, la soluzione]

2. Un blocco di massa m = 5.0 kg ha sezione con forma di triangolo rettangolo e cateti di lunghezza h = 40 cm (posto in direzione verticale) e d = 20 cm (posto in direzione orizzontale). Il blocco è vincolato a scorrere su un piano **orizzontale.** Come mostrato in figura, su una delle superfici del blocco, quella che appare inclinata in sezione, spinge un puntale (**puntiforme**!) montato all'estremità di una molla con costante elastica $k = 5.0\text{x}10^2$ N/m. L'altro estremo della molla è fissato a un solaio rigido e indeformabile. La molla e il puntale hanno entrambi massa trascurabile; inoltre l'asse della molla si mantiene sempre in direzione verticale e non c'è attrito tra puntale e superficie del blocco; infine, la molla ha lunghezza di riposo $L_0 = h+H$, dove H = 20 cm è la distanza tra il punto più "in alto" del blocco e il solaio (vedi figura). Inizialmente il blocco è mantenuto fermo da qualche forza esterna nella configurazione di figura, in cui la molla è alla sua massima compressione e il puntale preme sul punto più "in alto" del blocco (marcato con A in figura). Quindi la forza esterna viene rimossa (senza fornire alcuna velocità iniziale) e il blocco si trova libero di muoversi in direzione orizzontale (verso destra). [Trascurate ogni movimento di tipo non traslazionale, ad esempio ribaltamenti o altro]

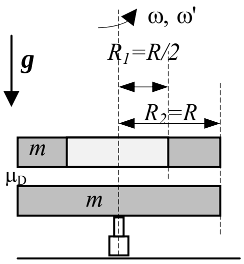


   a) Supponendo per questa domanda che l'attrito tra blocco e piano orizzontale sia **trascurabile**, quanto vale la velocità V del blocco nell'istante in cui il suo estremo più "in basso" (marcato con B in figura) passa sotto il puntale?
   V = …………………………………… = ……… m/s $(k/m)^{1/2}h$= 4.0 m/s [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)V^2$ (inizialmente il blocco è fermo) e la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza elastica: $\Delta U = (k/2)\Delta_{fin}^2 - /k/2)\Delta_{in}^2$. Poiché la lunghezza di riposo della molla coincide esattamente con la lunghezza che essa assume nell'istante "finale" del processo considerato, è Δ_{fin}= 0. Invece, per ovvi motivi geometrici, si ha $\Delta_{in}=h$, da cui la soluzione]
   b) Come si scrive, in funzione della coordinata x, il **modulo** della forza $F(x)$ che il puntale esercita sulla superficie del blocco con cui si trova a contatto? [Usate il sistema di riferimento X di figura, orizzontale e centrato sulla verticale della molla. Dovete scrivere una funzione matematica di x: **non usate valori numerici** nella sua espressione]
   $F(x)$ = …………………………………… $|k(H+xh/d-L_0)|=kh(1-x/d)$ [è evidente che la compressione della molla, e dunque la forza elastica da essa generata attraverso il puntale, dipende dalla posizione del blocco, e quindi dalla coordinata x. Sulla base di semplici considerazioni geometriche, si vede che la lunghezza della molla è $L(x)=H+xtg\theta$, essendo θ l'angolo formato dal "piano inclinato" con l'orizzontale. La goniometria stablisce poi $tg\theta = h/d$, da cui la risposta, dove si è anche tenuto conto di $L_0 = H+h$ e si sono considerati i segni in modo da ottenere una grandezza sempre positiva, come deve essere il modulo]
   c) Immaginate ora che, a differenza di quanto considerato nel quesito a), il piano su cui scorre il blocco presenti un **attrito dinamico** con coefficiente μ_D = 0.50. Quanto vale, in presenza di questo attrito, la velocità del blocco V' che si calcola nelle condizioni di cui alla domanda a)? [In pratica vi si chiede di ripetere la soluzione del punto a), considerando però la presenza dell'attrito; usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   V' = …………………………………… ~ ……… m/s $((k/m)h^2-2\mu_D(d/m)(mg+kh/2))^{1/2}$ ~ 3.2 m/s [stavolta l'energia meccanica non si conserva e l'espressione di bilancio energetico stabilisce: $L_A=\Delta E_K+\Delta U$. Le grandezze al secondo membro hanno la stessa espressione di prima, cioè della soluzione in assenza di attrito. Il lavoro della forza di attrito, L_A, si calcola tenendo conto che la forza di attrito dinamico ha modulo $F_A = \mu_D N = \mu_D(mg+F)$. Infatti, per impedire il movimento verticale del blocco, la reazione vincolare N che il piano orizzontale esercita sul blocco deve essere in modulo pari alla somma della forza peso del blocco e della forza esercitata su di lui dal puntale (cioè dalla molla), che ha anche direzione verticale essendo verticale l'asse della molla. Il lavoro si calcola allora nel seguente modo: $L_A = \int_0^d \mathbf{F_A}\cdot d\mathbf{s} = -\int_0^d F_A dx = -\mu_D \int_0^d (mg+F)dx = -\mu_D \int_0^d (mg+kh(1-x/d))dx$, dove abbiamo assunto come estremi di integrazione, riferiti all'asse x, le posizioni iniziale e finale dello spigolo "destro" del blocco, abbiamo posto un segno negativo per tenere conto che la forza di attrito si oppone allo spostamento e abbiamo inserito

l'espressione della forza $F(x)$ determinata al punto precedente. Il calcolo dell'integrale, che è ben banale, fornisce: $L_A = -\mu_D((mg+kh)d-kh(d^2/(2d)) = -\mu_D(mg+khd/2)$. Da qui, sfruttando il bilancio energetico, si ottiene la soluzione. Si noti che la soluzione prevede di estrarre la radice quadrata di una grandezza costruita mediante sottrazione. Dunque il radicale potrebbe, in certe condizioni (nel caso di forte contributo dell'attrito), essere negativo. L'eventuale significato fisico di tale condizione sarebbe che, in pratica, il blocco non percorrerebbe per intero lo spostamento considerato nel testo]

--- *PARTE 3a (CORPO RIGIDO)*

3. Una piattaforma ha la forma di un disco **omogeneo** di massa m = 10 kg e raggio R = 0.50 m e può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al suo asse geometrico essendovi imperniata rigidamente con un sistema di cuscinetti a sfera fissato a un pavimento rigido. L'asse della piattaforma è verticale; la superficie (la superficie della base "superiore" del disco) è orizzontale e presenta **attrito dinamico** con coefficiente μ_D = 0.50. Supponete che un motore abbia messo in rotazione la piattaforma alla velocità angolare ω = 0.90 rad/s e che quindi il motore venga scollegato e la piattaforma si trovi libera di ruotare. A un dato istante, un anello spesso, di raggio interno $R_1=R/2$ e raggio esterno $R_2 = R$ e massa m pari a quella della piattaforma, viene "appoggiato" sulla superficie superiore della piattaforma. L'"appoggio" avviene molto delicatamente (la velocità di traslazione con cui l'anello viene avvicinato alla piattaforma è trascurabile) e avendo cura di mantenere coassiali i due corpi, come rappresentato in figura (vista laterale, che si riferisce a un istante prima dell'appoggio). A causa della forza di attrito, l'anello, che inizialmente è fermo, inizia a ruotare attorno al proprio asse. Dopo un certo transiente, i due corpi assumono la stessa velocità angolare ω'. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale il momento di inerzia I_A dell'anello? [Si intende che il momento di inerzia deve essere calcolato per rotazioni attorno all'asse geometrico; illustrate per bene in brutta il procedimento seguito per il calcolo]
I_A = ... = ... kg m^2 $I_A=(5/8)mR^2$ = 1.6 kg m^2 [il momento di inerzia dell'anello si calcola utilizzando la definizione di momento di inerzia e integrando prendendo, come elementi infinitesimi di volume, tanti gusci cilindrici di spessore inifinitesimo (la geometria prevede una evidente simmetria cilindrica e, come si può facilmente dimostrare, questa è la scelta opportuna). Si ha quindi: $I_A = \int_{vol}\rho_m r^2 dV = \rho_m \int_{R/2}^{R} r^2 2\pi rhdr = 2\pi h\rho_m (R^4-R^4/16)/4 = 15\pi h\rho_m R^4/32$, dove ρ_m è la densità di massa dell'anello (uniforme perché il corpo è omogeneo) e h il suo spessore (incognito). D'altra parte deve anche essere: $m = \rho_m V = \rho_m \pi h (R^2-R^2/4) = 3\rho_m\pi hR^2/4$, da cui si può estrarre l'espressione di ρ_m in funzione di m che, inserita nella precedente, conduce al risultato]

b) Discutete per bene, in brutta, quali grandezze del sistema piattaforma+anello si conservano nel processo considerato (appoggio e messa in movimento dell'anello fino al raggiungimento della velocità di regime). [Esaminate l'eventuale conservazione di energia meccanica, quantità di moto, momento angolare del sistema, spiegando bene cosa succede!]
Discussione: .... nel processo non si conserva l'energia meccanica a causa della presenza della forza di attrito dinamico; inoltre non si conserva la quantità di moto, dato che il sistema non è isolato in direzione verticale (esistono le forze peso e le forze di reazione prodotte perno attorno a cui ruota la piattaforma, a sua volta vincolato al pavimento). Tuttavia, le forze esterne hanno tutte direzione verticale e quindi non producono momento in direzione assiale (cioè verticale), per cui si conserva il momento angolare, perlomeno lungo la direzione assiale che è quella di interesse per il problema. Notate infatti che le forze di attrito, le quali hanno direzione orizzontale e possono evidentemente avere componenti verticali non nulle, sono interne al sistema, e dunque non modificano il momento angolare totale.

c) Quanto vale la velocità angolare ω' che piattaforma e anello possiedono alla fine del processo? [Dovete calcolare la velocità angolare comune ai due corpi, quella che si raggiunge in condizioni di regime]
ω' = ... = ... rad/s $\omega(mR^2/2)/(9mR^2/8)=4\omega/9$ = 0.40 rad/s [per la conservazione del momento angolare (assiale) si ha $L_0=L'=L_A+L_P$, dove con L_0, L', L_A, L_P si intendono il momento angolare (assiale) iniziale, finale, dell'anello, della piattaforma. Poiché inizialmente solo la piattaforma è in moto a velocità angolare ω mentre al termine del processo il sistema è fatto dei due corpi che ruotano entrambi a velocità angolare ω', si ha: $I_P\omega = (I_P + I_A)\omega'$, dove $I_P = mR^2/2$ è il momento di inerzia della piattaforma (disco omogeneo). Usando la risposta al quesito precedente si ha $I_A+I_P = (9/8)mR^2$, da cui la risposta]

d) Come già anticipato nel testo, l'osservazione sperimentale mette in evidenza come ci sia un transiente temporale, cioè un intervallo di tempo Δt, in cui la velocità angolare dell'anello passa da 0 al valore ω' per effetto dell'attrito (dinamico) tra i due corpi. Sareste in grado di stimare l'intervallo di tempo Δt? [La risposta presuppone calcoli e ragionamenti non del tutto banali; provate in ogni caso a delineare in brutta il procedimento che usereste, cercando di andare più avanti possibile]
Δt = ... = ... s $\omega'(I_A+I_P)/\tau = \omega'(81/56)R/(g\mu_D)$ = 5.9x10^{-2} s [l'anello viene accelerato da velocità angolare nulla fino alla velocità di regime calcolata sopra attraverso momenti di forze interne al sistema, cioè date dall'interazione fra i due corpi dovuta all'attrito dinamico. Una prima considerazione è la seguente: la forza di attrito dinamico dipende dal coefficiente di attrito e dalla reazione vincolare, che sono entrambe costanti nel processo. Il momento delle forze (rispetto all'asse di rotazione) è legato alle forze attraverso relazione geometriche (occorre moltiplicare per il braccio), che sono anche costanti nel processo. Dunque è lecito aspettarsi che l'accelerazione dell'anello avvenga in modo uniforme, cioè $\Delta t = \omega'/\alpha$, con α accelerazione angolare (costante). Per determinare, o stimare, α, dimentichiamoci per il momento che il moto considerato implica in realtà uno spostamento (angolare) **relativo** di un corpo rispetto all'altro. Torneremo poi su questo aspetto, ma per ora immaginiamo che il moto sia "assoluto". L'equazione cardinale recita $\alpha = \tau/I_A$ e il problema è quello di determinare il momento delle forze di attrito, τ, rispetto all'asse. Come già osservato, benché la forza di attrito dinamico sia costante e uniforme su ogni elemento della superficie di contatto, per il calcolo del momento occorre scomporre l'anello in tanti gusci cilindrici coassiali di spessore infinitesimo, usando l'espressione consueta per i sistemi a simmetria cilindrica. Ognuno di questi elementini ha massa infinitesima $dm = \rho_m dV = \rho_m 2\pi rhdr$. La forza di attrito su ognuno di questi elementi ha anch'essa carattere infinitesimo, e vale $dF_A = \mu_D g\, dm$. Il braccio di questa forza, calcolato rispetto all'asse, è r, per cui il contributo al momento delle forze è $d\tau = rdF_A = \mu_D grdm = \mu_D \rho_m 2\pi r^2 ghdr$. Il momento complessivo delle forze si ottiene integrando questa espressione sull'anello, cioè usando $R/2$ e R come estremi di integrazione. Si ottiene $\tau = \mu_D \rho_m 2\pi gh(R^3-R^3/8)/3 = (7/12)\ \mu_D \rho_m \pi ghR^3$. Usando la relazione tra densità di massa (uniforme) e massa già espressa in precedenza, si può scrivere $\tau = (7/9)\mu_D mgR$. Come si vede, il momento delle forze è effettivamente costante, per cui il moto (angolare) è proprio uniformemente accelerato, come anticipato prima. Il passaggio ulteriore per il calcolo di α, e quindi di Δt , richiede di dividere il modulo del momento delle forze per il momento di inerzia. Tenendo conto del fatto che il moto è relativo, in analogia con l'equazione del moto relativo traslazionale, possiamo ipotizzare che, al posto del momento di inerzia dell'anello, che abbiamo calcolato prima, compaia in realtà una sorta di "momento di inerzia ridotto" il cui reciproco è la somma dei reciproci dei momenti di inerzia dell'anello e della piattaforma. Da qui esce la soluzione, che, come vedete, è effettivamente non del tutto banale! Ovviamente di questo si tiene conto nella correzione!]

--- *PARTE 3b (TERMODINAMICA)*

4. Due campioni di gas che si comportano come gas perfetti sono contenuti in due recipienti identici, di capacità termica **trascurabile**, realizzati con due cilindri di area di base $A = 30$ cm^2 muniti di un tappo di **massa trascurabile** scorrevole **senza attrito** e posto in contatto con la pressione atmosferica $P_{ATM} = 1.00\text{x}10^5$ Pa. In particolare, il recipiente A contiene $n = 1.00\text{x}10^{-2}$ moli di gas **monoatomico**, mentre il recipiente B contiene la stessa quantità $n = 1.00\text{x}10^{-2}$ moli di gas **biatomico**. Inizialmente i due gas si trovano rispettivamente alle temperature $T_A = 300$ K e $T_B = (4/7)T_A = 171$ K. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

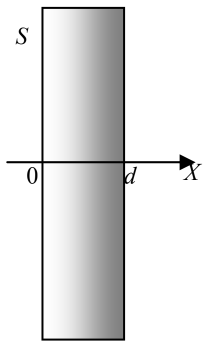
a) Quanto valgono le altezze h_A e h_B delle regioni occupate dai gas A e B nei rispettivi recipienti?
h_A = ……………………………… = …….. m $nRT_A/(AP_{ATM}) = 8.31\text{x}10^{-2}$ m
h_B = ……………………………… = …….. m $h_AT_B/T_A = 4.75\text{x}10^{-2}$ m [dalla legge dei gas perfetti, notando che la pressione dei gas è quella atmosferica, essendo i sistemi in equilibrio e i tappi in contatto con la pressione atmosferica]

b) Immaginate ora che i due recipienti vengano messi in contatto termico fra loro, ad esempio chiudendoli in una camera con capacità termica trascurabile munita di pareti impermeabili al calore (si intende che non c'è alcuno scambio termico oltre a quello tra i due gas). I due gas termalizzano fino a raggiungere una nuova temperatura di equilibrio, T'. Quanto vale T'? [Supponete che durante l'intero processo di termalizzazione la pressione atmosferica P_{ATM} continui ad agire inalterata sui tappi dei due recipienti e che il processo avvenga lentamente, cioè passando per stati di equilibrio]
T' = …………………………………… = ……… K $(nc_{PA}T_A+nc_{PB}T_B)/(nc_{PA}+nc_{PB})=(5T_A+7T_B)/12 = (3/4)T_A = 225$ K [per il bilancio dei calori, dette Q_A e Q_B le quantità di calore scambiate dai due gas, deve essere $0 = Q_A+Q_B$. D'altra parte i gas subiscono trasformazioni isobare, dato che la pressione atmosferica continua ad agire sui tappi, per cui $Q_{A,B} = nc_{PA,B}\Delta T_{A,B}$. Ricordando che il calore specifico molare a pressione costante di un gas perfetto vale $c_P = (5/2)R$ o $(7/2)R$ a seconda che il gas sia mono- o bi-atomico, e svolgendo i calcoli, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale la variazione **totale** di entropia ΔS del **sistema dei due gas** nell'intero processo? [Si intende $\Delta S = \Delta S_A+\Delta S_B$]
ΔS = …………………………………… ~ .... J/K $nc_{PA}ln(T'/T_A)+nc_{PB}ln(T'/T_B)=(nR/2)(5ln(T'/T_A)+7ln(T'/T_B) \sim 1.93\text{x}10^{-2}$ J/K [le trasformazioni sono isobare, dunque $\Delta S_{A,B} = nc_{PA,B}ln(T'/T_{A,B})$. Da qui, esplicitando le espressioni dei calori specifici molari a pressione costante dei due gas, la soluzione. Si noti che la variazione di entropia netta è diversa da zero e positiva, anche se il sistema nel suo complesso ha caratteristiche adiabatiche (è isolato dal mondo esterno dato che le pareti della scatola sono impermeabili al calore). Questo indica che la trasformazione considerata è nel suo complesso irreversibile]

-- PARTE 4 (ELETTROMAGNETISMO)

5. Una lastra molto estesa e sottile di materiale dielettrico è stata costruita in modo da portare al suo interno una distribuzione di carica volumica **disomogenea**. Come indicato in figura, in cui la lastra è vista "di profilo", le superfici (facce) "di base" della lastra, che hanno area $S = 0.10$ m^2, sono ortogonali rispetto all'asse X di figura. Lo spessore della lastra è $d = 1.0$ mm (si ha evidentemente $d << S^{1/2}$, in modo da poter trascurare gli "effetti ai bordi" e considerare puramente **piana** la simmetria del problema). La densità di carica volumica dipende dalla sola coordinata x e si sa che aumenta **linearmente** da 0 fino al valore $\rho_0 = 8.8$ C/m^3 quando si passa dalla faccia "di sinistra" in figura, collocata ad $x = 0$, alla faccia "di destra", che si trova ad $x = d$. Si sa anche che $E(x)=0$ per $x \leq 0$. [Considerate $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m la costante dielettrica sia all'interno che al di fuori della lastra]



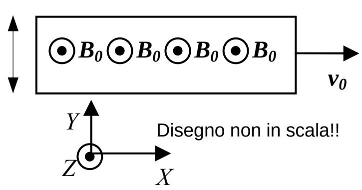
Disegno non in scala!

a) Come si scrive l'espressione del campo elettrico $\boldsymbol{E}(x)$ nelle regioni $0 <x<d$ e $x>d$ (cioè dentro la lastra e "alla destra" della lastra stessa)? [**Non** usate alcun valore numerico per questa risposta, che va espressa in funzione dei parametri letterali noti del problema; indicate in brutta direzione e verso del campo, nell'ipotesi che si possano trascurare gli effetti ai bordi]
$E(x)$ = …………………………………… per $0 <x<d$ $Q_{int}(x)/(S\varepsilon_0)-E(x\leq 0) = \rho_0x^2/(2\varepsilon_0 d)$ [se si trascurano gli effetti ai bordi, come lecito viste le dimensioni della lastra, il sistema ha simmetria piana. Quindi il campo elettrico è diretto lungo X (nel verso positivo, essendo positiva la carica) e dipende solo dalla coordinata x . Il suo valore si ottiene da Gauss, usando una scatola a forma di parallelepipedo di cui le due facce di base, con superficie pari ad S, sono poste una ad $x \leq 0$ e l'altra ad una qualche coordinata x generica all'interno della lastra. Per la soluzione occorre poi esprimere la densità $\rho(x)$. Sulla base della descrizione riportata nel testo, deve essere $\rho(x) = \rho_0\, x/d$, e tenere in debito conto la condizione $E(x\leq 0)=0$, per cui il flusso del campo elettrico è nullo sulla superficie di base "di sinistra" della scatola. Il flusso è anche nullo attraverso tutte le superfici laterali, per cui si ha: $SE(x)=Q_{int}(x)/\varepsilon_0$. La carica interna alla scatola si trova per integrazione della $\rho(x)$ nel volume della scatola stessa. Usando come elemento di volume $dV=Sdx$, scelta opportuna a causa della simmetria piana del problema, si ha: $Q_{int}(x) = \int_{VOL}\rho(x)dV=(\rho_0S/d)\int_0^x x^2dx=(\rho_0S/(2d))x^2$, da cui la soluzione]
$E(x)$ = …………………………………… per $x>d$ $Q_{int}(x)/(S\varepsilon_0)-E(x\leq 0) = \rho_0d/(2\varepsilon_0)$ [come prima, ma stavolta nel determinare la carica interna alla scatola occorre considerare tutta la carica portata dalla lastra. In altre parole è $Q_{int}(x) = \int_{VOL}\rho(x)dV=(\rho_0S/d)\int_0^d x^2dx=(\rho_0S/(2d))d^2=\rho_0Sd/2$ da cui la soluzione. Si noti che in queste condizioni il campo non dipende più dalla coordinata x , come atteso per una distribuzione piana di carica]

b) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V = V(x=d)-V(x=0)$ tra la faccia "di destra" e quella "di sinistra" in figura?
ΔV = ………………………………… = ……. V $-\int_d^0 E(x)dx = \rho_0d^3/(6d\varepsilon_0)= \rho_0d^2/(6\varepsilon_0) = 1.7\text{x}10^5$ V
[dalla definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x\leq 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

c) Supponete ora che uno ione positivo di carica unitaria, $q = 1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $m = 1.0\text{x}10^{-26}$ kg, incida sul lato di sinistra della lastra con una velocità diretta orizzontalmente (nel verso positivo dell'asse X) di modulo v_0. Immaginando che lo ione possa penetrare all'interno della lastra senza subire altra forza se non quella elettrica, dunque trascurando gli effetti della forza peso e di qualsiasi forma di "attrito", qual è il valore minimo v_{MIN} della velocità di "impatto" v_0 che garantisce che lo ione riemerga dal lato destro della lastra? [Ovviamente, si intende che la lastra è fissa nello spazio!]
v_{MIN} = …………………………………… ~ ……. m/s $(2q\Delta V/m)^{1/2} \sim 2.3\text{x}10^6$ m/s [non essendoci forze non conservative, si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ele}$. Nelle condizioni minimali richieste dal problema, lo ione riemerge dalla lastra con velocità nulla, dunque $\Delta E_K=-(m/2)v_{MIN}^2$ La variazione di energia potenziale elettrostatica è, per definizione di differenza di potenziale, $\Delta U_{ele} = q\Delta V$. Da qui la soluzione. Notate che l'elevato valore della velocità è necessario per "forzare" lo ione, positivo, ad attraversare la lastra, carica positivamente] lla definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x\leq 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

6. Una lastra di materiale **ottimo conduttore** viene mantenuta da un qualche operatore esterno (una manina…) in movimento con velocità costante $\boldsymbol{v_0}$ (nota) nel verso positivo dell'asse X di un sistema di riferimento cartesiano. La lastra ha spessore d (noto) diretto lungo l'asse Y dello stesso riferimento. Le superfici "di base" della lastra, parallele al piano XY, sono molto grandi, così da



Disegno non in scala!!

rispettare la simmetria piana del problema. Un campo magnetico esterno uniforme e costante $\boldsymbol{B_0}$ (noto), diretto lungo il verso positivo dell'asse Z, insiste su tutta la regione di interesse attraversando la lastra (vedi figura). [**Non** usate valori numerici per questo esercizio!]

a) Supponendo di poter modellare il materiale ottimo conduttore come un "gas" di particelle negative e positive, di carica unitaria e (nota), libere di muoversi e presenti in ugual numero, in modo da garantire la neutralità della lastra stessa, come si esprime il modulo della forza F risentita da queste cariche, e che direzione e verso ha questa forza per le cariche negative e positive? [Trascurate l'effetto della forza peso!]

F = ………………………………….... ev_0B_0 [sulle cariche, essendo esse in moto con velocità $\boldsymbol{v_0}$, agisce la forza di Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}x\boldsymbol{B}$. Notando che velocità e campo magnetico sono ortogonali tra loro, si ottiene la risposta. Osservate che, se si trascurano gli effetti ai bordi, l'espressione della forza è costante all'interno dell'intera lastra]

Direzione e verso (in funzione del segno della carica): …………………………………… Tenendo conto della direzione di velocità e campo magnetico, la forza, che esce da un prodotto vettoriale, risulta diretta lungo l'asse Y di figura. Il verso dipende dal segno della carica: è positivo per le cariche negative e negativo per quelle positive. Dunque le cariche vengono "separate" spazialmente, disponendosi sulle superfici "di base" della lastra

b) Come si esprime, in **modulo**, la differenza di potenziale elettrico ΔV che si instaura tra le superfici "di base" della lastra?

ΔV = …………………………………… $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0 A/(d-s))\, V_0^2/2 = 3.5\text{x}10^{-7}$ J [la forza determinata alla risposta al quesito precedente crea una differenza di energia potenziale tra le superfici di base della lastra che vale, in modulo, $\Delta U = Fd$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che la forza F è uniforme all'interno della lastra. La differenza di potenziale elettrico si ottiene dalla $\Delta U = \Delta V/e$, da cui la risposta. Notate che questa risposta sembra sorprendente, in quanto all'equilibrio ci si aspetterebbe che un conduttore sia equipotenziale. In effetti la presenza del campo magnetico crea una sorta di campo elettrico, detto campo "impresso", nel conduttore, che porta al fenomeno considerato]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 1/7/2010 Firma: