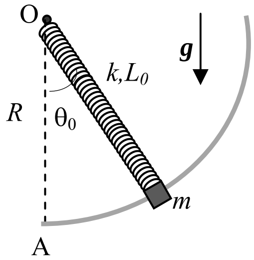
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 16/9/2010

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un anellino (da considerare puntiforme) di massa $m = 0.10$ kg è vincolato a muoversi lungo una guida che ha la forma di un arco di circonferenza di raggio $R = 20$ cm, rigida e fissa su un piano verticale. Come rappresentato in figura, una molla, di massa trascurabile, costante elastica $k = 4.0$ N/m e lunghezza di risposo $L_0 = 2R = 40$ cm, è collegata a un suo estremo all'anellino e all'altro estremo a un chiodo conficcato in una parete verticale nel punto O, che rappresenta il centro di curvatura della guida. Nella situazione da considerare per rispondere alle **sole prime due** domande [quesiti a) e b)], si sa che la guida è **scabra** e presenta **attrito statico** con coefficiente μ (incognito). In queste condizioni l'anellino si trova in **equilibrio** nella posizione indicata in figura (l'angolo θ_0 vale $\pi/6$). [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6)=1/2$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



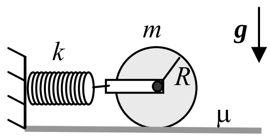
a) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che la guida esercita sull'anellino?
N = …………………………….. ~ .... N $mgcos\theta_0-k(R-L_0)=mgcos\theta_0+kR \sim 1.6$ N   [sull'anellino agiscono la forza peso $\boldsymbol{mg}$, in direzione verticale, la reazione vincolare della guida e la forza della molla, entrambe in direzione radiale, l'attrito, in direzione tangenziale. Per l'equilibrio in direzione radiale occorre che la reazione vincolare bilanci la forza della molla (diretta "verso l'esterno", essendo la molla compressa rispetto alla lunghezza di riposo) e la componente della forza peso in direzione radiale. Notate che entrambe le componenti hanno lo stesso verso e che queste sono le uniche componenti di forza nella direzione radiale (l'attrito, opponendosi al moto, ha direzione tangenziale)]

b) Quanto deve valere, **al minimo**, il coefficiente di attrito μ affinché ci sia equilibrio? [Per chiarire: "al minimo" vuol dire che per qualsiasi valore uguale o superiore a quello che determinerete si hanno condizioni di equilibrio]
μ = …………………………….. ~........... $mgsin\theta_0/N \sim 0.30$ [occorre studiare l'equilibrio in direzione tangenziale, nella quale agiscono la componente tangenziale della forza peso, che in modulo è $mgsin\theta$, e la forza di attrito statico F_A. Le due componenti hanno ovviamente verso opposto (l'attrito si oppone allo spostamento incipiente), per cui è sufficiente uguagliare i moduli. Ricordando che, per definizione di coefficiente di attrito, si ha $F_A \le \mu N$ e usando l'espressione della reazione vincolare trovata al punto precedente, si ottiene la soluzione]

c) Per questa domanda supponete che **non ci sia alcuna forma di attrito** (la guida è stata perfettamente levigata per magia!) e che l'anellino venga fatto partire, con velocità iniziale nulla, dalla posizione $\theta_0 = \pi/6$. Quanto vale, in modulo, la velocità v con cui l'anellino giunge "al termine" della guida (il punto marcato con A in figura)?
v = …………………………….. ~........... m/s $(2gR(1-cos\theta_0))^{1/2} \sim 0.73$ m/s   [il problema si risolve con la conservazione dell'energia meccanica, per cui $0=(m/2)v^2 + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è solo gravitazionale: infatti, per la geometria del sistema, si ha che la molla non compie lavoro (la sua lunghezza rimane sempre pari a R!), per cui $\Delta U = mg(\Delta h)$. La variazione di quota può comodamente essere espressa in funzione della posizione angolare di partenza, dato che si ha $\Delta h = -R(1-\cos\theta_0)$, dove abbiamo tenuto in debito conto i segni!]

d) Come si modifica la risposta al quesito precedente [quesito c)] nel caso in cui sia presente **attrito dinamico** con un certo coefficiente μ_D (noto)? Discutete per benino in brutta, svolgendo tutte le considerazioni del caso e tenendo presente i vari possibili effetti. [Supponete trascurabile l'attrito statico, anche se questa affermazione è ben poco realistica, e immaginate che di fatto l'anellino scenda lungo l'arco di circonferenza]
Discussione: …………………………….. La presenza dell'attrito dinamico comporta una diminuzione della velocità con cui l'anellino giunge al punto A. Infatti il bilancio energetico recita: $L_A = \Delta E_K+\Delta U_G$, con $L_A<0$ lavoro della forza di attrito. Tenendo presente la definizione di forza di attrito dinamico e la circostanza che essa è sempre opposta allo spostamento, e che lo spostamento (tangenziale!) lungo l'arco della circonferenza si può scrivere $ds=-Rd\theta$ (il segno tiene conto del fatto che il valore dell'angolo diminuisce nel processo considerato) si ha $L_A = \int_{ini}^{A} \boldsymbol{F_A}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\theta 0}^{0}\mu_D NRd\theta=\mu_D R\int_{\theta 0}^{0}Nd\theta = \mu_D R\int_{\theta 0}^{0}(mgcos\theta+kR)\, d\theta =-\mu_D R(mgsin\theta_0+kR\theta_0)$. Questa espressione consente di valutare il lavoro della forza di attrito che, una volta inserito nel bilancio energetico, consente di determinare il nuovo valore della velocità di arrivo, che stavolta sarà minore di prima. Il testo, però, richiede di valutare con attenzione tutto quello che può succedere. In effetti una semplice considerazione permette di affermare che l'espressione della reazione vincolare determinata al quesito a), e che abbiamo usato nell'integrale, potrebbe essere non corretta. Infatti essa era stata determinata in condizioni di equilibrio, mentre se l'anellino si muove (lungo l'arco di circonferenza) occorre anche considerare l'accelerazione centripeta a cui esso è sottoposto. Dunque la risposta appena data è valida solo nel caso in cui l'accelerazione centripeta sia trascurabile, cioè per velocità "basse".

2. Un cilindro pieno e omogeneo di raggio $R = 50$ cm e massa $m = 5.0$ kg è libero di ruotare **senza attrito** attorno al suo asse, che è collegato come in figura (attraverso un giogo di massa trascurabile) ad una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 30$ N/m, il cui altro estremo è vincolato ad una parete rigida. Il cilindro è poggiato su un piano orizzontale **scabro** (cioè non liscio!); inizialmente la molla si trova compressa per un certo tratto Δ_0 (rispetto alla lunghezza di riposo) per l'azione di una forza esterna (una manina), che all'istante t_0=0 viene rimossa improvvisamente senza fornire velocità iniziale al cilindro. [A scanso di equivoci, si ricorda che la compressione Δ della molla è intesa come una grandezza positiva, essendo pari alla differenza tra la sua lunghezza di riposo L_0 e la lunghezza "attuale" L, cioè $\Delta = L_0-L$; usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Discutete in quali condizioni il sistema conserva la propria energia meccanica, stabilendo, in particolare, quale relazione deve esistere tra entità della compressione iniziale Δ_0 e coefficiente di attrito statico μ del piano affinché ciò si verifichi.
Discussione: ………………………… Il piano è scabro, dunque esiste una forza di attrito. Affinché l'energia meccanica si conservi occorre che il **lavoro** delle forze dissipative (l'attrito) sia nullo. Nel sistema considerato, questo si verifica quando si instaurano condizioni di rotolamento puro, le quali coinvolgono solo forze di attrito che, per il loro carattere statico (non c'è strisciamento!), non coinvolgono dissipazione di energia. Per determinare le condizioni che conducono al rotolamento puro occorre esaminare nel dettaglio la dinamica del cilindro. Le equazioni del moto rotazionale e traslazionale

rilevanti per il problema si scrivono rispettivamente: $a_{CM} = F_{ELA}/m - F_A/m$ e $\alpha = F_A R/I = 2F_A/(mR)$, dove abbiamo tenuto conto che le uniche forze che agiscono in direzione orizzontale, quella del moto, sono la forza elastica F_{ELA} e la forza di attrito statico F_A. Questa forza ha verso opposto rispetto allo spostamento "incipiente", e dunque rispetto alla forza elastica. Supponendo $F_{ELA}>0$, che corrisponde alla situazione iniziale considerata nel testo (la molla è inizialmente compressa e dunque la forza elastica è diretta verso la destra della figura, che per comodità assumiamo come verso positivo dell'asse orizzontale), e indicando con F_A il **modulo** della forza di attrito, occorre mettere un segno negativo davanti all'espressione di F_a Tenendo conto della relazione tra le accelerazioni, $\alpha = a_{CM}/R$, che nasce dalla condizione di rotolamento puro, si ottiene un bel sistema di tre equazioni con tre incognite. Risolvendo per F_A si trova: $F_A = F_{ELA}/3$. Ora la forza elastica nel problema considerato assume il suo massimo valore proprio all'inizio, quando la molla è (massimamente) compressa, $F_{ELA,0}=k\Delta_0$ (si noti che la compressione è espressa con una grandezza positiva). La forza di attrito statico, invece, è $F_A \leq \mu N = \mu mg$. La relazione richiesta nel quesito si esprime quindi come: $\mu \geq k\Delta_0/(3mg)$:

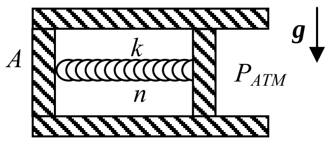
b) Supponete ora che il coefficiente di attrito statico sia $\mu = 0.20$ e che la compressione iniziale sia $\Delta_0 = 40$ cm. Quanto vale la velocità v_{CM} del centro di massa del cilindro nell'istante in cui la molla torna ad assumere (per la prima volta) la propria lunghezza di riposo? [Occhio: valutate per bene che tipo di moto compie il cilindro, tenendo anche presente la risposta che avete fornito al quesito precedente. Notate inoltre che, quando la molla assume la propria lunghezza di riposo, il sistema è in equilibrio. Nella soluzione non dovreste aver bisogno di considerare l'eventuale attrito dinamico tra piano e cilindro, che potete considerare trascurabile]

v_{CM} = ... = ... m/s $\Delta_0 (2k/(3m))^{1/2} = 0.80$ m/s [si nota subito che la condizione trovata alla risposta precedente è soddisfatta. Dunque il moto è di rotolamento puro e si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA}$. Essendo il cilindro inizialmente fermo e tenendo conto dei contributi rotazionale e traslazionale, la variazione di energia cinetica del cilindro si scrive: $\Delta E_K = (I/2)\omega^2+(m/2)v_{CM}^2 = (m/2)((R^2 v_{CM}^2/(2R^2))+v_{CM}^2)=3mv_{CM}^2/4$, dove abbiamo usato il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo, $I = mR^2/2$, e il legame tra le velocità dato dalla condizione di puro rotolamento, $\omega = v/R$, con ω velocità angolare del cilindro. Inoltre la variazione di energia elastica si scrive semplicemente $\Delta U_{ELA}=-(k/2)\Delta_0^2$, dato che l'energia elastica "finale" è nulla essendo nulla la compressione o elongazione della molla. Da qui la soluzione]

c) In quale istante t si verifica la condizione di cui al punto precedente, cioè la molla assume per la prima volta la propria lunghezza di riposo?

t = ... = ... s $(\pi/2)(3m/(2k))^{1/2} = 0.79$ s [l'equazione del moto di traslazione, tenendo conto che, in condizioni di rotolamento puro, si ha $F_A=F_{ELA}/3$ (vedi sopra), può essere scritta come $a_{CM}=(F_{ELA}-F_A)/m = 2F_{ELA}/m$. Detta x la coordinata del centro di massa del cilindro misurata a partire dalla posizione di riposo, si ha $F_{ELA} = -kx$. Il moto è dunque armonico, con pulsazione $\Omega = (2k/(3m))^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\Omega$. La condizione richiesta si verifica quando è trascorso un tempo $t = T/4$, come si può facilmente verificare, da cui la risposta]

3. Una quantità $n = 1.00$ moli di gas perfetto monoatomico è contenuta in un recipiente cilindrico con area di base $A = 10.0$ cm^2 che ha pareti **impermeabili al calore** ed è dotato di un tappo scorrevole con attrito trascurabile nella direzione dell'asse del cilindro. Una molla, di massa trascurabile, lunghezza di riposo **nulla** e costante elastica $k = 40.0$ N/m, è collegata tra la parete di base del recipiente e il tappo, secondo quanto mostrato in figura. Notate che il tappo si muove in direzione orizzontale e che all'esterno del recipiente insiste la pressione atmosferica $P_{ATM} = 1.00\times10^5$ Pa. Inizialmente il gas occupa un volume $V_0 = 10.0$ litri; quindi, attraverso un riscaldatore interno al recipiente, ad esso viene somministrata un quantità di calore $Q = 1.00\times10^4$ J. La somministrazione avviene lentamente. Ad un dato istante, si osserva che il volume è diventato $V'=2V_0$. [La costante dei gas perfetti vale $R = 8.31$ J/(K mole); fate attenzione che la condizione considerata potrebbe non essere di equilibrio]



a) Quanto vale il lavoro L compiuto **dal gas** nel processo?

L = ... = ... J $P_{ATM}V_0+3(k/2)V_0^2/A^2 = 7.00\times10^3$ J [il gas compie un lavoro $L = -L_{EXT}$, con L_{EXT} lavoro delle forze esterne che agiscono sul gas. Queste forze sono la forza di pressione atmosferica, $F_{ATM}=P_{ATM}A$, e la forza elastica, $|F_{ELA}| = kx$, con x coordinata del tappo (misurata a partire dalla sua base). Nella trasformazione il tappo si sposta dalla posizione $x_0 = V_0/A$ alla posizione $x'=2V_0/A$, ovvero compie uno spostamento $\Delta x=V_0/A$. I lavori corrispondenti sono: $L_{ATM}=-P_{ATM}AV_0/A=-P_{ATM}V_0$ (il segno negativo è dovuto al fatto che la pressione atmosferica produce una forza opposta allo spostamento del tappo) e $L_{ELA}=-(k/2)(x'^2-x_0^2)=-(k/2)3V_0^2/A^2$ (anche qui il segno negativo è dovuto al verso della forza, che è opposto allo spostamento). Da qui la risposta]

b) Quanto valgono la temperatura del gas all'inizio, T_0, e quella T', misurata quando il volume è V'? [Dato che la condizione potrebbe non essere di equilibrio, **non** potete applicare l'equazione di stato dei gas perfetti per le condizioni di equilibrio]

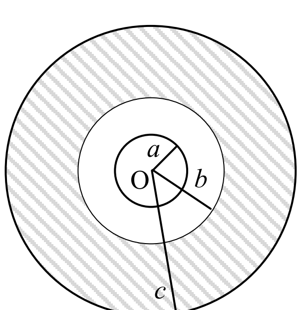
T_0 = ... = ... K. $(P_{ATM}V_0+kV_0^2/A^2)/(nR) = 602$ K [si ha $T_0=P_0V_0/(nR)=(P_{ATM}+k(V_0/A)A)V_0/(nR) = (1/(nR))(P_{ATM}V_0+kV_0^2/A^2)$, dove abbiamo notato che inizialmente la pressione del gas è pari alla pressione atmosferica sommata alla pressione dovuta alla forza elastica. Da qui la soluzione]

T' = ... = ... K. $T_0+(Q-L)/(3nR/2)=(1/(nR))(P_{ATM}V_0+kV_0^2/A^2+2Q/3-2P_{ATM}V_0/3-kV_0^2/A^2)=(2Q+P_{ATM}V_0)/(3nR) = 842$ K [per il primo principio deve essere $Q = L+\Delta U$, con $\Delta U=nc_V\Delta T=n(3/2)R\Delta T$. Quindi $T'=T_0+2(Q-L)/(3nR)$. Usando i risultati ai quesiti precedenti si trova la soluzione]

c) Quanto vale la variazione di entropia ΔS del gas nel processo?

ΔS = ... = ... J/K $nR(ln(V'/V_0)+(3/2)ln(T'/T_0)) = 9.95$ J/K [per definizione, la variazione di entropia di un gas perfetto si calcola utilizzando una o più trasformazioni **reversibili** che portano il gas dallo stato iniziale allo stato finale (l'entropia è una **funzione di stato!**). Tali stati sono completamente determinati nell'esperimento, essendo V_0, V' noti, mentre per le altre variabili di stato si ha (vedi anche sopra): $P_0=P_{ATM}+kV_0/A^2$, $P'=P_0+kV_0/A^2$, $T_0=P_0V_0/(nR)$, T' calcolato sopra. Nella trasformazione considerata nessuna delle variabili di stato rimane costante, né la trasformazione è adiabatica, per cui occorre una successione di almeno due trasformazioni "semplici" per connettere stato iniziale e finale. Ad esempio si può seguire un'isoterma che porta il gas al volume V' seguita da una isocora che porta il gas a pressione e temperatura finali. Poiché l'entropia è additiva, la variazione di entropia complessiva si ottiene sommando la variazione di entropia per l'isoterma, $nRln(V'/V_0)$, alla variazione di entropia dell'isocora, $nc_V ln(T'/T_0)=(3/2)nRln(T'/T_0)$]

4. Un dispositivo elettrico è costituito da una superficie sferica (un guscio molto sottile) di raggio a = 5.0 mm concentrica a un guscio **spesso**, di raggio interno $b = 2a$ =10 mm e raggio esterno $c = 2b$= 20 mm. Superficie sferica e guscio sono entrambi fatti di materiale **ottimo conduttore**; lo spazio in $r<a$, $a<r<b$, $r>c$ è vuoto. La superficie sferica di raggio $r=a$ possiede una carica $q = 5.0\times10^{-11}$ C distribuita uniformemente, mentre il guscio sferico è inizialmente scarico. Ad un certo istante il guscio sferico viene collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale V_0 = 50



V, il cui polo negativo è collegato a **terra**, come rappresentato in figura. [Usate $\varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]

a) Quanto vale, in condizioni stazionarie (all'equilibrio), il **potenziale elettrico** ϕ_0 che si misura al centro del sistema, ovvero nel punto $r=0$? [Si intende che il potenziale elettrico equivale alla differenza di potenziale tra la posizione indicata e un punto a potenziale nullo]

ϕ_0 =: …………………… = ……….. V $V_0+q/(8\pi\varepsilon_0 a) = 95$ V [si ha: $\phi_0 = \Delta V$, dove ΔV indica la differenza di potenziale tra il punto $r=0$ e un punto posto praticamente all'infinito, dove il potenziale è nullo. Per definizione è quindi $\Delta V = -\int_{r=\infty}^{r=0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\infty} E dr$, dove si è usata la circostanza che il campo elettrico, dove presente, è sempre radiale per la simmetria sferica del problema. Nel sistema lo spazio è suddiviso in diversi sottospazi: all'equilibrio, il campo per $r<a$ è nullo, così come è nullo il campo per $b<r<c$. Inoltre si sa, per la presenza del generatore, che la differenza di potenziale tra $r=c$ (ovvero $r=b$, il guscio è equipotenziale!) e l'infinito vale V_0. Pertanto l'espressione si può semplificare in questo modo: $\phi_0 = \int_a^b E dr + V_0$, dove il campo elettrico è quello generato dalla carica distribuita (si suppone uniformemente, all'equilibrio) sul la superficie sferica di raggio $r=a$, cioè $E(r) = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Da qui, svolgendo l'integrale, si ottiene la soluzione]

b) Quanto valgono le cariche elettriche Q_b e Q_c che, in condizioni stazionarie (di equilibrio), vengono a trovarsi sulle superfici del guscio di raggio rispettivamente $r=b$ e $r=c$?

Q_b = …………………………….. = ……… C $-q = -5.0 \times 10^{-11}$ C [all'equilibrio all'interno del conduttore che costituisce il guscio sferico spesso si deve avere campo elettrico nullo. Il teorema di Gauss, applicato a una scatola di forma sferica con raggio interno al guscio, mostra che affinché questo si verifichi, la carica interna alla scatola, $q+Q$, deve essere nulla, da cui la soluzione]

Q_c = …………………………….. = ……… C $4\pi\varepsilon_0 c V_0 = 1.1 \times 10^{-10}$ C [il guscio sferico si trova al potenziale V_0 rispetto a terra, ovvero, convenzionalmente, rispetto a un punto che si trova a grande distanza (matematicamente infinita) dal centro. La differenza di potenziale ΔV tra i punti a $r=c$ e $r=\infty$, che si calcola come $\int_c^{\infty} E dr$ (vedi sopra), deve allora essere pari a V_0. Il campo elettrico per $r>c$, che è radiale per la simmetria del sistema, si trova con il teorema di Gauss: $E(r) = Q_{int}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove Q_{int} è la carica interna a una scatola sferica di raggio $r>c$, cioè $Q_{int}=q+Q_b+Q_c=Q_c$, stante la condizione trovata sopra. Risolvendo l'intergale si trova la soluzione]

c) Quanto vale il lavoro L_g che il generatore deve compiere per portare il sistema in condizioni stazionarie? [Si intende che tale lavoro è calcolato dall'istante in cui il generatore viene collegato a un istante futuro estremamente lontano nel tempo, e che si trascurano eventuali effetti di irraggiamento]

L_g = ……………………………. ~ ………… J $(-q+Q_c)V_0 = 1.4 \times 10^{-9}$ J [il guscio sferico si comporta, in pratica, come un condensatore (a singola armatura, l'altra armatura è in pratica costituita dall'infinito…) per cui il lavoro del generatore si può calcolare come $CV_0^2/2 = (Q_{tot}/V_0)V_0^2/2 = Q_{tot}V_0/2$, dove la carica complessivamente "fornita" dal generatore al guscio vale $Q_{tot} = Q_b+Q_c$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 16/9/2010 Firma: