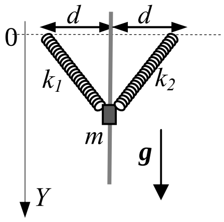
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 10/2/2011

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg è vincolato a scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y, orientato verso il basso come in figura). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno entrambe lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica, L_0=0!) e costanti elastiche k_1 = 2.0 N/m e k_2 = 8.0 N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a un solaio orizzontale, rigido e indeformabile, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza d = 1.0 m da esso: il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento (vedi figura). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, all'equilibrio, la lunghezza delle molle L_{EQ}?

L_{EQ} = …………………………………… ~ ……… m $((mg/(k_1+k_2))^2+d^2)^{1/2}$ ~ 2.2 m [il manicotto è vincolato a muoversi (eventualmente!) lungo l'asse Y. Pertanto si deve cercare la condizione di equilibrio lungo questa direzione, cioè imporre che le **componenti** delle forze lungo tale direzione si bilancino. Le forze in questa direzione sono il peso, che punta verso il basso, e le **componenti verticali** delle forze elastiche che puntano verso l'alto (altrimenti l'equilibrio non ci sarebbe!) e che si ottengono moltiplicando il modulo delle forze elastiche per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse delle molle e l'asse Y. Notiamo che tale angolo è lo stesso per le due molle e che il suo valore, per la trigonometria, è dato da y/L , dove y è la posizione (generica) del manicotto e L è la lunghezza delle molle che, per Pitagora, vale $L = (y^2+d^2)$. D'altra parte il modulo della forza elastica si esprime come $F_i = k_i(L-L_0)$, con $i=1,2$ e L_0=0. Allora all'equilibrio deve verificarsi che $mg = (k_1+k_2)L_{EQ}y_{EQ}/L_{EQ} = (k_1+k_2)y_{EQ}$, dove $y_{EQ} = (L_{EQ}^2-d^2)^{1/2}$ da cui, rimaneggiando l'algebra in modo opportuno, la soluzione]

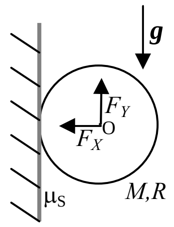
b) Supponete ora che il manicotto si trovi inizialmente fermo nella posizione y_0 = 0 e che da questa posizione venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale il modulo della velocità v' con cui esso passa per la sua posizione di equilibrio? [Per questa domanda considerate trascurabile ogni forma di attrito]

v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(mg^2/(k_1+k_2))^{1/2}$ ~ 4.4 m/s [non essendoci forze dissipative, conviene usare la conservazione del'energia meccanica: 0 = $\Delta E_K+\Delta U$, dove $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ (il manicotto parte da fermo). La variazione di energia potenziale è dovuta sia alla variazione di quota del manicotto, $\Delta U_G = -mgy_{EQ}$, dove $-y_{EQ}$ è la vairazione di quota del manicotto (rispetto al riferimento di figura), sia alla variazione di energia elastica, $\Delta U_{ELA}=((k_1+k_2)/2)(L_{EQ}^2-d^2)$. In quest'ultima relazione si è usato il fatto che la variazione di energia elastica dipende dalla variazione della lunghezza delle molle (al quadrato), e che tale variazione è la stessa per tutte e due le molle. Infatti quando il manicotto passa per la posizione di equilibrio le due molle hanno entrambe lunghezza pari a L_{EQ} mentre inizialmente esse sono entrambe lunghe d (ovviamente lunghezza ed elongazione coincidono, essendo nulla la loro lunghezza di riposo!). Rimaneggiando l'algebra, si ha $v'^2= -((k_1+k_2)/m)(L_{EQ}^2-d^2)+2gy_{EQ}$. Usando l'espressione di L_{EQ} trovata in precedenza si ottiene: $v'^2=-((k_1+k_2)/m)(((mg/(k_1+k_2))^2 +d^2-d^2)+2gy_{EQ} = -mg^2/(k_1+k_2)+2gy_{EQ}$, da cui, esplicitando $y_{EQ} = (L_{EQ}^2-d^2)^{1/2} = mg/(k_1+k_2)$, si ottiene la soluzione]

c) **Per questa domanda** immaginate che il tondino sia scabro e che il manicotto sia sottoposto ad attrito dinamico con coefficiente μ_D = 0.50. Se eseguiste la stessa operazione di cui al quesito precedente, cioè lasciate andare il manicotto da fermo a partire dalla posizione y_0 = 0, quanto varrebbe il modulo della velocità v'' con cui il manicotto passerebbe per la sua posizione di equilibrio?

v'' = …………………………………… ~ ……… m/s $((mg/(k_1+k_2))(g-\mu_D d(k_2-k_1))^{1/2}$ ~ 3.6 m/s [stavolta il bilancio energetico si scrive: $L_A = \Delta E_K+\Delta U$. I termini al secondo membro restano identici a prima, mentre per esprimere il lavoro della forza di attrito occorre individuare l'espressione di tale forza. Essa è ovviamente dovuta alla reazione vincolare N esercitata dal tondino sul manicotto. Tale reazione impedisce il movimento in direzione orizzontale, e dunque bilancia le componenti orizzontali delle forze elastiche. Tali componenti si ottengono moltiplicando il modulo della forza elastica, che ha la stessa espressione di prima, per il seno dell'angolo compreso tra asse della molla e asse Y. Dalla trigonometria si vede che $sin\theta = d/L$ e, tenendo anche in debito conto i versi delle componenti orizzontali delle forze elastiche, che sono opposti fra loro, si ottiene $F_A = \mu_D N=\mu_D(k_2-k_1)L\ d/L= \mu_D(k_2-k_1)d$. Quindi la forza di attrito è costante e uniforme e poiché essa è sempre opposta allo spostamento y_{EQ}, si ha $L_A=-F_A y_{EQ} = -\mu_D(k_2-k_1)d\ y_{EQ}=-\mu_D(k_2-k_1)dmg/(k_1+k_2)$. A questo punto il problema si risolve come sopra e, eseguendo i vari passaggi, si ottiene $v''^2= -((k_1+k_2)/m)(L_{EQ}^2-d^2)+2gy_{EQ}-\mu_D(k_2-k_1)dmg/(k_1+k_2)=(mg/(k_1+k_2))(g-\mu_D d(k_2-k_1))$, da cui la soluzione]

2. Un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme che agisce sul suo asse. La forza ha componente verticale di modulo F_Y = 20 N diretta verso l'alto; la componente F_X è diretta orizzontalmente nel verso indicato in figura e il suo modulo può essere aggiustato (modificato a volontà). Tale componente di forza fa sì che il cilindro sia a contatto con una parete verticale **scabra**, che presenta un coefficiente di attrito statico μ_S = 0.50. Nell'esperimento si vuole che il cilindro risalga lungo la parete muovendosi di **rotolamento puro**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto deve valere, al **minimo**, il modulo della componente orizzontale della forza, $F_{X,MIN}$, affinché il moto possa essere di rotolamento puro?

$F_{X,MIN}$ = …………………………………… = ……… N $(F_Y-Mg)/(3\mu_S)$= 6.8 N [la condizione di rotolamento puro, che si vuole stabilire nell'esperimento, richiede che valga la seguente relazione di tipo geometrico fra accelerazione angolare α e accelerazione a_{CM} del centro di massa del cilindro: $\alpha = a_{CM}/R$. Prendendo un riferimento verticale orientato verso l'alto, quando il cilindro sale l'equazione del moto è $a_{CM} = F_Y/M - g - F_A/M$, con F_A modulo della forza di attrito. D'altra parte l'equazione del moto di rotazione, che è dovuto alla sola forza di attrito dato che solo questa ha un momento non nullo rispetto al polo scelto nel centro di massa (il centro geometrico del cilindro), si scrive α

$= \tau/I = F_A R/I$, dove $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro omogeneo e si è notato che il braccio dela forza di attrito vale R. Unendo a sistema le due equazioni del moto con la relazione geometrica tra accelerazioni e risolvendo per F_A, che è incognita, si ottiene $F_A = (F_Y\text{-}Mg)/3$. Poiché deve essere $F_A \leq \mu_S N = \mu_S F_X$ (il modulo della reazione vincolare ovviamente uguaglia il modulo della componente orizzontale della forza esterna dato che il vincolo serve a impedire movimento lungo l'asse X), si ottiene $F_X \geq F_A/\mu_S$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che il valore di F_X sia aggiustato al doppio del valore $F_{X,MIN}$ determinato al quesito precedente, cioè $F_X = 2F_{X,MIN}$. In queste condizioni si osserva che il cilindro risale lungo la parete muovendosi di rotolamento puro. Quanto vale il lavoro L fatto dalla forza $\boldsymbol{F}$ (costante e uniforme) quando il cilindro è risalito per un tratto h = 1.0 m?
L= …………………………………… = …….. J $F_Y h$ = 20 J [tenendo conto che la forza $\boldsymbol{F}$ è costante e uniforme e che lo spostamento avviene lungo la direzione Y (stessa direzione e verso di F_y) si ha $L = F_Y h$, da cui la soluzione]

c) Nelle condizioni di cui al quesito precedente e supponendo che inizialmente il cilindro sia fermo, quanto vale il modulo della sua velocità angolare ω quando esso è risalito per il tratto h = 1.0 m? [Supponete che tutti gli attriti al di fuori di quello tra parete e superficie del cilindro siano trascurabili]
ω = …………………………………… ~ …….. rad/s $(4h(F_Y\text{-}Mg)/(3MR^2))^{1/2}$ ~ 4.7 rad/s [conviene ragionare in termini di bilancio dell'energia meccanica. Notiamo che non sono presenti nel processo forze di tipo dissipativo che compiano lavoro (l'attrito statico responsabile per il rotolamento puro non fa lavoro!]. Deve essere allora $L = \Delta E_K + \Delta U_G$, con $\Delta U_G = Mgh$ (l'unica variazione di energia potenziale è dovuta all'aumento di quota del centro di massa del cilindro) e $\Delta E_K = (M/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2 = 3MR^2\omega^2/4$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la relazione geometrica $v_{CM} = R\omega$ che vale nel caso del rotolamento puro e l'espressione del momento di inerzia già introdotta sopra. Usando l'espressione di L trovata prima si ottiene la soluzione]

3. Un campione di n = 0.200 moli di un gas perfetto monoatomico compie la seguente successione di trasformazioni espansione isoterma **irreversibile** A→B, compressione isobara **reversibile** B→C, isocora **reversibile** C→A. Si sa che nel punto A il gas si trova a temperatura T_A = 300 K e volume V_A = 1.00 litri; inoltre si sa che $V_B = 2V_A$ e che nell'isoterma **irreversibile** A→B il gas assorbe una quantità di calore Q_{AB} = 300 J. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

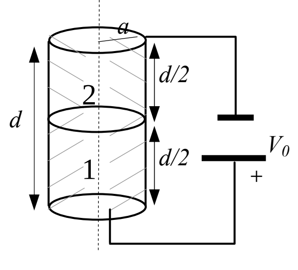
a) Quanto vale la variazione di entropia ΔS_{AB} per la trasformazione A→B? [State attenti! La trasformazione considerata è irreversibile, dunque per essa potrebbe non valere la consueta legge di stato delle isoterme…; ricordate però che la variazione di entropia è una funzione di stato e spiegate per bene, in brutta, il procedimento adottato. Può farvi comodo sapere che $ln(2)$ ~ 0.693]
ΔS_{AB} = …………………………………… ~ ……… J/K $nRln(2)$ ~ 1.15 J/K [poiché per definizione la variazione di entropia, essendo una funzione di stato, è indipendente dal percorso prescelto per passare da uno stato all'altro, deve essere $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$. Queste due variazioni di entropia si riferiscono a trasformazioni reversibili, di cui si sa tutto. Ad esempio, tenendo conto che si tratta di un'isocora e di un'isobara, si ha: $\Delta S_{AC} = nc_V ln(T_C/T_A)$ e $\Delta S_{CB} = nc_P ln(T_B/T_C)$, con $c_V = 3R/2$ e $c_P = 5R/2$, calori specifici molari del gas perfetto monoatomico a volume e pressione costante, rispettivamente. Sfruttando le (a voi note!) proprietà della funzione logaritmo, si ha dunque: $\Delta S_{AB} = nR((3/2)ln(T_C/T_A) + (5/2)ln(T_B/T_C)) = nR(ln(T_C/T_A)^{3/2} + ln(T_B/T_C)^{5/2}) = nRln((T_C/T_A)^{3/2}(T_B/T_C)^{5/2}) = nRln(T_B/T_C)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che A→B è isoterma, per cui $T_B = T_A$. La soluzione si trova infine notando che $T_B/T_C = V_B/V_C = V_B/V_A = 2$. Alla stessa soluzione si può giungere anche notando che, pur se irreversibile, l'isoterma A→B congiunge due stati che possono essere in ogni caso uniti da una isoterma reversibile, dato che la temperatura iniziale resta uguale a quella finale. Per un'isoterma reversibile si ha $\Delta S_{AB,REV} = Q_{AB,REV}/T_A = L_{AB,REV}/T_A = nRln(V_B/V_A) = nRln(2)$ e, dato che sulla base di quanto abbiamo affermato, è $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AB,REV}$, si ri-ottiene lo stesso risultato]

b) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, η del ciclo?
η = …………………………………… = …….. $1\text{-}(nc_P T_A/2)/(Q_{AB} + nc_V T_A/2)$ = 0.0749 [nel ciclo il calore viene assorbito nell'espansione isoterma irreversibile e nell'isocora, e ceduto nella compressione isobara. Per definizione è η = $1 + Q_{CED}/Q_{ASS} = 1 + Q_{BC}/(Q_{AB} + Q_{CA})$. Si ha inoltre $Q_{CA} = nc_V(T_A\text{-}T_C) = nc_V T_A(1\text{-}T_C/T_A) = nc_V T_A(1\text{-}T_C/T_B) = nc_V T_A(1\text{-}V_C/V_B) = nc_V(1\text{-}V_A/V_B) = nRT_A/2$, dove abbiamo usato il fatto che $T_B = T_A$ (isoterma) e che la B→C è un'isobara reversibile. Si ha anche $Q_{BC} = nc_P(T_C\text{-}T_B) = nc_P(T_C\text{-}T_A) = \text{-}nc_P T_A/2$, dove abbiamo ragionato in modo simile. Da qui la soluzione]

c) Quanto varrebbe l'efficienza, o rendimento, η' del ciclo se la trasformazione A→B fosse un'isoterma **reversibile**? [Notate che, in questo caso, il calore assorbito nella trasformazione A→B non avrebbe più lo stesso valore Q_{AB} citato prima nel testo!]
η'= …………………………………… ~ …….. $(ln(2)\text{-}1/2)/(ln(2)+3/4)$ ~ 0.134-$(nc_P T_A/2)/(Q_{AB} + nc_V T_A/2)$ = 0.287 [l'espressione generale è analoga alla precedente, solo che in questo caso il calore scambiato nella trasformazione isoterma sarebbe $Q_{AB,REV} = L_{AB,REV} = nRT_A ln(V_B/V_A) = nRT_A ln(2)$. Da qui, esplicitando c_v e c_P e semplificando il semplificabile, la soluzione. nel ciclo il calore viene assorbito nell'espansione isoterma irreversibile e nell'isocora, e ceduto nella compressione isobara. Per definizione è η = $1 + Q_{CED}/Q_{ASS} = 1 + Q_{BC}/(Q_{AB} + Q_{CA})$. Si ha inoltre $Q_{CA} = nc_V(T_A\text{-}T_C) = nc_V T_A(1\text{-}T_C/T_A) = nc_V T_A(1\text{-}T_C/T_B) = nc_V T_A(1\text{-}V_C/V_B) = nc_V(1\text{-}V_A/V_B) = nRT_A/2$, dove abbiamo usato il fatto che $T_B = T_A$ (isoterma) e che la B→C è un'isobara reversibile. Si ha anche $Q_{BC} = nc_P(T_C\text{-}T_B) = nc_P(T_C\text{-}T_A) = \text{-}nc_P T_A/2$, dove abbiamo ragionato in modo simile. Da qui la soluzione. Notate che questa efficienza è maggiore di quella del ciclo che comprende la trasformazione irreversibile a causa essenzialmente del fatto che abbiamo assunto, non so quanto realisticamente, che il calore scambiato nell'isoterma irreversibile, e quindi il lavoro da essa svolto, fosse minore che nel caso reversibile]

4. Un condensatore è realizzato con due armature conduttrici di forma circolare di raggio a = 10 cm poste parallelamente tra loro a distanza reciproca d = 2.0 mm. Lo spazio tre le armature è riempito per metà da due distinti materiali omogenei 1 e 2, **debolmente conduttori** con resistività rispettivamente ρ_{C1} = 1.0x10^3 ohm m e ρ_{C2} = 5.0x10^3 ohm m Questi materiali sono disposti in modo da riempire lo spazio rispettivamente compreso tra un'armatura ed il piano collocato a distanza $d/2$ da questa, e da qui fino all'altra armatura,

Disegno non in scala!



come indicato in figura. Entrambi i materiali hanno la costante dielettrica del vuoto ε_0 = 8.8×10^{-12} F/m. Le armature sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 50 V e si sa che il sistema ha raggiunto **condizioni di equilibrio**.

a) Quanto vale la carica Q che si deposita alla superficie di separazione tra i due materiali 1 e 2?

Q = ……………………………………= .... C $(E_2 - E_1)\pi a^2 \varepsilon_0 = (2/d)V_0((\rho_{C2} - \rho_{C1})/(\rho_{C2} + \rho_{C1}))\pi a^2 \varepsilon_0 = 9.2\times10^{-9}$ C

[il sistema si comporta come un resistore, o meglio come una serie di due resistori (1 e 2). Dato che le armature sono molto estese laterlamente e poco distanti l'un l'altra, si possono trascurare gli effetti ai bordi e quindi si può supporre che i campi elettrici nei due materiali, $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$, siano ortogonali alle armature ed **uniformi** all'interno delle due armature. La condizione sulla differenza di potenziale implica allora: $E_1 d/2 + E_2 d/2 = (E_1+E_2)d/2 = V_0$. I campi hanno intensità diversa, ma, poiché la corrente fluisce in modo uniforme e la densità di corrente deve essere la stessa nei due materiali (per la continuità della corrente), le intensità sono legate dalla relazione: $j_1 = E_1/\rho_1 = j_2 = E_2/\rho_2$. Unendo le due equazioni si ottiene : $E_1 = (2/d)V_0\rho_1/(\rho_1+\rho_2)$; $E_2 = (2/d)V_0\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica (sempre di raggio a) con l'asse parallelo all'asse del condensatore e con le superfici di base una nel materiale 1 e l'altra nel materiale 2 permette di legare la discontinuità del campo alla carica che si accumula sull'interfaccia: $E_2 - E_1 = Q/(\pi a^2 \varepsilon_0)$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale la potenza P fornita dal generatore?

P = ……………………………………= .... W $V_0^2 2\pi a^2/(d(\rho_{C2} + \rho_{C1})) = 13$ W [il generatore fornisce (in modulo, ma la potenza è per definizione positiva, in genere) la stessa potenza che viene "dissipata" per effetto Joule, cioè $P = V_0 I = V_0^2/R$, dove R è la resistenza offerta dai due pezzi di materiale al passaggio della corrente. Per la geometria del sistema (simmetria piana!), si ha semplicemente $R = R_1+R_2 = (\rho_{C1}+\rho_{C2})(d/2)/(\pi a^2)$, da cui la risposta]

c) Quanto valgono in modulo, direzione e verso i campi magnetici $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ misurati ad una distanza r = 5.0 cm rispetto all'asse passante per i centri delle due armature all'interno dei materiali rispettivamente 1 e 2? [Usate il valore $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]

Direzione e verso dei campi: .... direzione tangenziale e verso stabilito dalla regola della mano destra; infatti la presenza di campo magnetico è dovuta alla corrente che fluisce nel sistema e che ha direzione assiale

B_1 = ……………………………………= .... T $\mu_0 J\pi r^2/(2\pi r) = \mu_0 V_0 r/(d(\rho_1+\rho_2)) = 2.6\times10^{-7}$ T [dal teorema di Ampere calcolato su un percorso circolare di raggio r ; la corrente concatenata a questo circuito è data dal flusso di $\boldsymbol{j}$ nel cerchio delimitato dalla circonferenza. L'espressione di j è stata determinata nella risposta ai quesiti precedenti]

B_2 = ……………………………………= .... T $B_1 = 2.6\times10^{-7}$ T (t) [dato che $\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{j_2}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 10/2/2011 Firma: