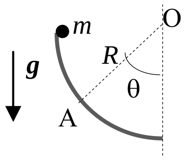
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE - 24/2/2011

Nome e cognome: …………………………………………………….. Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g si trova alla sommità di una guida semicircolare di raggio R = 5.0 m fissa, rigida e disposta su un piano verticale, come rappresentato in figura. A un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



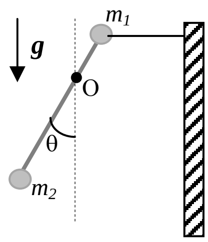
   a) Supponendo trascurabile ogni forma di attrito, quanto vale la velocità v_A con cui l'oggetto passa per la posizione indicata con A in figura, che si trova "a metà strada" dell'arco di circonferenza? [Per intendersi, la posizione è tale che il raggio che congiunge il punto A con il centro O dell'arco di circonferenza forma un angolo $\theta = \pi/4$ sia rispetto alla verticale che all'orizzontale; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 2^{1/2}/2$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]

   v_A = …………………………………. ~ ……… m/s $(2gR(1-cos\theta))^{1/2} \sim 5.4$ m/s [essendo trascurabili gli attriti, si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U = (m/2)v_A^2 - mgR(1-cos\theta)$, dove si è tenuto conto del fatto che inizialmente l'oggetto è fermo e che l'energia potenziale (gravitazionale) varia nel processo perché l'oggetto cambia la sua quota di un tratto $R(1-cos\theta)$. Da qui la soluzione]

   b) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A che la guida esercita sull'oggetto nell'istante in cui questo passa per il punto A di cui sopra?

   N_A = …………………………………. ~ ……… N $mg(2-cos(\theta)) \sim 0.63$ N [l'oggetto sta compiendo un moto circolare, dunque su di esso deve agire l'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v_A^2/R$ diretta radialmente verso il centro di curvatura. Le forze che agiscono sull'oggetto, la forza peso e la reazione vincolare della guida, devono allora creare questa accelerazione. La forza peso ha componente radiale $mgcos(\theta)$ di verso centrifugo (l'angolo è quello rispetto alla verticale),. Deve quindi essere: $ma_C = N_A - mgcos(\theta)$. Da qui la soluzione, dove si è usato il valore di v_A determinato sopra]

2. Un sistema è formato da un'asta rigida di **massa trascurabile** di lunghezza L = 1.0 m alle cui estremità si trovano due masse puntiformi $m_1 = m_2 = m$ = 0.50 kg. Come mostrato in figura, questa sorta di manubrio è imperniato in un punto (indicato con O in figura) che dista $L_1 = L/4$ rispetto all'estremo in cui si trova la massa m_1: esso può quindi ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio nella configurazione di figura (l'angolo vale $\theta = \theta_0 = \pi/6$) da una fune inestensibile attaccata per un capo alla massa m_1 e per l'altro capo ad una parete rigida verticale. . [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]



   a) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune?

   T = …………………………………. ~ …….. N $g(3m_2-m_1)sin\theta_0/cos\theta_0 = 2gmtg\theta_0 \sim 5.8$ N [il sistema è in equilibrio traslazionale e rotazionale (attorno al polo O). Per soddisfare quest'ultima condizione, occorre che sia nulla la somma vettoriale dei momenti delle forze esterne, che sono dovute alle sole forze peso che agiscono sulle masse. Tenendo conto in modo opportuno dei segni e dei bracci delle forze, deve essere $0 = -TL_1cos\theta_0 + m_2g(L-L_1)sin\theta_0 - m_1gL_1sin\theta_0$, da cui la soluzione. Notate che la stessa soluzione deve anche ottenersi considerando il sistema come un corpo rigido, individuandone il centro di massa (che è a metà della lunghezza dell'asta) e supponendo la forza peso complessiva applicata al centro di massa]

   b) Ad un certo istante la fune viene improvvisamente tagliata e il sistema si mette a ruotare: quanto vale la velocità angolare ω' nell'istante in cui l'asta passa per la direzione verticale? [Considerate **trascurabile** ogni forma di attrito]

   ω' = …………………………………. ~ ……… rad/s $(8g(1-cos\theta_0)/(5L))^{1/2} \sim 1.4$ rad/s [poiché sul sistema non agiscono forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Trattando il sistema delle due masse come un corpo rigido, si ha subito che il momento di inerzia (rispetto al polo considerato) vale $I = m_1L_1^2 + m_2(L-L_1)^2 = 5mL^2/8$. Si ha quindi $\Delta E_K = I\omega'^2/2 = 5mL^2/16$. La variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta al fatto che la massa m_1 "si alza" di un tratto $|L_1(1-cos\theta_0)|$ mentre la massa m_2 "si abbassa" di un tratto $|(L-L_1)(1-cos\theta_0)|$. Tenendo conto dei segni in modo opportuno si ottiene $\Delta U_G = m_1gL_1(1-cos\theta_0) - m_2g(L-L_1)(1-cos\theta_0) = mg(1-cos\theta_0)(2L_1-L)$, da cui la soluzione. Anche in quiesto caso notate che lo stesso risultato si ottiene considerando la variazione di quota del centro di massa (e la massa complessiva del sistema)]

   c) Immaginate ora che, grazie a un congegno magico, proprio nell'istante in cui l'asta passa per la direzione verticale la massa m_2 si stacchi dal manubrio cadendo **verticalmente**. Quanto vale, **immediatamente dopo** questo evento, la velocità angolare ω'' dell'asta, ovvero della massa m_1 che è l'unica rimasta a far parte dell'aggeggio? [Tenete conto che il congegno sviluppa, per permettere il distacco della massa m_2, delle forze che sono "interne" al sistema]

   ω'' = …………………………………. ~ ……… rad/s $5\omega'/2 \sim 3.5$ rad/s [nel breve intervallo di tempo che intercorre tra quando il sistema (intero) passa per la verticale e quando la massa m_2 si è distaccata sul sistema non agiscono forze esterne in grado di provocare un momento rispetto al polo O. Infatti il congegno genera forze interne e il perno di rotazione può generare forze impulsive che però hanno braccio, e quindi momento, nullo. Inoltre la configurazione geometrica è tale che anche le forze non impulsive (il peso) hanno braccio nullo, essendo l'asta verticale (in realtà anche la forza interna ha braccio nullo per lo stesso motivo). In queste condizioni si conserva il momento angolare L, cioè $L' = L''$ Prima del distacco è $L' = I\omega'$, con $I = 5mL^2/8$ (calcolaro sopra). Dopo il distacco, poiché la massa m_2 si muove verticalmente, il momento angolare è solo quello della massa m_1 che continua a fare la rotazione. Si ha quindi $L'' = I''\omega''$, con $I'' = m_1L_1^2 = mL^2/16$. Da qui la soluzione]

3. Un recipiente dotato di pareti rigide, indeformabili e **impermeabili al calore**, ha volume V = 1.00 l. Al suo interno può scorrere con attrito trascurabile un setto di spessore e massa trascurabili che divide il recipiente in due camere, A e B, contenenti rispettivamente n_A e n_B moli di un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Il setto scorre in direzione orizzontale ed è anch'esso realizzato con materiale **impermeabile al calore**. Si sa che $n_B = 2n$ e $n_A = n$ e che, ovviamente, $V = V_A+V_B$. Inoltre si osserva che, inizialmente, il sistema è in equilibrio con $V_A = V_B$ e T_A = 500 K. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la temperatura T_B del gas che si trova nella camera B?

T_B = ……………………………………………. = ……………. K $T_A/2$ = 250 K [essendo il sistema in equilibrio, si ha $P_A = P_B$, da cui $(n_ART_A)/V_A = (n_BRT_B)/V_B$. Tenendo conto che $V_A=V_B$ e usando la relazione tra le moli data nel testo si ottiene la soluzione]

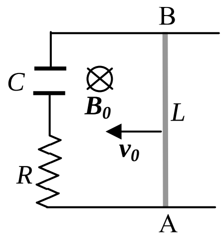
b) Supponete ora che un apposito dispositivo fornisca al (solo) gas presente nella camera A una certa quantità di calore Q_A (incognita). A seguito di questa cessione di calore, si osserva che il gas nella camera A si espande e il setto si sposta finché non viene raggiunta una nuova condizione di equilibrio in cui $V_A'=3V/4$. Il processo avviene in maniera quasi-statica, cioè in condizioni che si possono ritenere **reversibili**. Sapendo che n_A = 0.100 moli, quanto vale il calore Q_A?

Q_A = ……………………………………………. = ……………. J $(3R/2)n_AT_A(2^{5/3}-1+2^{1/3}\ -1/2)$ ~ $2.93(3R/2)n_AT_A$ = $1.83\text{x}10^3$ J [iniziamo con il notare che, per il primo principio della termodinamica, deve essere $Q_A=L_A+\Delta U_A$ e $0=L_B+\Delta U_B$, dove nell'ultima espressione abbiamo notato che il gas B subisce una trasformazione adiabatica. Inoltre, dato che A si espande e B si comprime, deve essere L_A+L_B = 0. Sommando tra di loro le espressioni per il primo principio in A e in B si ottiene quindi: $Q_A=\Delta U_A+\Delta U_B = n_Ac_V(T_A'-T_A+2T_B'-2T_B)$, dove si è sfruttata la relazione tra il numero di moli data nel testo. Come già affermato, il gas B subisce una trasformazione adiabatica che, sulla base di quanto affermato nel testo, può essere considerata reversibile. Dunque deve essere $T_B'=T_B(V_B/V_B')^{\square-1}= T_B2^{2/3}$, dove si è usata la legge delle adiabatiche reversibili e si è tenuto conto che V_B '$=V-V_A'=V/4$ e che, per un gas perfetto monoatomico, $\gamma=c_P/c_V=5/3$. Si ottiene quindi $Q_A=n_Ac_V(T_A'-T_A+(T_A/2)(2^{2/3}-1))$, dove abbiamo usato la relazione, trovata sopra, $T_B=T_A/2$. Per determinare la soluzione occorre esprimere T_A'. A questo scopo notiamo che la nuova condizione di equilibrio richiede $P_A'=n_ART_A'= P_B'$. D'altra parte, essendo la trasformazione in B un'adiabatica reversibile, è $P_B'=P_B(V_B/V_B')^{\square}=P_A2^{5/3}=n_ART_A2^{5/3}$, da cui $T_A'=T_A2^{5/3}$. Da qui, rimettendo tutto insieme, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale la variazione **complessiva** di entropia ΔS_{TOT} per il gas (tutto) contenuto nel recipiente? [In sostanza dovete determinare la somma $\Delta S_A+\Delta S_B$ delle variazioni di entropia che i due gas contenuti nelle camere A e B subiscono nel processo considerato]

ΔS_{TOT} = ……………………………………………. ~ ……………. J/K $n_AR((5/2)ln(2^{5/3})+ln(3/2))$ ~ 2.74 J/K [il gas nella camera B compie un'adiabatica reversibile, per cui $\Delta S_B=0$. Per il calcolo di ΔS_A conviene individuare una successione di due trasformazioni reversibili che conducano dallo stato di partenza allo stato di arrivo. Infatti la variazione di entropia è una funzione di stato e dunque indipendente dal percorso effettivamente seguito nella trasformazione. Lo stato iniziale ha variabili: $T_A,V/2,P_A=2n_ART_A/V$. Lo stato finale ha variabili: $T_A'=T_A2^{5/3},V_A'=3V/4,\ P_A'=4n_ART_A2^{5/3}/(3V)$. Supponiamo allora di prendere un'isobara $P_AV_AT_A \rightarrow P_AV_A''T_A'$ seguita da un'isoterma $P_AV_A''T_A' \rightarrow P_A'\ V_A'T_A'$ Sfruttando il carattere additivo della variazione di entropia e ricordando la sua espressione per le trasformazioni reversibili isobare e isoterme si ha: $\Delta S_A=n_Ac_Pln(T_A'/T_A)+n_ARln(V_A'/V_A)$, da cui, usando le informazioni scritte sopra sul valore delle variabili, si ottiene la soluzione]

4. Un circuito elettrico è costituito dagli elementi rappresentati in figura: una barretta di materiale ottimo conduttore di lunghezza L = 10 cm che può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale, mantenendo contatto elettrico con due guide fisse e rigide, anch'esse di materiale conduttore. Le due guide sono collegate tra loro attraverso una serie di un resistore elettrico con resistenza R = 1.0 kohm e un condensatore di capacità C = 1.0 μF. Un campo magnetico esterno, uniforme, costante e di modulo B_0 = 5.0 T, attraversa il piano su cui si muove la barretta (la figura mostra che $\mathbf{B_0}$ "entra nel foglio"). Un operatore esterno muove la barretta con una velocità costante di modulo v_0 = 50 cm/s diretta nel verso indicato in figura.



a) Supponendo che il sistema abbia raggiunto condizioni **stazionarie**, quanto valgono, in modulo, la differenza di potenziale ΔV ai capi della barretta e l'intensità di corrente I che attraversa la barretta? Quale dei due estremi della barretta A e B indicati in figura si trova a potenziale maggiore?

ΔV = ……………………………………………. = ……………. V v_0B_0L = 0.25 V [il movimento della barretta fa sì che il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito diminuisca. Per la legge di Faraday, il modulo della differenza di potenziale (ovvero della forza elettromotrice) è dato da $d\Phi(\mathbf{B_0})/dt = B_0v_0L$, dove abbiamo notato che il flusso (in modulo) è dato, in modulo, dal prodotto tra B_0 e l'area della spira, la cui variazione nel tempo è proprio data da Lv_0]

I = ……………………………………………. = ……………. A 0 [in condizioni stazionarie, dove si intende che tutti i fenomeni transienti abbiano raggiunto una situazione di equilibrio, il passaggio della corrente attraverso la barretta implicherebbe passaggio di corrente attraverso il condensatore, che non può verificarsi]

Potenziale più alto in A o in B? Quale e perché: ……………………………………………. Il punto A si trova a potenziale più basso. Il modo più semplice per individuare il segno della differenza di potenziale consiste nel fare riferimento alla forza di Lorentz che agisce sulle cariche libere della barretta. Per una carica positiva, la regola della mano destra stabilisce che la forza è diretta verso il basso (di figura). Quindi le cariche positive sono spinte verso l'estremo A della barretta, che di conseguenza si viene a trovare a potenziale più basso rispetto a B]

b) Immaginate ora che all'istante t_0 = 0 la barretta si fermi improvvisamente. Come si esprime l'andamento temporale dell'intensità di corrente $I(t)$ che scorre all'interno della barretta? [Scrivete una funzione del tempo, senza usare valori numerici, e indicate il valore assoluto dell'intensità di corrente, senza preoccuparvi del segno]

$I(t)$ = ……………………………………………. $(v_0B_0L/R)e^{-t/(RC)}$ [all'arresto della barretta non c'è più generazione di differenza di potenziale dovuta alla legge di Faraday. Il condensatore, che si trova carico al potenziale $\Delta V_0 = v_0B_0L$, si scarica attraverso il resistore, con costante tempo $\tau = RC$. La carica sul condensatore varia allora secondo la legge $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}=Cv_0B_0Le^{-t/\tau}$. La soluzione si ottiene notando che $I(t)=|dQ(t)/dt|$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 24/2/2011 Firma: