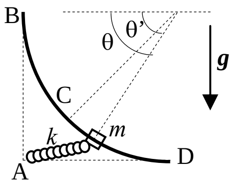
Corso di Laurea Ing E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 23/6/2011

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 50 cm ed è disposto su un piano verticale. Al manicotto è agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 1.0 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** (L_0 = 0, in pratica!). L'altra estremità della molla è vincolata a un punto fisso, indicato con A in figura, che corrisponde all'intercetta tra la verticale e l'orizzontale dei punti di inizio e fine della guida: dato che questa descrizione risulterà incomprensibile ai più, vi invito a osservare la figura, che si riferisce a una posizione "generica" del tondino, quella in cui l'angolo tra orizzontale e raggio "vettore" vale θ (generico). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 1/2^{1/2}$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Esprimete la funzione $L(\theta)$ che fornisce la lunghezza della molla per un valore generico dell'angolo θ (che, come già affermato, è quello tra orizzontale e raggio "vettore", vedi figura). [Dovete scrivere una funzione dell'angolo θ (quello indicato in figura) e quindi non utilizzate valori numerici! Notate che si tratta di un semplice problema di geometria…]

$L(\theta)$ = …………………… $R(3-2(sin\theta+cos\theta))^{1/2}$ [immaginate di porre un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto A, chiamando asse X e Y gli assi orizzontale e verticale. Se indicate con x,y la posizione del manicotto in questo riferimento, è chiaro che la lunghezza della molla è $L = (x^2+y^2)^{1/2}$. Ricordando un po' di trigonometria e osservando la figura, dovrebbe esservi evidente che si ha $x=R-Rcos\theta$ e $y=R-Rsin\theta$. Dunque, riorganizzando appena le espressioni, $L=R((1-cos\theta)^2+(1-sin\theta)^2)^{1/2}$, da cui, svolgendo i binomi e ricordando che $sin^2\theta+cos^2\theta$ = 1, il risultato]

b) Immaginate che il manicotto si trovi inizialmente **fermo** sulla sommità della guida, cioè nel punto indicato come B in figura, e che da qui venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la velocità v' con cui passa, se ci passa, per il "punto di mezzo" della guida (punto C in figura, quando il manicotto passa per questo punto l'angolo θ vale θ' = π/4)? [Trascurate ogni forma di attrito]

v' = …………………… ~ ………. m/s $(gR2^{1/2}+(k/m)R^2(2^{1/2}-1))^{1/2} \sim 3.0$ m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. Alla variazione di energia potenziale contribuiscono l'energia potenziale della forza peso (gravitazionale) e quella elastica della molla, cioè $\Delta U= \Delta U_G + \Delta U_{ELA}$. La variazione dell'energia potenziale gravitazionale è dovuta alla discesa del manicotto per un tratto che vale, in modulo, $Rsin\theta'$, per cui $\Delta U_G= -mgRsin\theta'=-mgR/2^{1/2}$. La variazione di energia elastica della molla è dovuta al fatto che essa cambia la sua lunghezza dal valore iniziale $L(0)=R$ al valore "finale" $L(\theta')=R(3-2(sin\theta'+cos\theta'))^{1/2} = R(3-4/2^{1/2})^{1/2}$. Ricordando che l'energia elastica è, nel caso di molla lunga L e con lunghezza di riposo nulla, $U_{ELA}=(k/2)L^2$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)R^2(3-4/2^{1/2})-(k/2)R^2=(k/2)R^2(2-4/2^{1/2})=kR^2(1-2^{1/2})$.. Unendo il tutto e rimaneggiando si trova la soluzione: si noti che la soluzione esiste, dunque il manicotto passa effettivamente per la posizione richiesta, dato che il suo movimento comporta una diminuzione dell'energia potenziale]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N che il tondino esercita sul manicotto nell'istante in cui esso passa per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per il punto di mezzo della guida (punto C di figura, angolo θ' = π/4)? [Attenti: il manicotto "passa" per quella posizione, dunque non è fermo…]

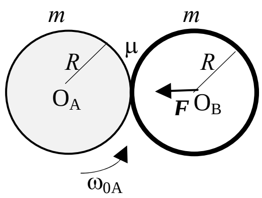
N = …………………… ~ ………. N $mv'^2/R+mg/2^{1/2} +kR(3-2x2^{1/2})^{1/2} \sim 0.85$ N [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio R con una data velocità. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto, le quali sono la componente radiale della forza peso, che punta verso l'esterno della circonferenza e vale $mgsin\theta'=mg/2^{1/2}$, la forza elastica, che è radiale e punta anch'essa verso l'esterno della circonferenza (la molla è estesa, avendo lunghezza di riposo nulla!) e la reazione vincolare, che invece punterà verso il centro di curvatura della circonferenza. Da qui la soluzione]

d) E quanto vale la velocità v'' con cui il manicotto arriva alla fine della guida (punto D di figura), se ci arriva?

v'' = …………………… ~ ………. m/s $(2gR)^{1/2} \sim 3.1$ m/s [anche qui adottiamo la conservazione dell'energia meccanica, che stavolta si scrive in modo semplicissimo. Infatti la molla non cambia la sua lunghezza tra inizio e "fine" (essa è sempre lunga R!) e dunque non c'è variazione dell'energia elastica. Resta la variazione dell'energia potenziale gravitazionale, che è pari a $-mgR$, da cui la soluzione che, anche in questo caso, esiste!]

-- **PARTE 2**

2. All'interno di un macchinario si trovano due "ruote", denominate A e B, entrambi di raggio R = 30 cm, che possono ruotare con **attrito trascurabile** attorno a dei perni passanti per i propri assi geometrici, O_A e O_B. Le due ruote hanno anche identica massa m = 1.0 kg, però la ruota A è piena e omogenea, mentre la ruota B assomiglia a un "cerchione di bicicletta", cioè tutta la sua massa è praticamente distribuita in modo omogeneo sulla circonferenza. Le superfici laterali delle due ruote sono scabre e hanno un coefficiente di attrito μ = 0.50: notate che tale coefficiente di attrito vale sia nel caso di attrito dinamico che di attrito statico. Inizialmente le due ruote non sono a contatto tra di loro, la A ruota con velocità angolare ω_{0A} = 50 rad/s (è stata messa in rotazione in precedenza da una qualche causa esterna!) e la ruota B è ferma. Quindi le due ruote vengono poste a contatto l'una con l'altra nella situazione rappresentata in figura, dalla quale si vede che il contatto avviene sulla superficie laterale. A questo scopo, una forza di modulo F = 20 N è applicata al perno O_B, il quale è mobile nella direzione della congiungente fra i due perni (il perno O_A è invece fisso e rigido). Si osserva che, trascorso un certo intervallo di tempo Δt, le due ruote si muovono con velocità angolare dello stesso modulo ω. [Le ruote ruotano su un piano orizzontale e la forza peso non c'entra nulla!]



a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto hanno le due ruote quando vengono messe a contatto e determinate l'intervallo di tempo Δt di cui sopra e il modulo della velocità angolare comune ω che viene raggiunta dalle due ruote.

Discussione : ……………………….. Come anche suggerito dal testo, la ruota B si metterà in moto rotatorio. Essa potrà ruotare, partendo da ferma, perché sottoposta a un momento di forze, secondo l'equazione del moto rotatorio $\alpha_B = \Sigma\tau/I_B$. L'unica forza applicata a B che può provocare un momento è la forza di attrito F_A esercitata al punto di contatto tra le due ruote. Infatti le altre forze, in particolare quella applicata sul perno O_B e la reazione alla forza $\boldsymbol{F}$, hanno evidentemente braccio nullo. Nella fase transiente del moto, quando le velocità angolari delle due ruote sono diverse (in modulo) e quindi c'è strisciamento nel punto di contatto (anzi, nella generatrice delle ruote che è a contatto reciproco), la forza di attrito è dinamica, per cui $F_A=\mu N$, La reazione vincolare che compare in questa espressione deve essere normale alla superficie di contatto, per cui deve essere radiale rispetto alle ruote. Dato che le ruote sono poste a contatto tra di loro a causa della forza $\boldsymbol{F}$, la reazione deve bilanciare tale forza, cioè $N = F$. (ovviamente una forza analoga insisterà sul perno O_A, necessaria a tenere in equilibrio lungo la direzione orizzontale le due ruote, ma di questa forza non ci interessa). La forza di attrito, inoltre, dovendosi opporre allo strisciamento, ha direzione tangenziale rispetto alle ruote, per cui il suo braccio è pari al raggio delle ruote stesse. Rispetto al sistema delle due ruote, la forza di attrito è una forza interna : dunque c'è una forza dovuta all'attrito di B che agisce su A e una forza uguale e opposta che agisce su B. In particolare la ruota B accelera e si mette a ruotare in senso orario ; la ruota B, invece, che inizialmente ruota in senso antiorario, continuerà a ruotare nello stesso verso ma la sua velocità angolare diminuirà in modulo, cioè il suo moto sarà decelerato. L'accelerazione angolare della ruota B vale $\alpha_B=-F_AR/I_B=F_A/(mR)=\mu F/(mR)$, avendo notato che, per un « cerchione » di bicicletta, si ha $I = mR^2$ e avendo posto un segno positivo per significare quello che abbiamo già chiarito a parole. L'accelerazione angolare sulla ruota A la scriveremo invece come $\alpha_A = -F_AR/I_A =-2\mu F/(mR)$, avendo notato che $I_A = mR^2/2$ (ruota piena e omogenea). Notate che la convenzione dei segni che abbiamo usato è un po' sui generis, e funziona soltanto se si lavora con i moduli delle velocità angolari : ricordatevelo, oppure provate a scrivere le equazioni con lo stesso segno convenzionale per le due ruote. Parlando di moduli, la ruota A dimnuirà la propria velocità angolare mentre la ruota B si metterà in movimento. Come suggerito dal testo, a un certo istante le due velocità angolari coincideranno in modulo (occhio : sono opposte, in realtà…). Di conseguenza anche le velocità tangenziali dei punti di contatto delle due ruote saranno, in modulo, le stesse e non ci sarà più strisciamento. Da questo istante in poi non ci si saranno più perdite di energia (cinetica) per attrito e le velocità resteranno costanti al valore ω.

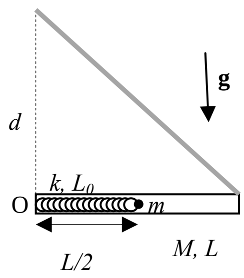
Δt = ……………………….. = ……….. s $\omega_{0A}mR/(3\mu F)$ =0.50 s [osservando che le accelerazioni determinate sopra sono uniformi e costanti, si avrà che le leggi orarie dei moduli delle velocità angolari assumeranno la forma : $\omega_B = \alpha_B(t-t_0)$ e $\omega_A = \omega_{0A}+\alpha_A(t-t_0)$, con t_0 istante in cui avviene il contatto . L'intervallo di tempo richiesto è quello per cui le due velocità risultano uguali, cioè $\Delta t = \omega_{0A}/(\alpha_B-\alpha_A)$, da cui, sostituendo le espressioni trovate prima, la soluzione]

ω = ……………………….. = ……….. rad/s $\alpha_B\Delta t =(\mu F/(mR))(\omega_{0A}mR/(3\mu F)) = \omega_{0A}/3 = 17$ rad/s [vedi sopra]

b) Quanto vale il lavoro L_{ATT} fatto dalla forza di attrito che si esercita al contatto tra le due ruote durante il processo di cui sopra? [Il "processo" comincia nel momento in cui le due ruote entrano in contatto! Trascurate quello che avviene prima, cioè l'avvicinamento dei due perni]

L_{ATT} = ……………………………………~ ……… J $\quad -\omega_{0A}^2/(6mR^2) = -37.5$ J [per motivi di bilancio energetico, il lavoro della forza di attrito deve uguagliare la variazione di energia cinetica (infatti nel processo non ci sono variazioni di energia potenziale…), cioè $L_{ATT} = \Delta E_K = ((I_A+I_B)/2)\omega^2-(I_A/2)\omega_{0A}^2$, da cui, sostituendo e rimaneggiando, la soluzione]

3. Un sottile pezzo di tubo, di massa M = 1.0 kg e lunghezza L = 50 cm, è imperniato a un suo estremo (O in figura) in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. All'interno del tubo, che è cavo, si trova un oggetto puntiforme, di massa $m = M/2$ = 0.50 kg, che può muoversi con attrito trascurabile all'interno del tubo. L'oggetto è agganciato a una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 2.0\text{x}10^4$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = L/2$: questa molla è quindi tenuta in posizione **compressa** da un qualche gancetto solidale al tubo. All'estremità del tubo, ovviamente quella opposta rispetto al perno, è attaccata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro capo è attaccato a un chiodo posto sulla verticale di O, a una distanza $d = L$ = 50 cm da questo. Inizialmente il sistema è in **equilibrio** nella configurazione rappresentata in figura: il tubo ha il suo asse in direzione orizzontale e l'oggetto puntiforme si trova a metà lunghezza del tubo. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F_O che il perno esercita sull'asta in queste condizioni di equilibrio?

T = …………………………………… ~ .... N $\quad (M+m)g2^{1/2} = 3mg/(2\sin\theta) = 3mg/2^{1/2} \sim 10$ N [il sistema deve essere in equilibrio rotazionale e traslazionale. Per l'equilibrio rotazionale rispetto al polo O si ha che le forze che hanno momento sono le forze peso di tubo e oggetto, entrambe applicate a metà lunghezza del tubo e entrambe di braccio $L/2$, e la tensione della fune, che ha invece braccio pari a $L\sin(\pi/4)=L/2^{1/2}$ (si noti che il triangolo rettangolo formato da fune, tubo e pezzo di parete è isoscele, per cui l'angolo compreso tra tubo e fune vale $\theta = \pi/4$). I momenti delle forze peso tendono a far ruotare il sistema in senso orario, la tensione della fune in senso antiorario: uguagliando i momenti si ottiene la soluzione]

F_O = …………………………………… ~ .... N $\quad mg(9/2)^{1/2} = 3mg/2^{1/2} \sim 10$ N [la forza del perno garantisce l'equilibrio traslazionale bilanciando le forze peso e la tensione della fune. Poiché viene richiesto il modulo di tale forza, occorre valutarne separatamente le componenti orizzontale e verticale. In direzione orizzontale, detto θ l'angolo tra tubo e fune e scegliendo come positivo un asse che punta verso la destra della figura, si ha $F_{OX} = T\cos\theta$. In direzione verticale, scegliendo un asse che punta verso l'alto, si ha $F_{OY} = (M+m)g-T\cos\theta$. Ricordando che l'angolo vale $\theta = \pi/4$ e che il modulo si ottiene con una somma in quadratura delle componenti, si ottiene la soluzione

b) A un dato istante la fune viene tagliata e il tubo con l'oggetto e la molla al suo interno risulta libero di ruotare con velocità angolare iniziale nulla. Quanto vale la velocità angolare ω_0 del tubo quando il suo asse si trova ad avere una direzione verticale? [In questo processo l'oggetto **non si muove** rispetto al tubo; assumete per il tubo il momento di inerzia di una sottile asta omogenea di pari massa e lunghezza]

ω_0 = …………………………………… ~ .... rad/s $\quad (36g/(11L))^{1/2} \sim 8.0$ rad/s [nel processo di discesa non ci sono forze dissipative e quindi si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica si esprime come $\Delta E_K = (I/2)\omega_0^2+(m/2)v_0^2$, dove v_0 è la velocità (tangenziale) dell'oggetto, che vale $v_0 = \omega_0 L/2$. Poiché il momento di inerzia per un'asta omogenea sottile imperniata a un suo estremo vale $I = (ML^2)/3= 2mL^2/3$, si ha $\Delta E_K = (mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2 = (11/24)mL^2\omega_0^2$. La variazione di energia potenziale ha solo origine « gravitazionale » (della forza peso), dato che nel processo la molla non cambia la sua lunghezza e quindi non cambia la sua energia. La variazione di energia potenziale gravitazionale è dovuta alla discesa dell'oggetto (per un tratto $L/2$) e alla discesa del centro di massa del tubo (anch'essa per un tratto $L/2$), per cui $\Delta U_G = mgL/2+MgL/2 = 3mgL/2$. Da qui la soluzione]

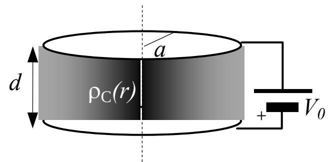
c) Supponete ora che nel preciso istante in cui l'asse del tubo passa per la direzione verticale il gancetto che teneva compressa la molla venga rimosso: di conseguenza la molla si allunga (istantaneamente, notate che la molla è "molto rigida") fino alla propria lunghezza di riposo e l'oggetto viene "sparato via" fuori dal tubo. Discutete per benino, in brutta, quali grandezze dinamiche (energia, quantità di moto, momento angolare) si conservano nel processo di sparo, cioè se variano o no tra subito prima e subito dopo lo sparo stesso, e spiegate perché. Determinate inoltre la velocità angolare ω' del tubo **subito dopo** lo sparo.

Discussione : ……………………….. Il processo di sparo avviene « istantaneamente » e somiglia molto a una frammentazione. In questo processo, vista l'assenza di attriti, si può supporre ragionevolmente che l'energia meccanica si conservi. **Subito prima** dello sparo, l'energia cinetica è data dalla rotazione dell'asta e dal moto (tangenziale) dell'oggetto che a essa è, praticamente, solidale. Dunque, come già osservato, si ha $E_{K0} = (I/2)\omega_0^2 + (m/2)v_0^2 = (mL^2/3+mL^2/8)\omega_0^2 = (11/24)mL^2\omega_0^2$. **Subito dopo** lo sparo si ha $E_K' = (I/2)\omega'^2 + (m/2)v'^2 = (mL^2/3)\omega'^2+(m/2)v'^2$, dove v' è il modulo della velocità dell'oggetto dopo lo sparo, che non conosciamo. La variazione di energia potenziale dipende dalla variazione di quota dell'oggetto (supposta istantanea, come dal testo), $\Delta U_G = -mgL/2$, e dalla variazione di energia elastica della molla, $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(L/2)^2$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che inizialmente la molla è compressa per un tratto L_0 - $L/2= L-L/2 = L/2$ e « finalmente » è alla lunghezza di riposo. Notate che, numericamente, il contributo di ΔU_{ELA} è molto maggiore di quello di ΔU_G, per cui quest'ultimo termine si può trascurare. La quantità di moto totale del sistema palesemente non si conserva : infatti il carattere impulsivo del processo permette di trascurare gli effetti della forza peso, ma non quelli delle forze che il perno esercita sul tubo (e quindi sul sistema), per cui il sistema non è isolato. Tuttavia il momento di queste forze esterne impulsive è nullo, essendo nullo il braccio (rispetto al polo O), per cui si conserva il momento angolare. Prima dello sparo esso vale (al solito consideriamo la componente assiale del momento angolare) $l_0 = I\omega_0 + mv_0L/2 = (2mL^2/3+mL^2/4)\omega_0 = 11mL^2\omega_0/12$. Dopo lo sparo esso si esprime come $l' = I\omega' + |\boldsymbol{r}\text{x}m\boldsymbol{v}'|$. Il prodotto vettoriale che esprime il momento angolare dell'oggetto subito dopo lo sparo richiede in linea di principio di conoscere la direzione della velocità $\boldsymbol{v}'$, dato che il suo modulo è $Lmv'\sin\phi$, avendo indicato con ϕ l'angolo compreso tra la direzione $\boldsymbol{r}$, che è radiale (si tratta del vettore spiccato dal polo verso il punto di applicazione della velocità, che all'istante considerato si trova in fondo al tubo) e la direzione di $\boldsymbol{v}'$. Facendo un disegnino, ci si può facilmente rendere conto che $\sin\phi = v_{TANG}/v'$ (infatti il prodotto vettoriale moltiplica tra loro le componenti ortogonali dei due vettori di partenza), per cui $|\boldsymbol{r}\text{x}m\boldsymbol{v}'| = mLv_{TANG}$. Dato che la molla spara l'oggetto nella direzione radiale (quella del tubo), la componente tangenziale della sua velocità, v_{TANG}, dipende solo dalla rotazione del tubo, cioè $v_{TANG} = \omega' L$. Si può allora scrivere : $l' = 2mL^2\omega'/3+mL^2\omega' = 5mL^2\omega'/3$. Uguagliando i momenti angolari si trova dunque la velocità angolare subito dopo lo sparo. Notate che tutto il discorso sulla conservazione dell'energia meccanica, anche se non necessario per dare la risposta alla domanda, non è inutile, visto che esso permette di determinare l'altra incognita del problema, non richiesta qui, cioè la velocità v' , ovvero la sua componente radiale. Se fate i conti, vedrete che essa è effettivamente molto elevata (dell'ordine di 50 m/s…), cioè l'energia potenziale della molla viene effettivamente impiegata in modo massiccio per « sparare via », secondo la terminologia usata, l'oggetto fuori dal tubo.

ω' = …………………………………… ~ .... rad/s $\quad (11/20)\omega_0 \sim 4.4$ rad/s [vedi sopra]

PARTE 3

4. Un componente elettronico è costituito da due piastre (sottili) fatte di materiale perfettamente conduttore e con forma circolare di raggio a = 10 cm. Tali piastre sono disposte una affacciata all'altra (parallelamente fra loro) a distanza relativa d = 1.0 mm; le dimensioni suggeriscono che è possibile "trascurare gli effetti ai bordi" (simmetria **piana per il campo elettrico**). Nello spazio tra le due piastre si trova del materiale debolmente conduttore, dotato di una resistività ρ_C che **non è uniforme**, ma dipende dalla distanza r dall'asse geometrico del sistema (tratteggiato in figura) attraverso la funzione $\rho_C(r) = \rho_{C0}\, a/r$, con $\rho_{C0} = 1.0\text{x}10^4$ ohm m. In sostanza, quindi, la resistività è massima sull'asse geometrico del sistema e diminuisce muovendosi verso la periferia. Le due piastre sono collegate a un generatore di differenza di potenziale ideale V_0 = 10 V, come rappresentato schematicamente in figura e si suppone che il sistema abbia raggiunto condizioni stazionarie. Inoltre si può supporre che in queste condizioni ci sia della carica elettrica distribuita in modo omogeneo sulla superficie delle piastre e che il campo elettrico fuori dal sistema considerato sia nullo.



Disegno non in scala!!!

a) Discutete per benino, in brutta, come è fatto (da cosa dipende, chi lo genera, etc.) il campo elettrico nello spazio tra le piastre e determinate l'intensità di corrente I che scorre tra le piastre stesse. [Fate attenzione a considerare in modo opportuno la dipendenza dalla posizione delle varie grandezze coinvolte; può farvi comodo ricordare che l'elemento di superficie per un sistema a simmetria "circolare" (una simmetria cilindrica tagliata da un piano ortogonale all'asse) si ottiene, per l'appunto, tagliando l'elemento di volume della simmetria cilindrica con un piano ortogonale all'asse]

Discussione: …………………………… Per quanto riguarda il campo elettrico, il sistema considerato assomiglia molto a un condensatore ad armature piane e parallele. Infatti la simmetria è "piana" (si trascurano gli effetti ai bordi), il campo elettrico fuori dal componente è nullo, la distribuzione di carica sulle piastre è omogenea. Dunque il campo elettrico è uniforme nello spazio tra le piastre, è ortogonale alle piastre stesse, orientato verso la piastra collegata al polo negativo del generatore, e la sua intensità si calcola da $\Delta V = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$, che, essendo il campo uniforme, dà $V_0 = Ed$. In condizioni stazionarie, nello spazio delle armature, che è riempito con un materiale (debolmente) conduttore, circola una corrente elettrica, la cui densità è $j(r) = E/\rho_C(r) = V_0 r/(\rho_{C0} a d)$. Tale densità è evidentemente disomogenea, dato che la corrente "preferisce passare" dove la resistività è minore, cioè ai "bordi" del sistema.

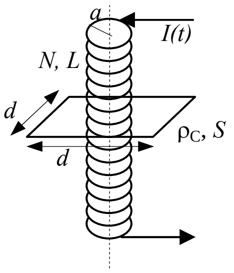
I = ... = ... A $2\pi V_0 a^2/(3d\rho_{C0}) = 2.1\times10^{-2}$ A [per definizione si ha $I = \Phi_S(\mathbf{j}) = \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, dS$, dove l'integrale deve essere esteso su tutta la superficie attraverso cui passa la corrente, cioè sull'intera sezione del sistema (delle piastre e del materiale conduttore) tagliata con un piano ortogonale all'asse geometrico, e $\mathbf{n}$ è la normale a ogni elemento di superficie dS, che evidentemente avrà direzione assiale (il verso lo scegliamo concorde con quello di $\mathbf{E}$, e quindi di $\mathbf{j}$, in modo da ottenere un'intensità di corrente positiva, come da definizione). Nell'eseguire l'integrale occorre notare che la densità di corrente è **disomogenea**, ma mantiene una **simmetria "circolare"**, dato che il suo valore dipende solo dalla distanza dall'asse r. Immaginiamo quindi di suddividere la superficie in tante corone circolari, di raggio generico r (compreso tra 0 e a) e di spessore (infinitesimo) dr. La superficie di queste corone è $dS=2\pi r dr$ (come si ottiene, seguendo l'indicazione del testo, tagliando un guscio sferico sottile, che è l'elemento di volume in simmetria cilindrica, con un piano ortogonale all'asse del cilindro). L'integrale diventa allora: $I = \int_0^a j(r) 2\pi r dr$. Sostituendo l'espressione di $j(r)$ trovata prima ed eseguendo il calcolo si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale l'intensità del campo magnetico B_{OUT} in un punto collocato a distanza $r_{OUT} = 2a$ dall'asse geometrico del sistema (quindi fuori dal sistema)? Quanto l'intensità B_{IN} in un punto collocato a distanza $r_{IN} = a/2$ dall'asse (quindi "all'interno" del sistema)? [Usate $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la suscettività magnetica del vuoto e supponete ancora una volta "trascurabili gli effetti ai bordi", che qui significa che vi **dovete comportare come se la "lunghezza" *d* del sistema fosse estremamente grande**…]

B_{OUT} = ... = ... T $\mu_0 V_0 a/(6d\rho_{C0}) = 2.1\times10^{-8}$ T [il suggerimento del testo permette di considerare il sistema come un filo elettrico molto lungo (sic! Non è mica vero…) percorso dalla corrente I . Il campo di induzione magnetica è quindi tangenziale e la sua intensità si determina con il teorema di Ampere, circuitando lungo una circonferenza coassiale con il sistema e di raggio $r_{OUT} = 2a$. Dato che la corrente concatenata a questa circuitazione è tutta la corrente che attraversa il sistema, si ha: $2\pi(2a)\, B_{OUT} = \mu_0 I = \mu_0 2\pi V_0 a^2/(3d\rho_{C0})$, da cui la risposta]

B_{IN} = ... = ... T $\mu_0 V_0 a/(12d\rho_{C0}) = 1.0\times10^{-8}$ T [si ragiona come sopra, solo che stavolta a essere concatenata con la circuitazione, che è una circonferenza di raggio $r_{IN} = a/2$, non è tutta la corrente I , ma solo la parte che passa all'interno dell'area delimitata dalla circuitazione stessa. Il calcolo della corrente concatenata si esegue valutando il flusso di $\mathbf{j}$ all'interno di un cerchio di raggio r_{IN}. Nella pratica questo significa ripetere l'integrazione di superficie riportata nella risposta al quesito a) mettendo però come limiti di integrazione i valori 0 e $a/2$. Si ottiene allora $I_{CONC} = 2\pi V_0(a^2/8)/(3d\rho_{C0}) = I/8$. Il teorema di Ampere in questo caso recita: $2\pi(a/2)B_{IN}=\mu_0 I_{CONC}$, da cui la soluzione]

5. Un solenoide di lunghezza L = 1.0 m e raggio a = 5.0 cm è realizzato avvolgendo N = 1000 spire di filo elettrico (il solenoide è evidentemente molto più lungo che largo, e quindi potete considerarlo come "ideale"). Esso è collegato a un generatore di corrente variabile nel tempo. In pratica questo generatore è un dispositivo che fa circolare nel solenoide una corrente di intensità $I(t)$: esso è spento per $t<0$, viene acceso in $t = 0$ e si osserva che la corrente prodotta aumenta **linearmente** fino al valore $I_{MAX} = 1.0\times10^3$ A nell'intervallo di tempo $0<t<\tau$, con τ = 2.0 s, e quindi rimane costante al valore I_{MAX} per $t>\tau$. Attorno al solenoide è costruita una spira quadrata di lato d = 20 cm fatta con un filo elettrico di sezione di area S = 0.50 mm^2 e resistività (omogenea) $\rho_C = 1.0\times10^2$ ohm m. Come si vede in figura, la spira ha il suo centro geometrico in corrispondenza dell'asse del solenoide (tratteggiato in figura) e giace su un piano ortogonale all'asse e che lo intercetta più o meno a metà della lunghezza del solenoide. [Considerate la spira e il solenoide rigidi e fissi nello spazio: gli effetti "meccanici" non sono quindi rilevanti in questo esercizio. Usate $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la suscettività magnetica del vuoto]



Disegno assolutamente non in scala!!!

a) Come si esprime, in funzione del tempo t, l'intensità di corrente elettrica $I_S(t)$ che è **indotta nella spira**? [Dovete scrivere una funzione di t: non usate valori numerici ma fate riferimento ai parametri letterali indicati nel testo; potete supporre che la variazione di corrente nel solenoide avvenga così lentamente che il campo magnetico nel solenoide abbia l'espressione "consueta"]

$I_S(t)$ = ... $\pi a^2\mu_0 SN\, I_{MAX}/(L4d\tau\rho_C)$ [la corrente variabile nel tempo produce, **all'interno** del solenoide, un campo di induzione magnetica la cui intensità $B(t)$ dipende dal tempo. Per la soluzione del problema possiamo considerare il solenoide come ideale, cioè tale da produrre un campo omogeneo (al suo interno, nullo fuori) diretto lungo l'asse del solenoide. Inoltre, visto che la variazione di corrente avviene piuttosto lentamente, possiamo impiegare un approccio quasi-stazionario, cioè usare il teorema di Ampere per determinare l'intensità del campo di induzione magnetica, che risulta $B(t) = \mu_0 (N/L)\, I(t)$. La funzione $I(t)$ può essere facilmente costruita sulla base delle informazioni date dal testo: risulta infatti $I(t) = I_{MAX}t/\tau$ (controllate che questa funzione soddisfi i requisiti del testo!). La variazione del campo magnetico produce una variazione di flusso di campo magnetico. Notate che tale variazione si ha solo laddove il campo è presente, cioè **all'interno del solenoide** (fuori il campo è e resta sempre nullo!). Vista la geometria del sistema, si ha $\Phi_S(\mathbf{B}(t)) = \pi a^2 B(t) = \pi a^2\mu_0(N/(L\tau))I_{MAX}\, t$. Applicando la legge di Faraday si ottiene una forza elettromotrice sulla spira che, in modulo, vale $|\Delta V(t)|= d\Phi_S(\mathbf{B}(t))/dt = \pi a^2\mu_0(N/(L\tau))I_{MAX}$. Notate che tale forza elettromotrice è presente solo nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = \tau$, dato che fuori da questo intervallo il flusso è costante e la sua derivata rispetto al tempo nulla. Inoltre osservate che il segno meno presente nella legge di Faraday (sarebbe la "legge di Lenz") non ha particolare significato qui, dato che si riferisce al verso di percorrenza della corrente indotta nella spira (opposto rispetto a quello della corrente nel solenoide in modo da bilanciare l'aumento di flusso di campo magnetico), argomento che qui non viene richiesto di affrontare: per questo abbiamo considerato il modulo della forza elettromotrice. Tale forza elettromotrice è in pratica la differenza di potenziale $\Delta V(t)$ che si stabilisce lungo la spira. Ad essa è associata una corrente, la cui intensità può essere calcolata con la legge di Ohm: $I(t) = \Delta V(t)/R$, con R resistenza della spira. Questa può essere facilmente calcolata notando che la lunghezza del filo di resistività ρ_C e sezione S che forma la spira è $l = 4d$, da cui $R = \rho_C 4d/S$. Unendo il tutto si trova la risposta: si noti che la corrente è **costante** nell'intervallo $0<t<\tau$ (e nulla al di fuori di questo intervallo!)!]

b) Quanto vale **l'energia** E_J "dissipata" per effetto Joule dalla spira nell'intervallo di tempo compreso tra $t=0$ e $t = \Delta t$ = 4.0 s? [Attenti: si chiede un'energia, ma voi sapete esprimere la potenza, $P_J = RI^2$…; non vi stupite se vi viene un valore numericamente molto piccolino]

E_J = ... = ... J $(\pi a^2\mu_0 S\, I_{MAX}\, N/(L4d\tau\rho_C))^2\tau^2\,(4d\rho_C/S) = (S/(4d\tau\rho_C))(\pi a^2\mu_0 I_{MAX}N/L)^2 = 3.0\times10^{-13}$ J [la potenza "dissipata" per effetto Joule dalla spira vale $P_J = R(I_S(t))^2$. Visto il risultato del calcolo della $I_S(t)$, tale potenza è costante **nell'intervallo** $0<t<\tau$ (fa zero per $\tau<t<\Delta t$!). L'energia è l'integrale nel tempo della potenza, ma, essendo questa costante, tale integrale si riduce a moltiplicare per τ (non per Δt!). Ricordando l'espressione della resistenza della spira trovata sopra si ottiene la soluzione]

-- **TERMODINAMICA**

6. Una quantità n (incognita) di gas perfetto **biatomico** compie un ciclo termico **reversibile** composto dalla seguente successione di trasformazioni: isocora A→B, espansione isoterma B→C, compressione isobara C→A. Si sa che: $P_B = 2P_A$ e $V_C = 2V_B=2V_A$. I soli dati noti del problema sono: $P_A = 1.00\times10^5$ Pa e $V_A = 1.66\times10^{-5}$ m^3. [La costante dei gas perfetti vale R = 8.31 J/(K mole); può fare comodo sapere che $ln(2) \sim 0.693$]

a) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, η del ciclo?

η = ... ~ …….. $1-7/(5+4ln(2)) \sim 0.099$ [si ha per definizione $\eta = 1+Q_{ced}/Q_{ass}$. Nella trasformazione isocora si ha aumento di pressione, dato che $P_B=2P_A$, e dunque di temperatura. Quindi il calore viene assorbito in A→B. Analogamente il calore viene assorbito nella B→C, che è un'espansione. Nella compressione isobara, invece, il calore viene ceduto. Dunque si ha: $\eta = 1+Q_{CA}/(Q_{AB}+Q_{BC})$. D'altra parte, usando le definizioni di calore specifico molare e la legge dei gas perfetti, deve essere: $Q_{CA} = nc_P(T_A-T_C)=(c_P/R)(P_AV_A-P_CV_C)=(c_P/R)P_A(V_A-V_C)=(c_P/R)P_AV_A(1-2)=-(c_P/R)P_AV_A$. Inoltre $Q_{AB}=nc_V(T_B-T_A)=(c_V/R)(P_BV_B-P_AV_A)=(c_V/R)V_A(P_B-P_A)=(c_V/R)P_AV_A(2-1)=(c_V/R)P_AV_A$. Infine, ricordando che per una isoterma è $Q = L$, si ha $Q_{BC} = nRT_B ln(V_C/V_B)=P_BV_B ln(2)=2P_AV_A ln(2)$. Di conseguenza, ricordando che per un gas perfetto biatomico è $c_V = (5/2)R$ e $c_P=c_V+R=(7/2)R$, si ottiene la soluzione]

b) Sapendo anche che $n = 1.00\times10^{-2}$ moli, quanto valgono la temperatura minima T_{LOW} e la temperatura massima T_{HIGH} raggiunte dal gas durante il ciclo? E quanto varrebbe l'efficienza η_C di una macchina di Carnot che lavorasse fra queste due temperature?

T_{LOW} = ... = ... K $P_AV_A/(nR) = 200$ K

T_{HIGH} = ... = ... K $2T_A = 400$ K [è facile determinare $T_{LOW} = T_A = P_AV_A/(nR)$ e $T_{HIGH} = T_B = 2T_A$]

η_C = ... = ... $1-T_{LOW}/T_{HIGH} = ½$ [dall'analisi della macchina di Carnot; notate che l'efficienza della macchina proposta nell'esercizio è meno di un 1/5 l'efficienza della macchina di Carnot che lavora fra le stesse due temperature!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 23/6/2011 Firma: