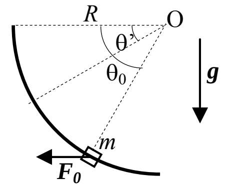
# Corso di Laurea Ing E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 7/7/2011

**Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………**

*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

------------------------------------------------------------------------------------------------ **PARTE 1**

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m$ = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $R$ = 2.0 m ed è disposto su un piano verticale. Inizialmente il manicotto si trova fermo **in equilibrio** alla posizione $\theta_0 = \pi/3$ (l'angolo è quello tra "raggio vettore" e orizzontale, vedi figura) sotto l'azione di una forza **orizzontale,** con il verso indicato in figura, di modulo $F_0$ (incognito) costante. [Usate $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$ , con $3^{1/2} \sim 1.7$]




a) Quanto vale il modulo $N_0$ della reazione vincolare esercitata dalla guida sul manicotto in queste condizioni di equilibrio?

$N_0$ = ……………………. ~ ……… N $mgsin\theta_0 + mgcos\theta_0/tg\theta_0 = mg(sin^2\theta_0+cos^2\theta_0)/sin\theta_0 = mg/sin\theta_0 \sim 0.57$ N [sul manicotto agiscono la reazione vincolare, di direzione radiale essendo prodotta da una guida semicircolare, la forza peso, verticale, e la forza $\mathbf{F_0}$, orizzontale. In direzione tangenziale la condizione di equilibrio implica: $mgcos\theta_0 = F_0 sin\theta_0$; in direzione radiale, dove anche c'è equilibrio (essendo il manicotto fermo) si ha: $mgsin\theta_0 + F_0cos\theta_0 = N$. Sostituendo il valore del modulo di $F_0 = mg/tg\theta_0$ trovato per l'equilibrio in direzione tangenziale si ottiene il risultato]

b) Immaginate ora che, a un certo istante, la forza applicata orizzontalmente al manicotto raddoppi il suo modulo rispetto al valore di equilibrio, cioè che esso diventi $F' = 2F_0$. In queste condizioni il manicotto si mette in movimento: quanto vale, in modulo, la sua velocità $v'$ quando esso passa per la posizione $\theta' = \pi/6$? [Si intende che la forza **F'** si mantiene sempre orizzontale, diretta verso la sinistra di figura e costante durante tutto lo spostamento; può farvi comodo ricordare che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ e $sin(\pi/6) = 1/2$ , con $3^{1/2} \sim 1.7$. Trascurate ogni forma di attrito!]

$v'$ = ……………………. ~ ……… m/s $(2gR(9-5x3^{1/2}))^{1/2} \sim 3.6$ m/s [essendo gli attriti trascurabili si può usare il bilancio energetico: $L = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale, che è solo di tipo gravitazionale (dovuta al lavoro della forza peso), è legata alla variazione di quota $\Delta h$ del manicotto: con un po' di trigonometria si vede che $\Delta h = R(sin\theta_0-sin\theta')$, per cui $\Delta U = \Delta U_G = mgR(sin\theta_0-sin\theta')$. Il lavoro $L$ è quello fatto dalla forza **F'** : tale forza è costante e uniforme, e sempre diretta lungo l'orizzontale. Dunque il lavoro è pari al prodotto tra il modulo della forza $F'$ e la **proiezione in direzione orizzontale** (ricordate che nella definizione di lavoro c'è un prodotto scalare!) dello spostamento del manicotto. Anche qui con un po' di trigonometria si trova che tale proiezione vale $R(cos\theta' - cos\theta_0)$, per cui $L = F'R(cos\theta' - cos\theta_0) = 2F_0R(cos\theta'-cos\theta_0)=2(mgR/tg\theta_0)(cos\theta'-cos\theta_0)$. Mettendo tutto assieme, si ha allora: $(m/2)v'^2 = 2mgR(cos\theta'-cos\theta_0)/tg\theta_0 - mgR(sin\theta_0-sin\theta') = mgR((3^{1/2}-1)/3^{1/2}-3^{1/2}/2+1/2)=mgR(1-3^{1/2}/3-3^{1/2}/2+1/2)=mgR(6 -2x3^{1/2}-3x3^{1/2}+3)=mgR(9-5x3^{1/2})$, dove abbiamo usato i valori delle varie funzioni trigonometriche, da cui la soluzione]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare $N'$ che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per $\theta' = \pi/6$? [Attenti: il manicotto "passa" per quella posizione, dunque **non è fermo**…]

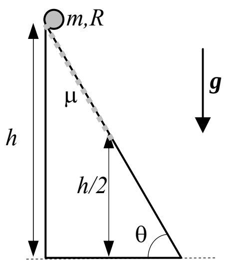
$N'$ = ……………………. ~ ……… N $mg(2(9-5x3^{1/2})+3/2)=mg(39/2-10x3^{1/2}) \sim 0.22$ N [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio $R$ con una data velocità $v'$. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R$. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto. Esse sono la componente radiale della forza peso, che punta verso l'esterno della circonferenza e vale $mgsin\theta'=mg/2$, la componente radiale della forza F', che vale $F'cos\theta' = 2F_0cos\theta' = 2mgcos\theta'/tg\theta_0$, che anche punta verso l'interno, e la reazione vincolare $N'$ incognita, che invece punterà verso il centro di curvatura della circonferenza. Dunque deve essere $mv'^2/R = 2mg(9-5x3^{1/2}) = N'-mg/2-2mg(3^{1/2}/2)/3^{1/2} = N' - mg(1/2+1)$. Da qui la soluzione]

d) Quanto varrebbe la velocità $v'$ di cui al punto b) nel caso ci fosse un attrito dinamico tra guida e manicotto con coefficiente di attrito $\mu$ = 0.50? Discutete per benino in brutta come cambierebbe in queste condizioni l'impostazione del problema e cercate di dare una risposta. [Attenzione: temo che la risposta si possa provare a dare solo facendo un'approssimazione…]

Discussione: ………………………… La soluzione si imposta in modo molto semplice inserendo il lavoro della forza di attrito, negativo, nell'equazione del bilancio energetico. Notate che il lavoro della forza di attrito $L_A$ è negativo, per cui il valore della velocità è minore che nel caso precedente, e potrebbe anche verificarsi, in linea di principio, che l'argomento della radice quadrata che si trova nell'espressione di $v'$ diventi negativa (cosa che implicherebbe l'impossibilità per il manicotto di giungere alla posizione θ'). La difficoltà principale è nell'esprimere il lavoro $L_A = \int \mu N \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{dl} = -\mu|\int N\, dl|$ (nell'ultimo passaggio abbiamo prima indicato con il versore **θ** la direzione – tangenziale – della forza di attrito e quindi notato che la forza di attrito è sempre opposta allo spostamento, anch'esso tangenziale, per cui il prodotto scalare dà un segno negativo, e abbiamo messo un modulo per non avere problemi di segno). Infatti la reazione vincolare è chiaramente non costante né uniforme. La sua espressione dipendente da θ è, sulla base di quanto scritto prima, $N(\theta) = mgsin\theta + F'cos\theta + mv^2/R$. Purtroppo, anche la velocità $v$ è funzione di θ, e la dipendenza implica di sapere il valore della reazione vincolare (si tratta di esprimere la velocità in ogni istante usando proprio il risultato richiesto). Il problema, quindi, è tutt'altro che banale da risolvere… Possiamo fare un'approssimazione, abbastanza sensata, supponendo che la velocità del manicotto non cambi "troppo" rispetto al caso senza attrito e servendoci di questa affermazione per esplicitare $N(\theta)$ . In buona sostanza, poniamo $N(\theta) = mv^2/R+mgsin\theta +2mgcos\theta/tg\theta_0 \sim 2mg((cos\theta-cos\theta_0)/tg\theta_0 - sin\theta_0+ sin\theta)+mgsin\theta +2mgcos\theta/tg\theta_0= mg (3cos\theta/tg\theta_0+3sin\theta-2cos\theta_0/tg\theta_0- 2sin\theta_0)$. A questo punto, notando che lo spostamento $dl$ avviene sulla circonferenza e pertanto vale $dl = Rd\theta$, il calcolo del lavoro della forza di attrito richiede di valutare questo integrale: $L_A = -\mu mgR|\int_{\theta_0}^{\theta'} (3cos\theta/tg\theta_0+3sin\theta-2cos\theta_0/tg\theta_0- 2sin\theta_0)d\theta|$ . L'integrale può essere calcolato usando della semplice matematica e il valore che si trova va considerato nel computo del bilancio energetico, ottenendo alla fine una stima della velocità. Il conto non viene qui riportato, ma potrebbe verificarsi, come già avvertito, che la soluzione non esista, cioè non sia reale (significherebbe che c'è troppa forza di attrito per permettere lo spostamento)

------------------------------------------------------------------------------------------------ **PARTE 2**

2. Un piano inclinato, che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale ed è alto $h$ = 7.5 m, ha la sua superficie per la prima metà (quella "più in alto") scabra, con coefficiente di attrito $\mu$ = 0.80, e per la seconda metà liscia, cioè con attrito trascurabile. In cima al piano inclinato si trova, fermo, un cilindro pieno e omogeneo di raggio $R$ = 70 cm e massa $m$ = 2.0 kg che a un certo istante viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$ , con $3^{1/2} \sim 1.7$]




a) Discutete per benino, in brutta, che tipo di moto compie il cilindro nella sua fase di discesa per la prima metà del piano inclinato (dove è presente attrito) e stabilite la velocità del centro di massa, $v_{CM}'$, e la velocità angolare, ω', del cilindro al termine della zona scabra.

Discussione : ……………………….. Essendo il cilindro un corpo rigido esteso occorre verificare se il moto può essere di rotolamento puro. Le equazioni del moto rotazionale (rispetto al centro di massa, cioè al centro del cilindro)e quella del moto traslazionale del centro di massa, scritta rispetto alla direzione del piano inclinato, scegliendo il verso positivo orientato verso il basso, si scrivono : $\alpha = F_AR/I = 2F_A/m$ , dove abbiamo notato che l'unica forza che fa momento è la forza di attrito, di modulo $F_A$ , e che il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo vale $I = mR^2/2$, e $a_{CM} = gsin\theta-F_A/m$. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, si ha la relazione geometrica $\alpha = a_{CM}R$. Risolvendo il sistema di tre equazioni così ottenuto per l'incognita $F_A$ si ottiene : $F_A = mgsin\theta/3$. Ora il valore massimo della forza di attrito (statica) è $F_{A,MAX} = \mu N = \mu mgcos\theta$; calcolando, si ottiene per la validità del moto di rotolamento puro $tg\theta \le 3\mu$ , che è verificata con i dati del problema, per cui la forza di attrito necessaria per il moto di rotolamento puro può effettivamente essere fornita dal contatto scabro considerato. Quindi, essendo le equazioni scritte indipendenti dal tempo, il moto inizia con le caratteristiche del rotolamento puro e le mantiene **per tutta la prima metà** del piano inclinato.

$v_{CM}'$ = ……………………….. = ……….. m/s $(2gh/3)^{1/2} = 7.0$ m/s [essendo il moto di rotolamento puro si ha conservazione dell'energia meccanica (la forza di attrito statica che vi è coinvolta non compie lavoro !), cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 - mgh/2 = 3mv_{CM}'^2/2 - mgh/2$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo e notato che, in condizioni di rotolamento puro, si ha $\omega = v_{CM}/R$ e che la variazione di quota del centro di massa del cilindro è pari a metà dellì'altezza del piano inclinato. Da qui la soluzione]

ω'= ……………………….. = ……….. rad/s $v_{CM}'/R = 10$ rad/s [vedi sopra]

b) E quanto valgono la velocità del centro di massa, $v_{CM}''$, e la velocità angolare, ω'', del cilindro al termine **dell'intero piano inclinato**? [Attenti alle trappole! Spiegate bene in brutta cosa fate e perché…]

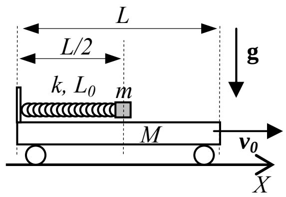


SEGUE

$v_{CM}'' =$ ……………………….. ~ ……….. m/s $(v_{CM}'^2 + gh)^{1/2} = (gh(2/3+1))^{1/2} = (5gh/3)^{1/2} \sim 11$ m/s [nella seconda metà del piano inclinato viene a mancare la forza di attrito, dunque il moto non può più essere di rotolamento puro ! Tuttavia, proprio perché non ci sono forze di attrito, le uniche che potrebbero avere momento non nullo, l'accelerazione angolare è nulla e la velocità angolare **resta quella determinata al punto precedente**, cioè $\omega'' = \omega'$. Ovviamente continua a conservarsi l'energia meccanica, per cui : $0 = (m/2)v_{CM}''^2 + (I/2)\omega'^2 - (m/2)v_{CM}'^2 - (I/2)\omega'^2 - mgh/2 = (m/2)(v_{CM}''^2 - v_{CM}'^2) - mgh/2$ , da cui la soluzione]

$\omega''=$ ……………………….. = ……….. rad/s $\omega' = 10$ rad/s [vedi sopra ; notate che, non essendo il moto di rotolamento puro, **non vale** la relazione geometrica tra le velocità angolare e di traslazione del centro di massa]

3. Un carrellino di massa $M = 4.0$ kg può muoversi con **attrito trascurabile** lungo un binario **orizzontale**. Sul carrellino si trova un oggetto **puntiforme**, di massa $m = M/4 = 1.0$ kg, che può muoversi con **attrito trascurabile** sul pianale del carrellino, che ha lunghezza $L = 20$ cm. L'oggetto puntiforme è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 5.0\times10^2$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = L = 20$ cm, il cui altro estremo è vincolato a una sottile sponda che si trova al bordo del carrellino (vedi figura!). Inizialmente l'oggetto puntiforme si trova fermo **rispetto al carrellino**, grazie a un qualche gancetto, trovandosi a metà della lunghezza del pianale, come mostrato in figura; tutto il sistema si muove con velocità $v_0 = 1.0$ m/s nel verso indicato in figura. All'istante $t_0 = 0$ il gancetto viene rimosso e la molla comincia a estendersi, finché a un certo istante $t'$ l'oggetto puntiforme giunge al bordo del carrello.




a) Quanto vale la velocità $V'$ del carrello nell'istante $t'$? [Notate che in questo istante la molla si trova alla propria lunghezza di riposo…]

$V' =$ …………………………………… = .......... m/s $v_0 - (k/(5m))^{1/2} L/4 = 0.50$ m/s [il sistema costituito da carrello e oggetto è isolato in direzione orizzontale, per cui in questa direzione si conserva la quantità di moto. Quindi in ogni istante deve essere $(m+M)v_0 = mv + MV$ , ovvero, tenendo conto della relazione fra le masse, $5v_0 = v + 4V$. Inoltre si conserva l'energia meccanica, cioè: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA}$. All'istante considerato la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, mentre inizialmente era compressa per un tratto $L - L/2 = L/2$, per cui $\Delta U_{ELA} = -(k/2)(L/2)^2$. Si ha quindi $(m/2)v'^2 + (M/2)V'^2 - ((m+M)/2)v_0^2 = (m/2)(v'^2 + 4V'^2 - 5v_0^2) = (k/2)(L/2)^2$, dove abbiamo usato la relazione fra le masse. Usando la conservazione della quantità di moto si ha: $(5v_0 - 4V')^2 + 4V'^2 - 5v_0^2 = 20V'^2 - 40v_0V' + 20v_0^2 = 20(V'^2 - 2v_0V' + v_0^2) = 20(V' - v_0)^2 = (k/m)(L/2)^2$ , da cui $V' = v_0 \pm (k/(20m))^{1/2} L/2$; delle due soluzioni va scelta ragionevolmente quella con il segno negativo, dato che, per la geometria del sistema, ci si attende che la velocità del carrello diminuisca rispetto al valore iniziale, da cui la risposta]

b) Quanto vale lo **spostamento** $\Delta x_{CM}'$ che il **centro di massa del sistema** compie nell'intervallo di tempo 0, $t'$? [Tenete conto che carrello e oggetto puntiforme formano un sistema e che tutto, all'inizio, è in movimento…]

$\Delta x_{CM}' =$ …………………………………… ~ .......... m $v_0T/4 = v_0\pi/(2\omega) = 6.3\times10^{-2}$ m [il moto relativo del sistema è governato dalla presenza della molla; è facile dimostrare che esso è di tipo armonico, con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2}$ , dove la massa ridotta vale $1/\mu = 1/m + 1/M = 5/(4m)$, per cui $\omega = (5k/(4m))^{1/2}$ . Quindi l'oscillazione dell'oggetto **rispetto al carrello** avviene con un periodo $T = 2\pi/\omega$ : in tale periodo l'oggetto compie un'oscillazione completa, che lo riporta alla posizione (relativa) di partenza. La posizione di equilibrio dell'oscillazione si ha quando la lunghezza della molla è pari alla lunghezza di riposo, cioè quando l'oggetto si trova al bordo del carrello, come nella situazione considerata. Il tempo necessario è allora $t' = T/4$. Il centro di massa del sistema, che è isolato, si muove sempre con la stessa velocità, che è pari a quella iniziale, cioè pari a $v_0$. Da qui la soluzione]

------------------------------------------------------------------------------------------------ **TERMODINAMICA**

4. Una quantità $n$ (incognita) di gas perfetto **biatomico** compie un ciclo termico **reversibile** composto dalla seguente successione di trasformazioni: isocora A→B, espansione isoterma B→C, compressione isobara C→A. Si sa che: $P_B = 2P_A$ e $V_C = 2V_B = 2V_A$. I soli dati noti del problema sono: $P_A = 1.00\times10^5$ Pa e $V_A = 1.66\times10^{-5}$ m$^3$. [La costante dei gas perfetti vale $R = 8.31$ J/(K mole); può fare comodo sapere che $ln(2) \sim 0.693$]

a) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, $\eta$ del ciclo?

$\eta =$ ……………………………… ~ …….. $1 - 7/(5+4ln(2)) \sim 0.099$ [si ha per definizione $\eta = 1 + Q_{ced}/Q_{ass}$. Nella trasformazione isocora si ha aumento di pressione, dato che $P_B = 2P_A$, e dunque di temperatura. Quindi il calore viene assorbito in A→B. Analogamente il calore viene assorbito nella B→C, che è un'espansione. Nella compressione isobara, invece, il calore viene ceduto. Dunque si ha: $\eta = 1 + Q_{CA}/(Q_{AB} + Q_{BC})$. D'altra parte, usando le definizioni di calore specifico molare e la legge dei gas perfetti, deve essere: $Q_{CA} = nc_P(T_A - T_C) = (c_P/R)(P_AV_A - P_CV_C) = (c_P/R)P_A(V_A - V_C) = (c_P/R)P_AV_A(1-2) = -(c_P/R)P_AV_A$. Inoltre $Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = (c_V/R)(P_BV_B - P_AV_A) = (c_V/R)V_A(P_B - P_A) = (c_V/R)P_AV_A(2-1) = (c_V/R)P_AV_A$. Infine, ricordando che per una isoterma è $Q = L$, si ha $Q_{BC} = nRT_B ln(V_C/V_B) = P_BV_B ln(2) = 2P_AV_A ln(2)$. Di conseguenza, ricordando che per un gas perfetto biatomico è $c_V = (5/2)R$ e $c_P = c_V + R = (7/2)R$, si ottiene la soluzione]

b) Sapendo anche che $n = 1.00\times10^{-2}$ moli, quanto valgono la temperatura minima $T_{LOW}$ e la temperatura massima $T_{HIGH}$ raggiunte dal gas durante il ciclo? E quanto varrebbe l'efficienza $\eta_C$ di una macchina di Carnot che lavorasse fra queste due temperature?

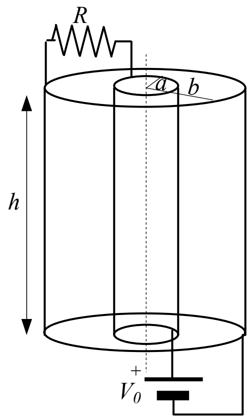
$T_{LOW} =$ …………………………………… = ……… K $P_AV_A/(nR) = 20.0$ K

$T_{HIGH} =$ …………………………………… = ……… K $2T_A = 40.0$ K [è facile determinare $T_{LOW} = T_A = P_AV_A/(nR)$ e $T_{HIGH} = T_B = 2T_A$]

$\eta_C =$ …………………………………… = ......... $1 - T_{LOW}/T_{HIGH} = ½$ [dall'analisi della macchina di Carnot; notate che l'efficienza della macchina proposta nell'esercizio è meno di un 1/5 l'efficienza della macchina di Carnot che lavora fra le stesse due temperature!]

------------------------------------------------------------------------------------------------ **PARTE 3**

5. Un dispositivo elettronico, comunemente denominato "cavo coassiale", è costituito da due elementi cilindrici e coassiali l'un l'altro, fatti entrambi di materiale **ottimo conduttore**. In particolare, il sistema è fatto da un cilindro pieno e omogeneo di raggio $a = 1.0$ mm (elemento centrale), che è racchiuso in un guscio cilindrico sottile di raggio $b = 1.0$ cm (elemento esterno); lo spazio compreso tra i due elementi, che sono entrambi lunghi $h = 1.0$ m, è vuoto. Come rappresentato in figura, un estremo del cavo coassiale è collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 1.0\times10^2$ V, collegato con il suo polo positivo all'elemento centrale e con quello negativo all'elemento esterno. L'altro estremo del cavo è chiuso su un resistore elettrico di resistenza $R = 75$ ohm collegato fra i due elementi. [Supponete che il sistema si trovi in condizioni stazionarie; notate che, essendo gli elementi molto più "lunghi" che "larghi", gli effetti ai bordi possono essere sicuramente trascurati; usate $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto e $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto. Non spaventatevi: è normale che le risposte numeriche diano risultati piccolini…]




Disegno non in scala!!!

a) Discutete per benino, in brutta, perché c'è o non c'è, dove si trova e quanto vale (se c'è) un eccesso di carica elettrica $Q$ sull'elemento centrale (il cilindro pieno di raggio $a$).[Può farvi comodo sapere che $ln(10) \sim 2.3$]

Discussione: …………………………… In condizioni stazionarie nel sistema circola una corrente elettrica, di intensità $I = V_0/R$, che scorre verso l'alto (di figura) nell'elemento centrale e verso il basso (di figura) nel guscio esterno. A questa corrente **non** è associato alcun eccesso di carica (la corrente elettrica può essere vista come un flusso di cariche di segno opposto in verso opposto, per cui globalmente gli elementi restano neutri). Però tra due punti qualsiasi dell'elemento interno e dell'elemento esterno esiste una differenza di potenziale $\Delta V = -V_0$ (il segno negativo tiene conto del fatto che stiamo considerando la differenza di potenziale tra un punto posto a $r = b$ e un punto posto a $r = a$), Il sistema ha simmetria cilindrica, dunque il campo elettrico, se esiste, è radiale (punta verso l'esterno del sistema per come sono scelti i segni del generatore). Pertanto, dalla $\Delta V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b E dr$ si evince che deve esistere un campo elettrico. Essendo la simmetria cilindrica, tale campo elettrico deve essere generato da carica elettrica che si trova nell'elemento centrale. In condizioni stazionarie, ci si aspetta che la carica si distribuisca sulla superficie del cilindro di raggio $r = a$. Inoltre, dato che il materiale di cui è costituito il cilindro è un ottimo conduttore, non ci sono cadute di potenziale "lungo" il cilindro, per cui la differenza di potenziale citata prima è sempre $\Delta V$ per tutta la lunghezza del sistema e la carica è distribuita in modo omogeneo su tutta la superficie del cilindro (se non lo fosse non sarebbero più trascurabili gli effetti ai bordi!)

$Q =$ …………………………………… ~ .......... C $2\pi\varepsilon_0 hV_0/ln(b/a) \sim 2.4\times10^{-9}$ C [applicando il teorema di Gauss a una scatola di forma cilindrica coassiale con il sistema e della stessa lunghezza di esso, e di raggio $a<r<b$ , si ha (notando che il contributo al flusso è dato solo dalle linee di campo che attraversano la



SEGUE

superficie laterale della scatola): $E2\pi rh = Q/\varepsilon_0$, cioè $E(r) = Q/(2\pi rh\varepsilon_0)$. Inserendo questa dipendenza funzionale nell'integrale per la differenza di potenziale scritto sopra si ottiene, con pochi passaggi: $V_0 = Q\ln(b/a)/(2\pi\varepsilon_0 h)$ , da cui la soluzione]

b) Come si scrivono le espressioni per il campo elettrico *E(r)* e per il campo magnetico *B(r)* in funzione della distanza *r* dall'asse del sistema nella regione $a<r<b$? [Dovete scrivere delle **funzioni** di *r*, per cui **non** usate valori numerici!]

$E(r) =$ …………………………………… $V_0/(r\ln(b/a))$ [vedi sopra]

$B(r) =$ …………………………………… $\mu_0 V_0/(2\pi rR)$ [vista la simmetria del sistema, il campo magnetico è come quello di un filo percorso dalla corrente $I = V_0/R$, da cui, ricordando il teorema di Ampere, la risposta]

c) Quanto vale e che direzione e verso ha la forza **complessiva** $\boldsymbol{F}$ che agisce sull'elemento esterno (il guscio di raggio $r=b$)? [L'aggettivo **complessiva** significa che dovete considerare **tutti** i possibili contributi di forza che vi potete aspettare in questo tipo di problema…]

$F =$ …………………………………… = ……… N $V_0^2 h(\mu_0/(2\pi bR^2) - 2\pi\varepsilon_0/(b\ln(b/a))) \sim 1.1\text{x}10^{-5}$ N [ci sono due distinti contributi di forza, il primo di natura elettrica (elettrostatica) e il secondo di natura magnetica (magnetostatica). La forza elettrica è causata dal fatto che i due elementi, in condizioni stazionarie, recano cariche di segno opposto. In particolare, l'elemento esterno (il guscio) porterà una carica $-Q=-2\pi\varepsilon_0 hV_0/\ln(b/a)$, la quale risentirà della forza dovuta al campo elettrico dovuto a alla presenza della carica $Q$ sull'elemento interno (il cilindro). Tale forza ha direzione radiale e punta verso l'interno (le cariche di segno opposto si attraggono!). La sua espressione, tenendo conto di quella del campo elettrico data alla risposta a punto b) e notando che la carica dell'elemento esterno si trova tutta al raggio $r=b$ (e quindi calcolando il campo elettrico per $r = b$), è: $F_{ELE} = - V_0^2 2\pi\varepsilon_0 h/(b \ln(b/a))^2$, dove il segno negativo indica che la forza punta verso l'asse del sistema. Inoltre, dato che sul guscio esterno passa una corrente, distribuita uniformemente, di intensità $I = V_0/R$ e che sulla regione di spazio dove passa la corrente, cioè per $r=b$ , insiste il campo magnetico $B(r=b)$ generato dalla corrente che scorre nell'elemento interno, ci sarà anche una forza di origine magnetica. Tale forza, dovendo essere ortogonale alla direzione assiale (quella della corrente) e alla direzione tangenziale (quella del campo), sarà diretta radialmente. La regola della mano destra permette di stabilirne il verso, che punta verso l'esterno del sistema, dunque è opposto a quello della forza di natura elettrica. L'espressione della forza magnetica si ottiene dalla legge $d\boldsymbol{F}_M = I\, d\boldsymbol{l}\text{x}\boldsymbol{B}$ , che vale per un elementino di lunghezza $dl$ del guscio esterno e che, essendo l'elemento $d\boldsymbol{l}$ e il campo magnetico ortogonali fra loro (come già notato), ha modulo: $dF_M = (V_0/R)(\mu_0 V_0/(2\pi bR))dl$, dove abbiamo esplicitato l'intensità della corrente $I = V_0/R$ e usato l'espressione del campo magnetico trovata nella risposta al punto b), calcolandola per $r=b$. Questa forza infinitesima va quindi integrata sull'intera lunghezza del sistema, cioè, essendo essa indipendente dall'asse, l'elementino di lunghezza $dl$ va sostituito con la lunghezza $h$, da cui $F_M = V_0^2\mu_0 h/(2\pi bR^2)$. Sommando i due contributi di forza si ottiene la risposta]

Direzione e verso: ……………………………… radiale, verso l'esterno del sistema (cioè il guscio tende ad "allargarsi", vedi sopra)

d) Quanto vale il flusso $\Phi(\boldsymbol{S})$ del vettore $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\text{x}\boldsymbol{B}/\mu_0$ calcolato sulla sezione del sistema, cioè sulla corona circolare di raggio interno *a* e raggio esterno *b*? [Per vostra informazione, il vettore $\boldsymbol{S}$ si chiama vettore di Poynting; notate che nella sua definizione c'è un prodotto **vettoriale** tra campo elettrico e campo magnetico; per il calcolo del flusso nella simmetria del problema, può esservi utile ricordare che l'elemento di superficie in simmetria "circolare" (la simmetria cilindrica tagliata da un piano ortogonale all'asse) si esprime $dA = 2\pi rdr$, che rappresenta l'area di una coroncina circolare di spessore infinitesimo $dr$ e raggio generico $r$]

$\Phi(\boldsymbol{S}) =$ …………………………………… = ……… W $\int_a^b (V_0^2/(2\pi Rr^2\ln(b/a)))2\pi rdr = (V_0^2/R\ln(b/a))\int_a^b (1/r)dr = V_0^2/R = 1.3\text{x}10^2$ W [il vettore $\boldsymbol{S}$ , essendo dato dal prodotto vettoriale del campo elettrico, radiale, e del campo magnetico, tangenziale, ha direzione assiale. Il suo verso, dato dalla regola della mano destra, è orientato verso l'alto della figura. Il suo modulo, essendo i vettori di partenza ortogonali tra loro, si ottiene semplicemente moltiplicando i moduli dei campi $E(r)$ e $B(r)$ trovati in precedenza (ricordandosi di dividere per $\mu_0$ , come da definizione!), cioè: $S(r) = V_0^2/(2\pi Rr^2\ln(b/a))$. Notate che questa espressione è una funzione di $r$, per cui nel calcolo del flusso va esaminato attentamente l'integrale. Il flusso, notando che questo vettore e la normale alla superficie su cui si calcola il flusso sono paralleli (stiamo ponendo positivo il flusso quando il campo vettoriale è orientato verso l'alto), è dato dall'integrale di superficie $\int S(r)\, dA$ , con $dA = 2\pi rdr$ , come suggerito dal testo. Si ottiene quindi la soluzione. Notate che le unità di misura del flusso del vettore di Poyting sono quelle di una potenza e il suo significato è proprio quello di potenza "trasferita" dal generatore alla resistenza (dove c'è dissipazione per effetto Joule)]

---

**Nota**: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 7/7/2011 Firma:



SEGUE