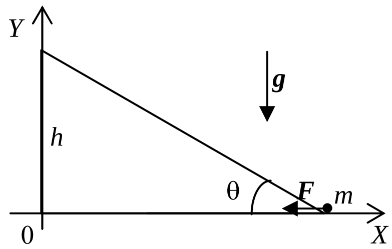
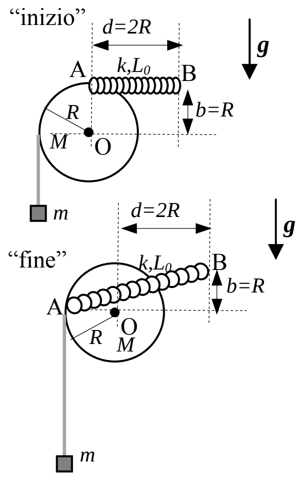
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 19/9/2011

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Un oggetto puntiforme di massa m = 0.10 kg si muove sotto l'effetto di una forza **disomogenea *F***, creata chissà come. Questa forza è diretta **orizzontalmente** e la sua componente X dipende dalla posizione secondo la legge: $F_X = -F_0 x/h$, con F_0 = 2.0 N (valore costante e uniforme), x coordinata orizzontale dell'oggetto puntiforme rispetto al sistema di riferimento che sarà specificato fra breve e h = 2.0 m. Per effetto di questa forza l'oggetto sale lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m (è lo stesso h di prima!) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. La figura chiarisce la geometria del problema e mostra il sistema di riferimento che **dovete** usare: in particolare l'asse X è orizzontale, l'asse Y è verticale e l'origine si trova sullo "spigolo" in basso a sinistra del piano inclinato (vedi figura!). [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]
   a) Esiste una posizione di equilibrio per l'oggetto puntiforme sul piano inclinato? Se sì, quanto vale la quota y_{EQ} della posizione di equilibrio? [Usate, ovviamente, il sistema di riferimento indicato in figura e usate la geometria in modo appropriato]
   y_{EQ} = …………………………………… = ... m $h-h(mg/F_0)tg^2\theta = 0.67$ m [poiché l'intensità della forza diminuisce quando l'oggetto si muove verso l'alto del piano inclinato (la coordinata x diventa più piccola per come è stato scelto il sistema di riferimento), è a prima vista possibile che esista una posizione di equilibrio. All'equilibrio la somma delle forze sull'oggetto deve annullarsi, e questo deve verificarsi componente per componente. Le forze sull'oggetto sono il peso, verticale la forza ***F*** , orizzontale, e la reazione vincolare, diretta per definizione in direzione ortogonale al piano. Le componenti della reazione verticale (di modulo N) in direzione X e Y (rispetto al riferimento indicato) sono $N_X = N\sin\theta$ e $N_Y = N\cos\theta$. L'equilibrio lungo l'asse X richiede: $0 = F_X+N_X = -F_0x_{EQ}/h+N\sin\theta$; quello lungo l'asse Y: $0 = -mg+N\cos\theta$. Risolvendo si ottiene $x_{EQ}=hN\sin\theta/F_0 = hmg tg\theta/F_0$. A questo punto occorre determinare un legame, di tipo geometrico, tra la coordinata x e quella y per un punto che si trovi sul piano inclinato. Se consideriamo il triangolo rettangolo determinato dalla sezione del piano inclinato rappresentata in figura, possiamo notare che il "cateto orizzontale" ha lunghezza $b = h/tg\theta$ (per la trigonometria). Dunque la posizione di equilibrio trovata è tale che la sua distanza, misurata lungo X , rispetto al vertice "di destra" del triangolo è $b - x_{EQ} = h/tg\theta - htg\theta mg/F_0$. La coordinata y_{EQ} si trova moltiplicando questo valore per $tg\theta$, da cui la soluzione causa del legame geometrico tra le componenti dovuto alla presenza del piano, si ha $y_{EQ} = x_{EQ}tg\theta$, da cui la soluzione. Si noti che la posizione di equilibrio determinata si trova a una quota minore dell'altezza h del piano, dunque l'equilibrio si può effettivamente avere quando l'oggetto si trova sul piano, come da testo]
   b) Quanto vale il modulo della reazione vincolare N che la superficie del piano esercita sull'oggetto in condizioni di equilibrio?
   N = …………………………………… ~ ……… N $mg/\cos\theta \sim 1.1$ N [vedi sopra: si noti che il valore è costante e uniforme per ogni posizione sul piano inclinato]
   c) Supponete ora che inizialmente l'oggetto si trovi fermo alla base del piano inclinato (a quota y_0 = 0, per intenderci) con la forza ***F*** "spenta" e che a un certo istante la forza venga "accesa". Quanto vale il modulo della velocità v' con cui l'oggetto raggiunge la sommità del piano inclinato (a quota $y' = h$, per intenderci), se la raggiunge? [Ovviamente la forza ***F*** è sempre quella delle domande precedenti, cioè è disomogenea e ha quella specifica dipendenza dalla posizione espressa sopra]
   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(F_0h/(mtg^2\theta)-2gh)^{1/2} \sim 9.0$ m/s [essendo la forza disomogenea, occorre servirsi del bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K+\Delta U_G$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K = (m/2)v'^2$, quella di energia potenziale (gravitazionale) è $\Delta U_G = mgh$. Il lavoro della forza si calcola **ricordando** la definizione, che prevede la presenza di un prodotto scalare e di un integrale! Il prodotto scalare, dato che la forza ha componente solo orizzontale, seleziona la direzione X, quindi si ha $L_F = \int_{X0}^{x'} F dx$. La posizione "iniziale" lungo l'asse x corrisponde con la base del piano inclinato, cioè è $x0 = h/tg\theta$; la posizione "finale" corrisponde all'oggetto che si trova in cima al piano inclinato, ed è quindi x' = 0 (per la scelta del riferimento!). Quindi, tenendo conto anche dell'espressione della forza in funzione della posizione, l'integrale diventa $L_F = -(F_0/h) \int_{h/tg\theta}^{0} x dx = (F_0/h)(h/tg^2\theta)^2/2$. Da qui, mettendo tutto assieme, risolvendo e scegliendo la soluzione con il segno positivo per la velocità (se ne chiede il modulo!), si ottiene la soluzione. Notate che la soluzione presuppone di estrarre la radice quadrata di una grandezza che, per i dati del problema, è positiva: dunque la soluzione esiste e quindi l'oggetto raggiunge la sommità del piano inclinato]



2. Un cilindro pieno e omogeneo, di massa M = 6.0 kg e raggio R = 20 cm, è vincolato a ruotare attorno a un asse fisso che coincide con il suo asse geometrico. Sulla superficie laterale del cilindro è avvolta una fune di massa trascurabile un cui estremo è vincolato a una massa (puntiforme) $m = M/2$ = 3.0 kg: il sistema è montato in modo tale che quando il cilindro ruota la fune si srotola e la massa m si muove verticalmente. Si suppone che la fune non slitti sulla superficie del cilindro e che tutti gli attriti coinvolti nel movimento siano **trascurabili**. Come rappresentato in figura, su una delle facce del cilindro, in corrispondenza di un punto (indicato con A) sulla circonferenza, è fissato l'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 50 N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 2R$ = 40 cm. L'altro estremo della molla è vincolato a un punto che si trova nella posizione indicata con B in figura: la quota di tale punto, misurata rispetto al polo di rotazione (O in figura), vale $b = R$ = 20 cm, mentre la distanza rispetto a O della verticale tracciata da questo punto vale $d = 2R$ = 40 cm. La configurazione iniziale del sistema è quella mostrata nella figura in alto: tutto è fermo, a causa di una qualche forza esterna, la molla ha il suo asse in direzione orizzontale e si trova a lunghezza di riposo. Quindi il sistema viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla e, a un dato istante, raggiunge la configurazione della figura in basso, in cui si vede che il cilindro è ruotato di un quarto di giro e la massa si è spostata di conseguenza. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Quanto vale, in modulo, la velocità v della massa m nell'istante considerato?
   v = ……………………….. ~ ……. m/s $(gR\pi/2-(10^{1/2}-2)^2kR^2/(2m))^{1/2} \sim 1.6$ m/s [nel processo si conserva l'energia meccanica, non essendoci forze dissipative che compiono lavoro, per cui è $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia cinetica si esprime come $\Delta E_K = (m/2)v^2+(I/2)\omega^2 = (m/2)v^2+(2mR^2/2)v^2/R^2 = mv^2$, dove abbiamo notato che l'energia cinetica è dovuta alla massa che trasla con velocità v e al cilindro, che ha momento di inerzia $I = (M/2)R^2$ e che ruota con velocità angolare $\omega = v/R$ a causa del fatto che la fune non slitta sulla sua superficie. La variazione di energia potenziale è dovuta al lavoro della forza peso sulla massa m, $\Delta U_G = mg\Delta h = -mg\pi R/2$, dove abbiamo notato che quando il cilindro compie un quarto di giro la fune si è srotolata (e quindi la massa si è abbassata) di un tratto $\pi R/2$, e al lavoro della forza elastica, $\Delta U_{ELA} = (k/2)(L-L_0)^2$, dove abbiamo

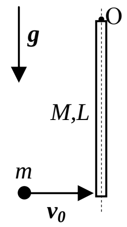
notato che la molla inizialmente non è né elongata né compressa e quindi l'energia elastica è nulla. La lunghezza L che la molla assume "alla fine" del processo si ottiene con il teorema di Pitagora: $L = ((d+R)^2+b^2)^{1/2}=((3R)^2+R^2)^{1/2} = 10^{1/2}R$, da cui, tenendo conto che $L_0 = d = 2R$, $\Delta U_{ELA} = (k/2)(10^{1/2}-2)^2R^2$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione. Notate che essa richiede di estrarre una radice quadrata: si sceglie la soluzione con il segno positivo perché viene richiesto il modulo e il fatto che il processo sia possibile con i dati del problema è conseguenza del fatto che l'argomento della radice viene positivo]

b) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione della massa calcolata all'istante "iniziale", a_{INI}, e a quello "finale", a_{FIN}, del processo? [Ovviamente l'istante iniziale è quello in cui il sistema inizia a muoversi, figura in alto, e l'istante finale è quello in cui è avvenuta la rotazione del cilindro per un quarto di giro, figura in basso]

a_{INI} = ……………………….. = ……….. m/s^2 $g/2 = 4.9$ m/s^2 [il moto di traslazione della massa avviene sotto l'effetto della forza peso, diretta verso il basso (segno positivo), e della tensione della fune (segno negativo), cioè è sempre $a = g-T/m$. La rotazione del cilindro avviene sotto l'effetto dei momenti della tensione della fune, che provoca rotazione in senso antiorario (positivo) e della forza elastica, che provoca rotazione in senso orario (negativo) dato che la molla è elongata. Pertanto l'equazione del moto rotazionale del cilindro si scrive $\alpha = (\tau_T - \tau_{MOLLA})/I = (TR- \tau_{MOLLA})/(mR^2)$, dove τ_{MOLLA} indica il momento delle forze prodotto dalla forza elastica. Le due equazioni danno luogo a un sistema a cui va aggiunta l'equazione di tipo cinematico che lega fra loro le accelerazioni. Infatti, dato che la fune non slitta sulla superficie del cilindro, si ha $\alpha = a/R$. All'inizio la molla **non** è elongata, dunque la forza elastica è nulla e nullo è anche il suo momento. Dunque dall'equazione del moto rotazionale si ottiene $T = ma$, che, sostituita nell'equazione del moto traslazionale della massa, conduce alla soluzione]

a_{FIN} = ……………………….. ~ ……….. m/s^2 $g/2 -(1-2/10^{1/2})kR/(2m) \sim 4.3$ m/s^2 [in queste condizioni la molla è elongata ed esercita una forza di modulo $k(L-L_0) = (10^{1/2}-2)kR$, secondo quanto stabilito sopra. Il momento di questa forza si calcola, in modulo, moltiplicando per il braccio, che vale $R\sin\phi$. L'angolo ϕ è quello formato dalla direzione orizzontale (la congiungente OA) e l'asse della molla (la congiungente AB): da semplici considerazioni di trigonometria si vede che esso è tale che $\sin\phi = R/L = 10^{-1/2}$. Dunque il momento della forza elastica vale in modulo, nell'istante considerato, $\tau_{MOLLA} = (1-2/10^{1/2})kR^2$. Ponendo questo termine nell'equazione del moto rotazionale e risolvendo il sistema si ottiene la soluzione, dove si vede che l'accelerazione è diminuita rispetto al valore iniziale]

3. Un "pendolo balistico" è realizzato con una sottile asta omogenea di lunghezza L = 1.0 m e massa M = 30 kg che è libera di ruotare con attrito trascurabile attorno a un asse O passante per un suo estremo (il piano di rotazione è verticale, come indicato in figura). Un proiettile puntiforme di massa m = 0.10 kg = $M/300$ viene sparato con velocità **orizzontale** di modulo v_0 = 2.0 m/s in modo da colpire l'estremità "libera" (non imperniata) dell'asta. In seguito all'urto, il proiettile resta **conficcato** nell'asta e si osserva che il sistema asta+proiettile si mette a ruotare attorno all'asse fino a raggiungere un valore massimo θ_{MAX} dell'angolo tra asse dell'asta e verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



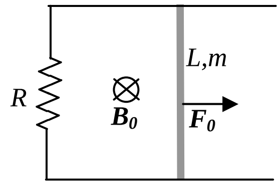
a) Quanto vale θ_{MAX}? In brutta dovete spiegare **in modo chiaro** quale procedimento usate, se ci sono grandezze meccaniche del sistema che si conservano nel processo di urto e nel processo di rotazione dell'asta, e perché eventualmente si conservano. Può essere conveniente usare delle approssimazioni che tengano conto dei valori numerici dei parametri del problema, in particolare del rapporto tra le masse.

θ_{MAX} ~ …………………………………… ~ ………. rad $\arccos(1-3mv_0^2/(MgL)) \sim 0.090$ rad [il processo può essere suddiviso in due fasi: l'urto, che si può supporre istantaneo ed evidentemente anelastico, e la rotazione, che si può supporre avvenga con attrito trascurabile. A causa della presenza del perno (asse di rotazione) che permette la rotazione del sistema e può fornire forze impulsive, l'unica grandezza che si conserva nell'urto è il momento angolare totale. Subito prima dell'urto esso è associato al solo moto del proiettile e si esprime come mv_0L (la lunghezza dell'asta è il "braccio"della quantità di moto); subito dopo l'urto il sistema si mette in rotazione con velocità angolare ω e conviene esprimere il momento angolare come $I_{TOT}\omega$, dove I_{TOT} è il momento di inerzia complessivo del sistema dato dalla somma del momento di inerzia per rotazione dell'asta omogenea di massa M e lunghezza L attorno a un asse passante per un suo estremo, $ML^2/3$, e del momento di inerzia per la rotazione (moto tangenziale o circolare) del proiettile di massa m lungo una circonferenza di raggio pari alla lunghezza dell'asta L, mL^2. Si ha quindi $I_{TOT}=(M/3+m)L^2 \sim ML^2/3$, dove l'approssimazione è consentita dal rapporto tra le masse dato dal testo. Dalla conservazione del momento angolare si trova quindi la velocità angolare che il sistema acquista subito dopo l'urto: $\omega \sim 3mv_0/(ML)$. Tale velocità angolare può essere considerata come la velocità iniziale (di rotazione) del sistema nella seconda fase del processo. In questa fase, vista l'assenza di attriti, si conserva l'energia meccanica del sistema, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G$. La variazione di energia cinetica, dato che alla fine del processo il sistema si trova (istantaneamente) fermo, è $\Delta E_K = -(I_{TOT}/2)\omega^2 \sim -(ML^2/6)(3mv_0/(ML))^2 = (3/2)mv_0^2$. La variazione di energia potenziale è invece dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta e del proiettile. Lavorando di trigonometria, è facile rendersi conto che $\Delta U_G = Mg(L/2)(1-\cos\theta_{MAX}) + mgL(1-\cos\theta_{MAX}) = g(1-\cos\theta_{MAX})(M/2+m) \sim Mg(L/2)(1-\cos\theta_{MAX})$, dove abbiamo fatto la solita approssimazione sulle masse del sistema. Risolvendo si ottiene: $\cos\theta_{MAX} \sim 1-3mv_0^2/(MgL)$, da cui la soluzione. Notate che lo spostamento angolare che risulta dal calcolo numerico è piccolo, meno di 5 gradi]

b) Chiamato t_0 = 0 l'istante dell'urto (che avviene istantaneamente), quanto vale l'istante t_{MAX} a cui il sistema raggiunge l'angolo θ_{MAX} di cui sopra? [Attenzione: la soluzione richiede di capire che tipo di movimento compie il sistema e di fare ragionevoli assunzioni basate sul fatto che il valore di θ_{MAX} è "piccolo"…]

t_{MAX} ~ …………………………………… ~ ………. s $\pi/(2(3g/(2L))^{1/2}) \sim 0.41$ s [il sistema asta+proiettile si comporta come un cosiddetto "pendolo fisico". Il sistema ammette quindi delle soluzioni di tipo moto armonico, in cui la coordinata (angolare) θ varia nel tempo secondo una legge armonica, del tipo $\theta(t) = A\cos(\omega t+\Phi)$, con ω **pulsazione** (attenzione! Non è la velocità angolare dell'asta!) e A e Φ da determinare secondo le condizioni iniziali del problema. Come si può dimostrare facilmente, il moto è armonico solo nel caso delle "piccole oscillazioni", cioè quando il valore dell'angolo rimane sempre sufficientemente "piccolo". Queste sono effettivamente le condizioni del problema: infatti l'angolo θ_{MAX} , che è il valore **massimo** dello spostamento angolare, è, come più volte affermato, sufficientemente minore di un radiante da poter ritenere ragionevole l'approssimazione di piccole oscillazioni. In queste condizioni è facile rendersi conto che il tempo necessario perché il sistema passi dalla sua posizione di equilibrio all'ampiezza angolare massima vale un quarto del periodo di oscillazione armonica, cioè $t_{MAX} = T/4 = \pi/(2\omega)$. Il problema si riduce allora a calcolare la pulsazione ω. Questo può essere fatto scrivendo l'equazione del moto angolare per il sistema: $\alpha = \tau/I_{TOT} = -(mgL+MgL/2)\sin\theta/I_{TOT} \sim -(MgL/2)\sin\theta/(ML^2/3)$, dove abbiamo usato la solita approssimazione dovuta al rapporto tra le masse. Per piccole oscillazioni $\sin\theta \sim \theta$, da cui si vede che si ottiene proprio l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = (3g/(2L))^{1/2}$. Da qui la soluzione (ovviamente approssimata, viste le varie assunzioni che abbiamo fatto)]

4. Un circuito elettrico è costituito dagli elementi rappresentati in figura: una barretta di materiale ottimo conduttore di lunghezza L = 10 cm e massa m = 50 g che può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale, mantenendo contatto elettrico con due guide fisse e rigide, anch'esse di materiale conduttore. Le due guide sono collegate tra loro attraverso un resistore elettrico con resistenza R = 1.0 kohm. Un campo magnetico esterno, **uniforme, costante** e di modulo B_0 = 5.0 T, attraversa il piano su cui si muove la barretta (la figura mostra che $\boldsymbol{B_0}$ "entra nel foglio"). La barretta è sottoposta all'azione di una **forza costante e uniforme $\boldsymbol{F_0}$** prodotta da un operatore esterno e diretta orizzontalmente come in figura e di modulo F_0 = 2.0x10^{-3} N; tale forza provoca il movimento della barretta nella stessa direzione e verso.



a) Individuate il verso della corrente elettrica I che viene indotta nel circuito per effetto del movimento della barretta e spiegate **per benino** in brutta perché si genera tale corrente.

Verso della corrente e spiegazione : …………………………………………… quando la barretta si mette in moto, sui portatori di carica in esso contenuti si genera una forza magnetica. Supponendo in prima approssimazione che la velocità delle cariche sia uguale a quella della barretta e ricordando l'espressione della forza magnetica (di Lorentz), $\mathbf{F}_M = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, si ottiene che le cariche positive vengono spinte verso l'alto della barretta (rispetto alla figura): dunque la corrente indotta è antiorario (rispetto alla figura). Un modo alternativo, ma concettualmente analogo, si basa sulla legge di Faraday, e in particolare sul segno negativo che vi compare (aspetto noto anche come legge di Lenz). Il sistema reagisce in modo da annullare la variazione di flusso di campo magnetico esterno dovuta al movimento. Quando la barretta si muove, l'area racchiusa dalla "spira" determinata da barretta e resto del circuito tende ad aumentare e quindi il flusso, riferito al verso del campo magnetico esterno indicato in figura, tende anche a crescere. Per opporsi a questa crescita occorre che si determini per induzione un campo magnetico di verso opposto a quello esterno. Per la regola della mano destra tale campo corrisponde a una corrente indotta che si muove in senso antiorario (rispetto alla figura).

b) Come si scrive l'equazione del moto $a(t)$ della barretta nelle condizioni dell'esercizio? [Dovete determinare l'accelerazione della barretta lungo la direzione orizzontale: **non** usate valori numerici per la risposta, ma servitevi dei parametri letterali del problema]

$a(t)$ = …………………………………………… $(F_0-B_0^2L^2v(t)/R)/m$ [come già illustrato nella risposta al quesito precedente, nel circuito viene indotta una corrente di intensità I. Tale corrente, quando passa attraverso la barretta, interagisce con il campo magnetico esterno dando luogo a una forza $\mathbf{F}$ che va poi sommata settorialmente alla forza esterna $\mathbf{F_0}$ per determinare l'equazione del moto. Per un clementino di lunghezza $\mathbf{dl}$ della barretta, la forza risultante è $\mathbf{dF} = I\mathbf{dl}\times\mathbf{B_0}$; il contributo di forza di ogni clementino è omogeneo e vale, a causa dell'ortogonalità fra barretta e campo magnetico, $dF = IB_0dl$; dunque la forza complessiva (sull'intera barretta), che si ottiene integrando, è in modulo $F = IB_0L$. Per la regola della mano destra tale forza risulta orizzontale (in figura) e diretta verso sinistra, dunque in senso opposto alla forza esterna $\mathbf{F_0}$. L'equazione del moto è quindi $a = (F_0-IB_0L)/m$, avendo scelto come positivo il verso diretto nella destra della figura. La corrente I è non costante, e va quindi esplicitata. Essa si può trovare lavorando con la legge di Faraday e tenendo conto che la resistenza del circuito è R. Si ha quindi (in valore assoluto, dei segni abbiamo già tenuto conto nel determinare il verso della corrente): $I = (1/R)d\Phi(\mathbf{B_0})/dt = B_0Lv(t)/R$, dove $v(t)$ è la velocità della barretta, ovviamente **non** costante e uniforme (per cui anche l'intensità di corrente dipende dal tempo), e abbiamo osservato che il flusso del campo magnetico esterno varia solo per effetto dello spostamento della barretta. Sostituendo si ottiene $F = B_0^2L^2v/R$, da cui la risposta]

c) Supponete ora che a un dato istante la velocità della barretta venga ad essere v' = 2.0 m/s; quanto vale, in questo preciso istante, la potenza P' "dissipata" per effetto Joule dal resistore?

P' = …………………………………………… = ………… W $B_0^2L^2v'^2/R = 1.0\times10^{-3}$ W [per definizione la potenza dissipata è pari a RI^2. Usando l'espressione sopra trovata per I e calcolandola per la velocità v' si ottiene $I' = B_0Lv'/R$, da cui la soluzione]

d) Quanto vale, se esiste, la velocità massima v_{MAX} che la barretta può raggiungere? [Occhio: guardate bene l'equazione del moto che avete determinato al quesito b)…]

v_{MAX} = …………………………………………… = ………… m/s $RF_0/(B_0^2L^2)$ = 8.0 m/s [l'equazione del moto determinata sopra è quella di un moto sotto l'effetto combinato di un'accelerazione costante (dovuta alla forza $\mathbf{F_0}$) e di una forza opposta al movimento e dipendente in modo lineare dalla velocità, cioè formalmente analoga alla forza di attrito viscoso. Infatti l'equazione del moto si può riscrivere come: $a(t) = F_0/m-(\beta/m)v$, con $\beta = B_0^2L^2/R$, evidentemente maggiore di zero. In queste condizioni, che sono quelle, per esempio, del paracadutista che si butta sotto l'azione della gravità, si ha una velocità limite quando l'accelerazione si annulla. La velocità limite v_{MAX} soddisfa allora l'equazione $0 = F_0-B_0^2L^2v_{MAX}/R$, da cui la soluzione]

5. Un campione di n = 0.200 moli di un gas perfetto monoatomico compie la seguente successione di trasformazioni espansione isoterma **irreversibile** A→B, compressione isobara **reversibile** B→C, isocora **reversibile** C→A. Si sa che nel punto A il gas si trova a temperatura T_A = 300 K e volume V_A = 1.00 litri; inoltre si sa che $V_B=2V_A$ e che nell'isoterma **irreversibile** A→B il gas assorbe una quantità di calore Q_{AB} = 300 J. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la variazione di entropia ΔS_{AB} per la trasformazione A→B? [State attenti! La trasformazione considerata è irreversibile, dunque per essa potrebbe non valere la consueta legge di stato delle isoterme…; ricordate però che la variazione di entropia è una funzione di stato e spiegate per bene, in brutta, il procedimento adottato. Può farvi comodo sapere che $ln(2)$ ~ 0.693]

ΔS_{AB} = …………………………………… ~ ……… J/K $nRln(2)$ ~ 1.15 J/K [poiché per definizione la variazione di entropia, essendo una funzione di stato, è indipendente dal percorso prescelto per passare da uno stato all'altro, deve essere $\Delta S_{AB}=\Delta S_{AC}+\Delta S_{CB}$. Queste due variazioni di entropia si riferiscono a trasformazioni reversibili, di cui si sa tutto. Ad esempio, tenendo conto che si tratta di un'isocora e di un'isobara, si ha: $\Delta S_{AC}=nc_Vln(T_C/T_A)$ e $\Delta S_{CB}=nc_Pln(T_B/T_C)$, con $c_V=3R/2$ e $c_P=5R/2$, calori specifici molari del gas perfetto monoatomico a volume e pressione costante, rispettivamente. Sfruttando le (a voi note!) proprietà della funzione logaritmo, si ha dunque: $\Delta S_{AB}=nR((3/2)ln(T_C/T_A)+(5/2)ln(T_B/T_C))= nR(ln(T_C/T_A)^{3/2}+ln(T_B/T_C)^{5/2})= nRln((T_C/T_A)^{3/2}(T_B/T_C)^{5/2})=nRln(T_B/T_C)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che A→B è isoterma, per cui $T_B=T_A$. La soluzione si trova infine notando che $T_B/T_C=V_B/V_C=V_B/V_A=2$. Alla stessa soluzione si può giungere anche notando che, pur se irreversibile, l'isoterma A→B congiunge due stati che possono essere in ogni caso uniti da una isoterma reversibile, dato che la temperatura iniziale resta uguale a quella finale. Per un'isoterma reversibile si ha $\Delta S_{AB,REV}=Q_{AB,REV}/T_A=L_{AB,REV}/T_A=nRln(V_B/V_A)=nRln(2)$ e, dato che sulla base di quanto abbiamo affermato, è $\Delta S_{AB}=\Delta S_{AB,REV}$, si ri-ottiene lo stesso risultato]

b) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, η del ciclo?

η = …………………………………… = …….. $1-(nc_PT_A/2)/(Q_{AB}+nc_VT_A/2)$ = 0.0749 [nel ciclo il calore viene assorbito nell'espansione isoterma irreversibile e nell'isocora, e ceduto nella compressione isobara. Per definizione è $\eta = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}=1+Q_{BC}/(Q_{AB}+Q_{CA})$. Si ha inoltre $Q_{CA}=nc_V(T_A-T_C)=nc_VT_A(1-T_C/T_A)=nc_VT_A(1-T_C/T_B)=nc_VT_A(1-V_C/V_B)=nc_V(1-V_A/V_B)=nRT_A/2$, dove abbiamo usato il fatto che $T_B=T_A$ (isoterma) e che la B→C è un'isobara reversibile. Si ha anche $Q_{BC}=nc_P(T_C-T_B)=nc_P(T_C-T_A)=-nc_PT_A/2$, dove abbiamo ragionato in modo simile. Da qui la soluzione]

c) Quanto varrebbe l'efficienza, o rendimento, η' del ciclo se la trasformazione A→B fosse un'isoterma **reversibile**? [Notate che, in questo caso, il calore assorbito nella trasformazione A→B non avrebbe più lo stesso valore Q_{AB} citato prima nel testo!]

η'= …………………………………… ~ …….. $(ln(2)-1/2)/(ln(2)+3/4)$ ~ $0.134-(nc_PT_A/2)/(Q_{AB}+nc_VT_A/2)$ = 0.287 [l'espressione generale è analoga alla precedente, solo che in questo caso il calore scambiato nella trasformazione isoterma sarebbe $Q_{AB,REV}=L_{AB,REV}=nRT_Aln(V_B/V_A)=nRT_Aln(2)$. Da qui, esplicitando c_v e c_P e semplificando il semplificabile, la soluzione. nel ciclo il calore viene assorbito nell'espansione isoterma irreversibile e nell'isocora, e ceduto nella compressione isobara. Per definizione è $\eta = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}=1+Q_{BC}/(Q_{AB}+Q_{CA})$. Si ha inoltre $Q_{CA}=nc_V(T_A-T_C)=nc_VT_A(1-T_C/T_A)=nc_VT_A(1-T_C/T_B)=nc_VT_A(1-V_C/V_B)=nc_V(1-V_A/V_B)=nRT_A/2$, dove abbiamo usato il fatto che $T_B=T_A$ (isoterma) e che la B→C è un'isobara reversibile. Si ha anche $Q_{BC}=nc_P(T_C-T_B)=nc_P(T_C-T_A)=-nc_PT_A/2$, dove abbiamo ragionato in modo simile. Da qui la soluzione. Notate che questa efficienza è maggiore di quella del ciclo che comprende la trasformazione irreversibile a causa essenzialmente del fatto che abbiamo assunto, non so quanto realisticamente, che il calore scambiato nell'isoterma irreversibile, e quindi il lavoro da essa svolto, fosse minore che nel caso reversibile]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/9/2011 Firma: