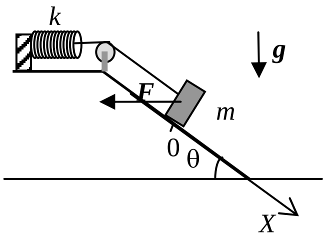
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 13/1/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un blocchetto **puntiforme** di massa $m = 5.0$ kg può scorrere su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il blocchetto è attaccato, tramite una corda inestensibile di massa trascurabile, a una molla di costante elastica $k = 49$ N/m il cui altro estremo è vincolato ad muretto fisso, rigido e indeformabile. La figura rappresenta schematicamente il sistema considerato (la piccola puleggia attorno a cui passa la corda ha massa trascurabile e **non** partecipa alla dinamica del sistema). Supponete trascurabile ogni forma di attrito. Per la soluzione del problema dovete usare il riferimento (asse X) indicato in figura: esso è diretto come il piano inclinato e orientato verso il basso. Inoltre, esso è centrato nella posizione che sarà identificata nel seguito dell'esercizio. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



a) Inizialmente una forza esterna $\boldsymbol{F}$ di direzione orizzontale, verso come in figura e modulo incognito, è applicata al blocchetto. In queste condizioni il sistema è in **equilibrio** e la molla è alla propria **lunghezza di riposo.** Quanto vale il modulo F della forza esterna? [Notate che la lunghezza di riposo L_0 della molla non si conosce, ma è comunque diversa da zero]

F = …………………………………… ~ ………… N $mgtg\theta \sim 28$ N [per l'equilibrio lungo il piano inclinato deve essere $mgsin\theta = Fcos\theta$, da cui la soluzione; notate che, nelle condizioni specificate (molla a lunghezza di riposo), non ci sono altre forze attive lungo la direzione considerata]

b) Supponete ora che la forza esterna $\boldsymbol{F}$ venga rimossa in modo istantaneo: come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del blocchettino in queste condizioni? **Dovete** usare il riferimento stabilito prima, centrandolo, cioè ponendo la sua origine, nella posizione di cui al punto precedente, quella in cui **la molla si trova alla propria lunghezza di riposo**. [Non usate valori numerici per questa risposta, ma limitatevi a scrivere una **funzione** della posizione generica x del blocchetto, nella quale compaiano i simboli letterali con cui si identificano le grandezze note del problema]

$a(x)$ = …………………………………… $gsin\theta - (k/m)x$ [sul blocchettino agiscono la componente "attiva" della forza peso, che fornisce un'accelerazione $gsin\theta$ positiva, cioè diretta verso il basso, e la tensione della corda, che comparirà con un segno negativo essendo diretta verso l'alto (per $x > 0$, la molla si allunga rispetto alla lunghezza di riposo e quindi la tensione della corda tende a far "risalire" il blocchetto sul piano inclinato). La forza elastica è proporzionale alla elongazione (o compressione) della molla. Per la scelta dello zero dell'asse di riferimento, è evidente che l'elongazione (o compressione) è pari a x. Poiché la corda "trasferisce" la forza della molla sul blocchetto, si ha la soluzione]

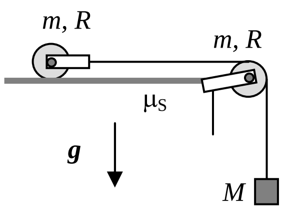
c) In seguito alla rimozione della forza esterna $\boldsymbol{F}$, si osserva che il blocchettino prende a scendere lungo il piano inclinato (immaginate che la sua lunghezza sia tale che il blocchettino non raggiunge la base del piano inclinato), finché a un certo istante si ferma. Quanto vale la distanza d che esso percorre sul piano inclinato prima di fermarsi?

d = …………………………………… = ………… m $2mgsin\theta/k = 1.0$ m [viene dal bilancio energetico o conservazione dell'energia meccanica, che si ha per l'assenza di attriti: $0=\Delta U_{ELA} + \Delta U_G = (k/2)d^2 - mgdsin\theta$, dove abbiamo notato che $\Delta E_K = 0$ perché è fermo all'inizio e all'istante considerato. Lo stesso risultato si può ottenere in modo più complicato e "contoso" risolvendo l'equazione del moto. Infatti il moto del blocchettino è armonico e dà luogo a oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio $x_{EQ} = mgsin\theta/k$ (si ottiene ponendo pari a zero l'accelerazione). La semiampiezza A delle oscillazioni, determinata dalle condizioni iniziali, vale in modulo $A = x_{EQ} - x_0 = x_{EQ}$, dove abbiamo notato che inizialmente il blocchettino si trova nella posizione $x_0 = 0$ (per come abbiamo costruito il riferimento!). L'arresto avverrà dunque nella posizione $x_{EQ} + A = 2x_{EQ}$, che conduce allo stesso risultato trovato con il bilancio energetico]

d) Quanto vale l'accelerazione a del blocchetto quando questo si ferma (avendo percorso la distanza d)? [Indicate anche il segno rispetto al riferimento usato]

a = …………………………………… = ………… m/s^2 $gsin\theta - (k/m)\, d = -\, gsin\theta = -\,4.9$ m/s^2 [notate che il blocco **non** si ferma nella sua posizione di equilibrio, ma subito dopo essersi fermato risale verso l'alto, dato che il moto è armonico. Notate anche che questa accelerazione è opposta rispetto a quella che si ha all'inizio. Infatti posizione iniziale e finale corrispondono ai due estremi dell'oscillazione]

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa $m = 5.0\text{x}10^{-1}$ kg e raggio $R = 10$ cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro dotato di coefficiente di attrito $\mu_S = 0.50$. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione (attorno al proprio asse) con attrito trascurabile; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare senza attrito attorno al proprio asse, la fune termina con una massa $M = 1.0$ kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune **non slitta** sulla gola della puleggia. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Inizialmente il rullo è tenuto fermo da una causa esterna che poi viene rimossa ed il rullo si mette quindi in movimento. Quanto vale la velocità v_{CM} che possiede il suo centro di massa dopo uno spostamento $\Delta s = 5.0$ m? [Osservate che il rullo si muove di rotolamento puro e che la fune non slitta sulla puleggia!]

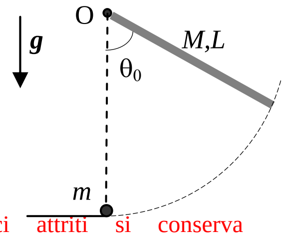
v_{CM} = …………………………………… = ………… m/s $(Mg\Delta s/(m+M/2))^{1/2} = (g\Delta s)^{1/2} = 7.0$ m/s [per il bilancio energetico, che, tenendo conto dell'inestensibilità della fune, del moto di rotolamento puro e del non slittamento fra fune e puleggia, si scrive: $Mg\Delta s = (m/2)v_{CM}^2+(M/2)v_{CM}^2+(I/2)\omega^2 + (I/2)\omega^2 = v^2_{CM}(m/2+M/2+I) = v^2_{CM}(m/2+M/2+I/R^2) = v^2_{CM}(m/2+M/2+m/2)$, dove si è anche sfruttato che, per un cilindro omogeneo in rotazione attorno al suo asse, si ha $I = (m/2)R^2$]

b) Quanto vale la forza di attrito F_A che si esercita tra piano orizzontale e rullo in condirzioni di rotolamento puro? Commentate in brutta sulla possibilità che le condizioni del problema conducano davvero al rotolamento puro.

F_A = ... = ... N $(mg/2)(M/(M+2m)) = mg/4 = 1.2$ N   [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa M, nelle condizioni del problema si hanno le seguenti equazioni del moto: $ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_A R$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2 R - T_1 R$; $Ma = Mg - T_2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha = a/R = \alpha_{PULEGGIA}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

Commento: .... La forza di attrito massima che può essere esercitata al contatto tra rullo e piano scabro vale $F_{A,MAX} = \mu_s N = \mu_S mg = 2.45$ N. Poiché questo valore è maggiore della forza di attrito trovata alla risposta precedente, il rotolamento puro è possibile nelle condizioni del problema

3. Un'asta sottile e omogenea di massa $M = 0.10$ kg e lunghezza $L = 30$ cm è imperniata a un suo estremo (O in figura) in modo da poter ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile**. Inizialmente l'asta viene mantenuta ferma nella posizione di figura (l'angolo rispetto alla verticale vale $\theta_0=\pi/3$) da una qualche causa esterna che a un dato istante viene improvvisamente rimossa: l'asta si mette dunque in movimento con velocità angolare iniziale nulla. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3)=1/2$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



a) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta quando essa passa per verticale (θ=0)?

ω = ... = ... rad/s $(3g/(2L))^{1/2}= 7.0$ rad/s   [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U_G$, con $\Delta E_K = (I/2)\omega^2$ (inizialmente l'asta è ferma) e $\Delta U_G = -Mg(L/2)(1-cos\theta_0)=-MgL/4$, dato che la variazione è dovuta al cambio di quota del centro di massa dell'asta, che, essendo essa omogenea, si trova a metà della sua lunghezza. Essendo per un'asta omogenea sottile che ruota attorno a un perno passante per un suo estremo $I = (M/3)L^2$, si ottiene la soluzione

b) Supponete ora che, esattamente quando l'asta passa per la posizione di equilibrio, il suo estremo "in basso" (quello non imperniato) urti **elasticamente** un oggetto puntiforme di massa $m = M/6$ il quale, essendo inizialmente fermo, è libero di muoversi su un piano orizzontale in seguito all'urto**.** Discutete per bene, in brutta, quali grandezze si conservano nell'urto e calcolate la velocità angolare ω' dell'asta **subito dopo** l'urto.

Discussione: .... l'urto è elastico e dunque si conserva per defizione l'energia cinetica del sistema. Inoltre esso non è isolato, a causa della presenza del perno in O che può trasferire forze impulsive sull'asta, per cui non si conserva la quantità di moto totale. Tuttavia, scegliendo come polo proprio il punto O, si vede che le forze esterne (impulsive, la forza peso fa comunque effetto trascurabile nella breve durata dell'urto) non producono momento, per cui si conserva il momento angolare (assiale) rispetto a tale polo.

ω'= .... = ... rad/s $-\omega/5$=- 1.4 rad/s [la conservazione dell'energia cinetica totale del sistema implica: $(I/2)\omega^2 = (I/2)\omega'^2 + (m/2)v'^2$, con v' velocità dell'oggetto puntiforme subito dopo l'urto. La conservazione del momento angolare implica: $I\omega = I\omega' + mv'L$, dove abbiamo notato che, essendo la direzione di moto dell'oggetto orizzontale, esso dopo l'urto contribuisce con un termine $mv'L$ al momento angolare totale. Esplicitando il momento di inerzia dell'asta e usando la relazione data nel testo tra le masse con le dovute semplificazioni, le due equazioni si riscrivono come: $\omega^2 = \omega'^2+v'^2/(6L^2)$ e $2\omega = 2\omega' + v'/L$. Da quest'ultima si ottiene $v' = 2L(\omega-\omega')$ che, introdotta nell'altra equazione (quella che viene dalla conservazione dell'energia), porta alla seguente equazione algebrica di secondo grado: $5\omega'^2-4\omega'\omega-\omega^2 = 0$. Questa equazione ha due soluzioni, una delle quali, da scartare perché non significativa (significherebbe che non c'è stato urto!) è ω'=ω, mentre l'altra è quella riportata nella risposta. Notate che il segno negativo indica che l'asta prende a ruotare in verso opposto rispetto alla discesa, cioè "rimbalza" e risale]

4. Una certa quantità (incognita) di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza di trasformazioni **reversibili**: compressione isoterma A → B, compressione isobara B → C, espansione isoterma C → D, compressione adiabatica D → A. I dati noti del ciclo sono: $V_A = 9.00$ litri, $V_B = 2V_A/3$ e $V_C = V_B/4$. Si sa inoltre che l'espansione isoterma C → D avviene mantenendo il gas a contatto termico con un termostato costituito da un'enorme massa di acqua e ghiaccio fondente mescolati ed in equilibrio termico fra loro. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

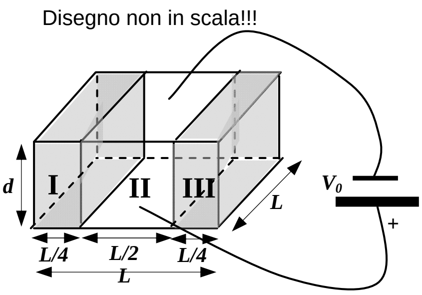
a) Quanto vale il volume V_D occupato dal gas nel punto D del ciclo?

V_D = ... = ... m^3 $V_A(T_A/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(T_B/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A((T_D V_B/V_C)/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(V_B/V_C)^{3/2} = 8V_A = 7.20\text{x}10^{-2}$ m^3 [si usano le leggi di isobara e adiabatica reversibile, notando che $T_A = T_B$ e $T_C = T_D$ e che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V = 5/3$]

b) Sapendo che nell'espansione isoterma C → D viene solidificata una massa $m = 100$ g di acqua (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_F = 3.33\text{x}10^5$ J/kg), quanto vale il numero di moli n del gas Elio che partecipa alla trasformazione? [Può farvi comodo sapere che $ln(48) \sim 3.87$]

n = ... ~ .... moli $m\,\lambda_F/(RT_F ln(V_D/V_C)) \sim 3.79$ moli   [il calore ceduto dal gas nell'espansione serve per far passare alla fase solida la massa m d'acqua, operazione che richiede una quantità $Q = m\lambda_F$ di calore; si noti che la trasformazione avviene, come stabilito nel testo, mantenendo il gas alla temperatura di fusione dell'acqua $T_F = 273$ K]

5. Un condensatore ad armature piane e parallele è formato da due armature quadrate, di lato $L = 10$ cm, affacciate una di fronte all'altra a una distanza $d = 1.0$ mm (come si vede, la geometria è tale da poter trascurare gli "effetti ai bordi" e ritenere "piana" la simmetria del problema). Tra le armature si trovano due elementi di materiale debolmente conduttore omogeneo, dotato di resistività $\rho_C = 1.0\text{x}10^4$ ohm m. I due elementi, che hanno la forma di parallelepipedi di altezza d, larghezza $L/4$ e profondità L, sono disposti come rappresentato in figura (zone ombreggiate): in pratica, essi toccano le due armature nel senso dell'altezza, riempono completamente lo spazio tra le armature nel senso della profondità, e parzialmente nel senso della larghezza, dove si osserva che rimane vuota di materiale



una regione di larghezza $L/2$ (simmetrica rispetto alla mezzeria del sistema). La presenza dei due elementi di materiale debolmente conduttore determina quindi una suddivisione in tre regioni dello spazio fra le armature: le regioni I e III (vedi figura) sono piene di materiale, la regione II è vuota. Il condensatore è collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 1.0x10^2 V come mostrato in figura.

a) Quanto vale, in modulo, il campo elettrico E_I, E_{II}, E_{III} che si misura in condizioni stazionarie (di equilibrio) nelle tre regioni di spazio? [**Spiegate per bene** in brutta il procedimento adottato]

E_I = …………………………………… = ……. V/m V_0/d =1.0x10^5 V/m [essendo trascurabili gli effetti ai bordi, cioè valendo l'ipotesi di sistema a simmetria piana, si ha che i campi elettrici sono ortogonali alle armature e uniformi all'interno delle varie regioni. In queste condizioni il modulo del campo elettrico si trova dalla definizione operativa di differenza di potenziale. Notate che, nel fare questo, non ci sono differenze tra le varie regioni, dato che la differenza di potenziale esistente tra le armature, all'equilibrio, è sempre la stessa indipendentemente dalla regione considerata. Quindi il campo elettrico vale sempre V_0/d in tutte le tre regioni] l'equazione del moto del centro di massa recita $\boldsymbol{a_{CM}} = \Sigma \boldsymbol{F} / \Sigma m$. Eseguendo la sommatoria vettoriale sulle forze si ottiene zero essendo le cariche di segno opposte. Da qui la risposta]

E_{II} = …………………………………… = ……. V/m E_I =1.0x10^5 V/m

E_{III} = …………………………………… = ……. V/m E_I =1.0x10^5 V/m

b) Quanto vale la potenza P erogata dal generatore in condizioni stazionarie (di equilibrio)?

P = …………………………………… = ……… W $V_0^2L^2/(2\rho_C d)$ = 5.0 W [il generatore eroga potenza per permettere il passaggio di corrente all'interno dei materiali conduttori. Vista la simmetria piana del problema, la resistenza elettrica R di ognuno dei due pezzettini può essere determinata come $R = \rho_C Z/S$, dove Z ed S sono rispettivamente la lunghezza del tratto percorso dalla corrente, che vale d, e la superficie del flusso di corrente, che è pari alla superficie di base dei parallelepipedi, cioè vale $L^2/4$. Si ha quindi: $R = 4\rho_C d/L^2$. I due elementi sono evidentemente attraversati dalla corrente in parallelo. Quindi la resistenza totale vale $R_{TOT} = R/2 = 2\rho_C d/L^2$. La potenza vale $P = V_0^2\ I = V_0^2/R_{TOT}$, da cui la soluzione]

c) Supponete ora che a t_0 = 0 il generatore venga istantaneamente disconnesso dal condensatore (dopo che questo era stato "caricato" fino a raggiungere condizioni stazionarie – di equilibrio). Quanto vale, in modulo, la differenza di potenziale V' che si misura tra le armature all'istante t' = 88 ns? [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, che vale per tutti gli elementi del sistema, e ricordate cosa significa il prefisso "n" nell'unità di misura! Per il segno della carica, considerate l'armatura originariamente collegata al polo positivo del generatore]

V' = …………………………………… ~ ……… V $V_0 e^{-t'/(2\rho_C\varepsilon_0)} = V_0 e^{-1/2}$ ~ 61 V [dopo che il generatore è stato disconnesso, il sistema non si trova più in condizioni stazionarie e il condensatore inizia il suo processo di scarica dovuto al fatto che la carica originariamente presente sulle armature tende a "ricombinarsi" (neutralizzarsi) passando attraverso gli elementi conduttori. Dal punto di vista circuitale, si tratta in pratica di un condensatore di capacità C che si "scarica" attraverso una resistenza R_{TOT}. Il tempo caratteristico di scarica si esprime come $\tau = R_{TOT}C = (2\rho_C d/L^2)(\varepsilon_0 L^2/d) = 2\rho_C\varepsilon_0$, dove abbiamo usato l'espressione per la capacità di un condensatore piano parallelo con armature di superficie L^2 (la presenza dei materiali conduttori non modifica il comportamento del condensatore, dato che, come dimostrato sopra, non cambia l'espressione o il valore del campo elettrico tra le armature) e distanza d. La carica presente sulle armature varia secondo la funzione: $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$, con $Q_0 = CV_0$ carica inizialmente presente sulle armature (all'istante t_0 = 0). La differenza di potenziale vale $V(t) = Q(t)/C = V_0 e^{-t/\tau}$., da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 13/1/2012 Firma: