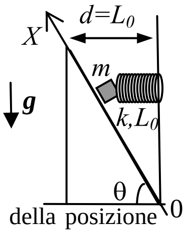
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 2/2/2012

Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

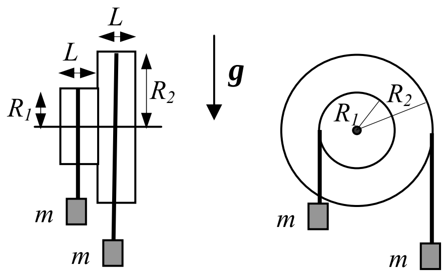
*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g può scivolare con attrito trascurabile lungo un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Sull'oggetto agisce la forza di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 9.8 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm il cui altro estremo può scorrere lungo una guida verticale, come indicato in figura. L'aggeggio è realizzato in modo tale che **l'asse della molla rimanga sempre orizzontale** qualsiasi sia la posizione dell'oggetto, cioè la molla si muove assieme all'oggetto senza cambiare la sua inclinazione. La distanza tra la guida della molla e la base del piano inclinato è $d = L_0$ (vedi figura). Nella soluzione **dovete** usare il sistema di riferimento indicato, costituito da un asse X parallelo al piano inclinato, orientato verso l'alto e con origine alla base del piano inclinato. [Ricordate che g = 9.8 m/s^2 e $cos(\pi/3)$=1/2 e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



   a) Come si scrive l'equazione del moto dell'oggetto, cioè qual è la funzione $a(x)$ che esprime l'accelerazione in funzione della posizione (generica) x dell'oggetto rispetto all'asse dato? [Dovete scrivere una funzione: **non** usate valori numerici, ma riferitevi alle grandezze del problema con i simboli letterali dati nel testo; la funzione che scrivete deve valere finché l'oggetto si trova sul piano inclinato]
   $a(x)$ = …………………………………… $-gsin\theta - (kcos^2\theta/m)x + (kcos\theta/m)L_0$ [considerando la sola direzione del moto, che è quella dell'asse X, sull'oggetto agisce la componente $-mgsin\theta$ della forza peso, orientata verso il basso (da cui il segno negativo) e la componente della forza elastica $|F_{ELA}|cos\theta$. Il modulo della forza elastica è $|F_{ELA}| = k|L-L_0| = k(L_0-L)$, dove abbiamo notato che la molla è sempre compressa (cioè la sua lunghezza è sempre minore della lunghezza di riposo). Dalla trigonometria si vede che $L = xcos\theta$, dove x indica la coordinata dell'oggetto nel sistema considerato, per cui la componente della forza elastica si scrive $k(L_0-xcos\theta)cos\theta$. Da qui la soluzione]
   b) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_{EQ} che il piano inclinato esercita sull'oggetto quando esso si trova nella posizione di equilibrio, se esiste?
   N_{EQ} = …………………………………… ~ ………… N $mg(cos\theta+tg\theta) \sim$ 1.1 N   [la reazione vincolare del piano inclinato serve a bilanciare le componenti delle forze in direzione ortogonale al piano stesso. Tali componenti, che sono $mgcos\theta$ e $|F_{ELA}|sin\theta$, devono essere sommate tra di loro, dato che in entrambi i casi le forze "spingono contro" il piano inclinato. Nella posizione di equilibrio deve essere $|F_{ELA}|cos\theta = mgsin\theta$, cioè $|F_{ELA}| = mgtg\theta$. Da qui la soluzione]
   c) Supponete ora che all'istante t_0 = 0 l'oggetto venga fatto partire con velocità iniziale nulla dalla sommità del piano inclinato. Quanto vale la velocità v' che esso possiede quando raggiunge la posizione di equilibrio, se esiste? In quale istante t' la raggiunge, se la raggiunge?
   v' = …………………………………… ~ ………… m/s $-A\omega=-(L_0tg\theta-L_0/cos\theta+mgsin\theta/(kcos^2\theta))(kcos^2\theta/m)^{1/2}$ $=-(L_0(sin\theta-1)+mgsin\theta/(kcos\theta))(k/m)^{1/2} \sim$ 1.5 m/s   [l'equazione del moto scritta alla soluzione del punto a) indica che l'oggetto si muove di moto armonico, con pulsazione $\omega = (kcos^2\theta/m)^{1/2}$. Il moto armonico si svolge attorno alla posizione di equilibrio $x_{EQ} = L_0/cos\theta - mgsin\theta/(kcos^2\theta) \sim$ 0.83 m (dunque esiste!), come si trova facilmente imponendo $a(x_{EQ}) = 0$. Le leggi orarie di posizione e velocità scritte tenendo conto delle condizioni iniziali proposte (e facendo riferimento all'asse dato) sono, come si può facilmente determinare: $x(t) = Acos(\omega t+\phi)+x_{EQ}$ e $v(t)=-\omega Asin(\omega t+\phi)$, con ϕ = 0 (viene immediatamente notando che la velocità è nulla all'istante iniziale) e $A = x_0-x_{EQ} = L_0tg\theta-x_{EQ}$, dove abbiamo notato che la posizione iniziale, espressa nel riferimento dato, è $dtg\theta = L_0tg\theta$. Nell'istante in cui l'oggetto passa per la posizione di equilibrio si ha $cos(\omega t') = 0$, cioè $sin(\omega t')=1$, da cui la soluzione, dove abbiamo anche esplicitato la posizione di equilibrio secondo quanto appena affermato]
   t' = …………………………………… = ………… m/s $\pi/(2\omega)$ = 0.11 s   [come appena scritto, il passaggio per la posizione di equilibrio avviene per la prima volta nell'istante tale che $\omega t' = \pi/2$, da cui la soluzione. Notate che l'intervallo di tempo corrisponde a un quarto di periodo, come ci si poteva aspettare considerando il tipo di moto esaminato]

2. Una puleggia "a doppio raggio" è costituita da due dischi pieni, di raggio R_1 = 10 cm e $R_2 = 2R_1$, liberi di ruotare **senza attrito** attorno al loro asse (parallelo al suolo) rimanendo **solidali** fra loro. I due dischi hanno lo stesso spessore L = 5.0 cm, e sono fatti dello stesso materiale solido **omogeneo**; il disco di raggio R_1 ha massa $M_1 = m$ = 10 kg, mentre la massa del disco di raggio R_2 è M_2 (incognita). Attorno ai due cilindri sono avvolte due funi inestensibili di massa trascurabile, che entrambe sono attaccate a due blocchetti (puntiformi) di massa m = 10 kg liberi di muoversi in direzione verticale. La figura rappresenta le viste "laterale" e "frontale" del sistema. [Nella soluzione supponete che le funi **non slittino** sulla superficie laterale dei dischi e usate g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



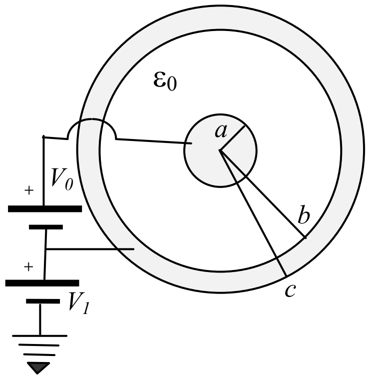
Vista "laterale"   *Vista "frontale"*

   a) Quanto vale il modulo della tensione T_2 della corda avvolta sul cilindro 2?
   T_2 = …………………………………… = ………… N $25mg/46$ = 53 N [la prima osservazione da fare è che, nonostante le masse appese alle funi siano uguali, il sistema **non** è in equilibrio. Infatti se così fosse le due tensioni varrebbero entrambi mg (in modulo), ma, essendo diversi i bracci rispetto all'asse della puleggia, sarebbero diversi i momenti delle forze e la puleggia si metterebbe in rotazione avvolgendo o svolgendo le funi (dunque mettendo in movimento anche i blocchetti). Per la soluzione è necessario scrivere le quazioni del moto rotazione (puleggia) e traslazionale (blocchetti). Scegliamo un sistema di riferimento tale che la rotazione è positiva in senso orario, e le masse traslano rispetto a un asse che è orientato verso il basso nel lato della fune avvolta sulla puleggia di raggio 2 e verso l'alto nell'altro lato. Si vede facilmente che questo sistema di riferimento ha segni "concordi" per descrivere il moto di tutto il sistema. Le equazioni del moto si scrivono allora, con ovvio significato dei termini (e indicando i moduli di forze e accelerazioni): $\alpha = (T_2R_2-T_1R_1)/I_{TOT}$, con I_{TOT} momento di inerzia della puleggia; $a_1 = T_1/m - g$; $a_2 = g-T_2/m$. Poiché le funi non slittano sulle gole della puleggia, si ha $\alpha = a_2/R_2 = a_1/R_1$ (notate che le accelerazioni dei due blocchetti sono diverse anche in modulo!). Inoltre è $I_{TOT} = I_1+I_2 = mR_1^2/2+m(R_2^2/R_1^2)R_2^2/2 = 17mR_1^2/2$ dove abbiamo notato che, essendo i dischi omogenei, dello stesso materiale e spessore, la massa del disco di raggio R_2 è maggiore di m per un fattore pari al rapporto tra le superfici di base dei dischi stessi. Il sistema di cinque equazioni e cinque incognite costituito dalle tre equazioni del moto e dalle due equazioni di relazione tra le accelerazioni può essere risolto per T_2 ottenendo la risposta riportata in soluzione (per il calcolo conviene usare la relazione tra masse e raggi dei dischi!)]
   b) **Supponete** ora che a un certo istante tutto il sistema si trovi fermo e che in questo stesso istante la fune 2 venga tagliata: il blocchetto che vi era attaccato cade in terra "per conto suo", mentre il blocchetto attaccato alla fune 1 comincia a scendere facendo ruotare la puleggia. Quanto vale il modulo v della velocità del bloccetto quando questo è sceso di un tratto Δh = 10 cm rispetto alla posizione di partenza?

v = ... ~ .... m/s $(4g\Delta h/19)^{1/2}$ ~ 0.45 m/s [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = -mg\Delta h + (m/2)v^2 + (I_{TOT}/2)\omega^2$; dove $I_{TOT} = 17mR_1^2/2$ (vedi sopra). Inoltre, dato che la fune non slitta sulla superficie del cilindro, la velocità della massa è legata alla velocità angolare della puleggia dalla relazione geometrica $\omega = v/R_1$. Mettendo tutto insieme si trova la soluzione]

3. Un oggetto di massa M = 1.0 kg si muove con attrito trascurabile su un piano orizzontale. A un dato istante esso possiede una velocità diretta lungo l'asse X di questo piano, di verso positivo e modulo V_0 = 0.50 m/s. A questo stesso istante l'oggetto viene colpito da un proiettile di massa $m = M/4$ che possiede una velocità diretta lungo l'asse Y, di verso negativo e modulo $v_0 = 5V_0$. L'urto può essere considerato **totalmente anelastico**.
   a) Come è diretta la velocità ***V'*** che il sistema oggetto+proiettile conficcato assume **subito dopo l'urto**? Esprimente tale direzione calcolando $tg\theta$**'**, cioè la tangente dell'angolo che la direzione di ***V'*** forma rispetto all'asse X del riferimento. [State attenti a indicare anche il segno!]
   $tg\theta'$ = ... = ... $-mv_0/(MV_0)$ = -5/4 = -1.25 [nel sistema considerato non si conserva l'energia cinetica, perché l'urto è anelastico, ma si conserva la quantità di moto totale, perché il sistema è isolato almeno nelle direzioni X e Y rilevanti per il moto, lungo le quali non agiscono forze esterne. Lungo l'asse X si ha quindi: $MV_0 = (M+m)V'_X$. Lungo l'asse Y si ha invece: $-mv_0 = (M+m)V'_Y$, dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione della velocità del proiettile. Essendo per ovvi motivi geometrici $tg\theta' = V'_Y/V'_X$ si ottiene la soluzione]
   b) Quanto vale la variazione ΔE_K dell'energia cinetica **totale** (dell'intero sistema) nel processo di urto?
   ΔE_K = ... = ... J $-mM(V_0^2+v_0^2)/(2(M+m)) = -13V_0^2/5$ = -0.65 J [l'energia cinetica iniziale è data dalla somma delle energie cinetiche dei due oggetti: $(m/2)v_0^2+(M/2)V_0^2$. Quella finale tiene conto del movimento del sistema proiettile+oggetto, e si scrive $((M+m)/2)V'^2$. D'altra parte, secondo quanto discusso nella risposta al punto precedente, $V'^2=V'^2_X+V'^2_Y=(M^2V_0^2+m^2v_0^2)/(M+m)^2$. Da qui, con opportuni rimaneggiamenti, si ottiene la soluzione]

4. Un dispositivo elettrico è costituito da una sfera di raggio a = 10 mm di materiale conduttore circondata da un guscio sferico spesso concentrico ad essa. Il guscio, che ha raggio interno b = 40 mm e raggio esterno c = 50 mm, è anche realizzato con materiale conduttore. Ci sono poi due generatori di differenza di potenziale (rispettivamente V_0 = 50 V e V_1 = 2.0x10^2 V) collegati come in figura: il primo generatore è collegato tra la sfera interna (polo positivo) e guscio esterno (polo negativo). Inoltre il polo negativo è anche attaccato al polo positivo dell'altro generatore, il cui polo negativo è collegato a terra. [Supponete che il sistema abbia raggiunto una situazione di **equilibrio**, cioè che i generatori siano stati collegati moltissimo tempo prima di quando si esegue l'osservazione dell'esercizio; i fili di collegamento non disturbano la "simmetria sferica" del sistema; usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]



   a) Quanto vale la carica Q_a che, all'equilibrio, si trova sulla sfera di raggio a?
   Q_a = ... = ... C $4\pi\varepsilon_0\ V_0/(1/a-1/b)$ = 7.4x10^{-11} C [applicando il teorema di Gauss a una scatola sferica di raggio $a<r<b$: si ottiene la nota espressione $E = Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Inoltre tra la sfera interna e il guscio deve esserci la differenza di potenziale determinata dal generatore V_0, cioè deve essere: $-V_0 = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b Edr = (Q_a/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/a)$, da cui la soluzione]
   b) Quanto vale la carica Q_c che si trova sulla superficie esterna (di raggio c) del guscio sferico?
   Q_c = ... = ... C $4\pi\varepsilon_0\ V_1/(1/c)$ = 1.1x10^{-9} C [occorre ragionare come nel caso precedente, tenendo stavolta in conto il fatto che la differenza di potenziale nota (vale $-V_1$) è tra il guscio esterno e un punto collocato a grande distanza, cioè all'infinito. Si ha dunque : $-V_1 = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_c^\infty Edr$. Stavolta il campo elettrico da considerare è quello che si misura all'esterno del guscio, cioè per $r>c$. Tale campo può essere facilmente determinato con Gauss, usando una scatola sferica di raggio $r>c$. Si trova $E=(Q_a+Q_b+Q_c)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove abbiamo tenuto conto che, all'interno della scatola usata, si trovano le cariche presenti sulla sfera e sulle due superfici del guscio.Ora, dato che nello spessore del guscio sferico (cioè per $b<r<c$) il campo deve essere nullo, dato che il materiale è conduttore e si trova all'equilibrio, si ha Q_a+Q_b = 0, per cui $E=Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Svolgendo l'integrale e calcolandolo con un estremo che tende all'infinito si ottiene la soluzione]
   c) Supponete che all'istante t_0 = 0 il generatore V_1 venga istantaneamente sostituito da un resistore elettrico R = 10 kohm. Quanto vale l'energia E dissipata per effetto Joule da questo resistore in un tempo molto lungo (virtualmente "infinito")?
   E = ... = ... J $Q_cV_1/2$= 1.1x10^{-7} J [quando il generatore viene sostituito dalla resistenza si attiva un processo di "scarica" del condensatore costituito dalla superficie sferica di raggio c. Infatti la presenza del resistore non modifica la condizione delle cariche che si trovano nella sfera centrale e sulla superficie di raggio b, per le quali continuano a valere le condizioni specificate sopra. Durante il processo di scarica, tutta la carica Q_c fluisce verso terra passando per il resistore, L'energia dissipata è dunque pari all'energia inizialmente immagazzinata in questo condensatore, che vale $Q_cV_1/2$, da cui la risposta]

5. Un campione di n = 0.200 moli di un gas perfetto monoatomico compie la seguente successione di trasformazioni espansione isoterma **irreversibile** A→B, compressione isobara **reversibile** B→C, isocora **reversibile** C→A. Si sa che nel punto A il gas si trova a temperatura T_A = 300 K e volume V_A = 1.00 litri; inoltre si sa che $V_B=2V_A$ e che nell'isoterma **irreversibile** A→B il gas assorbe una quantità di calore Q_{AB} = 300 J. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]
   a) Quanto vale la variazione di entropia ΔS_{AB} per la trasformazione A→B? [Può farvi comodo sapere che $ln(2)$ ~ 0.693]
   ΔS_{AB} = ... ~ .... J/K $nRln(2)$ ~ 1.15 J/K [poiché per definizione la variazione di entropia, essendo una funzione di stato, è indipendente dal percorso prescelto per passare da uno stato all'altro, deve essere $\Delta S_{AB}=\Delta S_{AC}+\Delta S_{CB}$. Queste due variazioni di entropia si riferiscono a trasformazioni reversibili, di cui si sa tutto. Ad esempio, tenendo conto che si tratta di un'isocora e di un'isobara, si ha: $\Delta S_{AC}=nc_Vln(T_C/T_A)$ e $\Delta S_{CB}=nc_Pln(T_B/T_C)$, con $c_V=3R/2$ e $c_P=5R/2$, calori specifici molari del gas perfetto monoatomico a volume e pressione costante, rispettivamente. Sfruttando le (a voi note!) proprietà della funzione logaritmo, si ha dunque: $\Delta S_{AB}=nR((3/2)ln(T_C/T_A)+(5/2)ln(T_B/T_C))= nR(ln(T_C/T_A)^{3/2}+ln(T_B/T_C)^{5/2})= nRln((T_C/T_A)^{3/2}(T_B/T_C)^{5/2})=nRln(T_B/T_C)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che A→B è isoterma, per cui $T_B=T_A$. La soluzione si trova infine notando che $T_B/T_C=V_B/V_C=V_B/V_A=2$. Alla stessa soluzione si può giungere anche notando che, pur se irreversibile, l'isoterma A→B congiunge due stati che possono essere in ogni caso uniti da una isoterma reversibile, dato che la temperatura iniziale resta uguale a quella finale. Per

un'isoterma reversibile si ha $\Delta S_{AB,REV}=Q_{AB,REV}/T_A=L_{AB,REV}/T_A=nR\ln(V_B/V_A)=nR\ln(2)$ e, dato che sulla base di quanto abbiamo affermato, è $\Delta S_{AB}=\Delta S_{AB,REV}$, si ri-ottiene lo stesso risultato]

b) Quanto vale l'efficienza, o rendimento, η del ciclo?

η = …………………………………… = …….. $1-(nc_PT_A/2)/(Q_{AB}+nc_VT_A/2) = 0.0749$ [nel ciclo il calore viene assorbito nell'espansione isoterma irreversibile e nell'isocora, e ceduto nella compressione isobara. Per definizione è $\eta = 1+Q_{CED}/Q_{ASS}=1+Q_{BC}/(Q_{AB}+Q_{CA})$. Si ha inoltre $Q_{CA}=nc_V(T_A-T_C)=nc_VT_A(1-T_C/T_A)=nc_VT_A(1-T_C/T_B)=nc_VT_A(1-V_C/V_B)=nc_V(1-V_A/V_B)=nRT_A/2$, dove abbiamo usato il fatto che $T_B=T_A$ (isoterma) e che la B→C è un'isobara reversibile. Si ha anche $Q_{BC}=nc_P(T_C-T_B)=nc_P(T_C-T_A)=-nc_PT_A/2$, dove abbiamo ragionato in modo simile. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 2/2/2012 Firma: