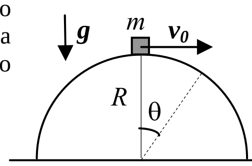
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 16/2/2012

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un oggetto **puntiforme** di massa m = 50 g è **appoggiato** su un profilo che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 50 cm. L'oggetto, che può scivolare con attrito trascurabile sulla superficie del profilo, è inizialmente fermo sulla sua sommità; a un certo istante viene messo in movimento con una (piccola) **velocità iniziale** diretta tangenzialmente rispetto alla circonferenza, orientata verso la destra della figura e di modulo v_0. [Ricordate che g = 9.8 m/s^2]



a) Supponendo che l'oggetto rimanga a contatto con la semicirconferenza durante la sua discesa, come si scrive la velocità $v(\theta)$ in funzione dell'angolo θ compreso tra "raggio vettore" che conduce all'oggetto e la verticale? [Come esempio, la figura mostra l'angolo θ per una posizione generica; poiché dovete scrivere una funzione **esplicita** di θ, non dovete usare valori numerici]

$v(\theta)$ = …………………………………… $(2gR(1-\cos\theta)+v_0^2)^{1/2}$ [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta E_K+\Delta U_G = (m/2)(v^2-v_0^2)-mgR(1-\cos\theta)$, dove abbiamo notato che l'ebergia potenziale cambia perché cambia la quota dell'oggetto e abbiamo espresso la variazione di quota in funzione dell'angolo θ. Portando al primo membro la v si ottiene la funzione richiesta nel testo]

b) Sempre nelle condizioni di cui al punto precedente, cioè supponendo che l'oggetto rimanga sulla semicirconferenza durante la sua discesa, come si scrive il **modulo** della reazione vincolare $N(\theta)$ che il profilo esercita sull'oggetto per una posizione generica θ? [Anche qui dovete scrivere una funzione **esplicita** di θ, e quindi non dovete usare grandezze numeriche. State attenti: l'oggetto si sta muovendo…]

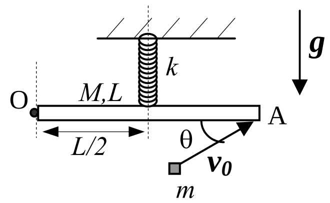
$N(\theta)$ = …………………………………… $mg\cos\theta - m(2gR(1-\cos\theta)+v_0^2)/R = mg(3\cos\theta-2)-mv_0^2/R$ [l'oggetto compie un moto circolare, per cui su di esso agisce un'accelerazione radiale (l'accelerazione centripeta) diretta verso il centro della circonferenza e di modulo pari a $a_C = v^2/R$, dove v è stato determinato sopra in funzione di θ. Le forze che agiscono in direzione radiale e che dunque possono creare tale accelerazione sono la forza di reazione vincolare, diretta verso l'esterno della circonferenza (l'oggetto è "appoggiato" sul profilo) e la componente radiale della forza peso, che vale $mg\cos\theta$ e è diretta verso il centro della circonferenza. Deve dunque essere: $a_C = v^2/R = -N/m+ g\cos\theta$, cioè $N = mg\cos\theta-mv^2/R$. Da qui, sostituendo l'espressione di v in funzione di θ trovata in precedenza, si ottiene la soluzione]

c) Supponete per questa domanda di sapere che, in modulo, è v_0 = 1.0 m/s. Per questo valore della velocità iniziale, è possibile che nella sua discesa l'oggetto rimanga **sempre**, cioè per ogni valore di θ compreso tra 0 e π/2, a contatto con il profilo? Se questo non si verifica, per quale valore angolare θ' avviene il distacco dell'oggetto dal profilo? Discutete brevemente in brutta e determinate l'eventuale valore di θ'.

Discussione: …………………………………. L'equazione trovata al punto precedente esprime il **modulo** della reazione vincolare che, come tale deve essere sempre positivo. Infatti per la scelta dei versi che abbiamo effettuato un segno negativo di N implicherebbe una reazione vincolare diretta verso il centro della circonferenza, cosa impossibile visto che l'oggetto è appoggiato (sopra) al profilo. La funzione trovata tende a diminuire al valore di θ: dunque il valore θ' sarà quello tale che l'equazione trovata alla soluzione del punto precedente si annulla

θ' = …………………………………… ~ ……….. rad $\arccos(2/3+v_0^2/(3Rg))$ ~ 0.75 rad ~ 43 gradi [si ottiene risolvendo quanto impostato nella discussione. Oltre questo valore angolare l'oggetto si stacca dal profilo ("parte per la tangente")]

2. Una sottile sbarretta rigida omogenea di massa M = 0.60 kg e lunghezza L = 20 cm è imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale attorno a un asse che passa per un suo estremo (punto O di figura). A metà della lunghezza della sbarretta è vincolato l'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 10 N/m che ha una certa lunghezza di riposo (non nulla, non nota!). L'altro estremo della molla è inchiodato a un solaio fisso, rigido e indeformabile. Nelle condizioni iniziali del problema la situazione è quella di figura: la sbarretta è in **equilibrio** avendo il suo asse in direzione orizzontale e la molla ha il proprio asse in direzione verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale l'allungamento Δ_0 della molla nelle condizioni descritte? Quanto vale, in modulo, la forza F che il perno esercita sulla sbarretta?

Δ_0 = …………………………………… = ……….. m Mg/k = 0.59 m [poiché la sbarretta è all'equilibrio, devono essere nulle le accelerazioni traslazionali (del centro di massa) e rotazionali (che conviene considerare per rotazioni attorno al polo O).. L'accelerazione angolare è nulla se sono nulli i momenti delle forze (che conviene calcolare rispetto al polo O). Le forze che fanno momento rispetto a tale polo sono la forza peso, applicata al centro di massa, cioè a metà della lunghezza della sbarretta, e tendente a far ruotare la sbarretta in senso orario, e la forza elastica, applicata nello stesso punto e tendente a far ruotare la sbarretta in senso antiorario (la molla deve essere estesa rispetto alla sua lunghezza di riposo). Essendo le due forze entrambi verticali e avendo lo stesso braccio, si ottiene che in modulo deve essere: $k\Delta\, L/2= MgL/2$, da cui la soluzione]

F = …………………………………… = ……….. N 0 N [la forza F potrebbe servire per garantire l'equilibrio traslazionale, che però nelle condizioni descritte è assicurato dalla sola forza elastica. Inoltre è evidente che non ci sono forze in direzione orizzontale, da cui la risposta]

b) Supponete ora che a un certo istante un proiettile puntiforme di massa $m = M/6$ = 0.10 kg, dotato di una velocità di modulo v_0 = 0.60 m/s diretta come in figura (l'angolo misurato rispetto all'orizzontale vale θ = π/6) colpisca l'estremo "libero" (il punto A) della barretta e vi rimanga conficcato istantaneamente. Si osserva che, in seguito all'urto, il sistema sbarretta+proiettile conficcato si mette in rotazione attorno al perno O. Discutete per benino, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano **nel processo di urto** e calcolate la velocità angolare ω del sistema **subito dopo l'urto**. [Ricordate che $\sin(\pi/6)$ = ½ e $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$ ~ 0.87]

Discussione: …………………………………. L'urto è anelastico, dunque non si conserva l'energia cinetica del sistema. Inoltre per la presenza del perno, che può esercitare forze impulsive sul sistema, non si conserva la quantità di moto totale. Infatti se essa si conservasse si avrebbe subito dopo l'urto un moto traslatorio dell'intero sistema nella stessa direzione di $\mathbf{v_0}$, cosa che invece non si verifica. Il momento angolare (calcolato rispetto al polo O), invece, si conserva: infatti le uniche forze impulsive che agiscono sul sistema sono quelle del perno (forza peso e forza elastica non sono impulsive, e quindi "non fanno in tempo” a produrre effetti nella breve durata dell’urto), che hanno braccio nullo rispetto a O. Dunque si conserva il momento angolare

ω = …………………………………… = ……….. rad/s $mv_0L\sin\theta/I_{TOT} = (M/6)v_0L\sin\theta/(ML^2/2) = v_0\sin\theta/(3L) = v_0/(6L)$ = 0.50 rad/s [sfruttiamo la conservazione del momento angolare. Subito prima dell’urto il momento angolare (assiale) ha modulo $mv_0L\sin\theta$, essendo dovuto al proiettile (la sbarretta è ferma) ed essendo $L\sin\theta$ il “braccio” della quantità di moto calcolata rispetto a O. Subito dopo l’urto conviene esprimere il momento angolare come $I_{TOT}\omega$, dato che si ha un unico corpo rigido esteso che va in rotazione (assiale). Il momento di inerzia I_{TOT} è dato dalla somma del momento di inerzia della sbarretta, $ML^2/3$ (è omogenea, sottile e ruota rispetto a un asse che passa per un suo estremo) e di quello del proiettile, mL^2, per cui $I_{TOT} = L^2(M/3+m) = L^2M(1/3+1/6)=ML^2/2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

c) Si osserva quindi che il sistema sbarretta+proiettile conficcato, messosi in rotazione a causa dell’urto, prosegue il suo movimento fino ad arrestarsi (istantaneamente) quando l’angolo formato tra asse della sbarretta e orizzontale vale ϕ tale che $\sin\phi$ = 0.10. Quanto vale, nell’istante in cui il sistema si arresta, l’allungamento Δ' della molla? [Considerate che la molla resta sempre elongata rispetto alla propria lunghezza di riposo; state attenti a usare per bene il suggerimento dato e a considerare la geometria del problema]

Δ' ~ …………………………………… ~ ……….. m $(\Delta_0^2 + (2/k)(I_{TOT}/2)\omega^2 -(m+M/2)gL\sin\phi))^{1/2} = (\Delta_0^2 + (2/k)(Mv_0^2/144 - 2MgL\sin\phi/3))^{1/2}$ = 0.57 m [nella fase successiva all’urto si conserva l’energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione di energia cinetica, essendo alla fine del processo il sistema sbarretta+proiettile ferma, è $\Delta E_K = (I_{TOT}/2)\omega^2$, con I_{TOT} e ω calcolati in precedenza. La variazione di energia potenziale è dovuta all’innalzamento della quota del centro di massa della barretta e del proiettile, che, sfruttando il suggerimento del testo, contribuiscono con i termini $Mg(L/2)\sin\phi$ e $mgL\sin\phi$, rispettivamente, e dalla compressione dell’energia della molla. Ricordando che l’energia elastica è $(k/2)\Delta L^2$, con ΔL elongazione (o compressione) della molla, mettendo tutto assieme e usando i risultati già trovati, si ottiene la soluzione]

d) Quanto vale, **approssimativamente**, il modulo dell’accelerazione angolare α' del sistema sbarretta+proiettile conficcato nell’istante in cui esso si ferma (istantaneamente)? [La risposta prevede di fare qualche approssimazione geometrica che dovreste discutere per benino in brutta]

α' ~ …………………………………… ~ ……….. rad/s^2 $(2MgL/3 - (k/4)\Delta' L)/I_{TOT} = (4g/(3L)-(k/2)\Delta'/(ML)) \sim 41$ rad/s^2 [nell’istante in cui il sistema si ferma, esso è soggetto al momento della forza peso e della forza elastica, i quali hanno segno opposto. Per l’equazione del moto rotazionale si ha $\alpha = \Sigma\tau/I_{TOT}$, con I_{TOT} già determinato. La forza peso agisce sul centro di massa della sbarretta con modulo Mg e sul proiettile con modulo mg. I bracci vanno in linea di principio calcolati tenendo conto della deflessione della sbarretta: essi valgono rispettivamente $(L/2)\cos\phi$ e $L\cos\phi$. Da semplici leggi trigonometriche si ha $\cos\phi = (1-\sin^2\phi)^{1/2} = (1-10^{-2})^{1/2} \sim 1$ (la differenza è nella terza cifra decimale), cioè la deflessione della sbarretta è così piccola che la sbarretta si può ancora considerare con il suo asse in direzione orizzontale senza compiere un errore rilevante, vista la accuratezza con cui sono dati i valori del problema (con due cifre significative!). Dunque il momento complessivo della forza peso vale all’incirca $MgL/2+mgL = (M/2+m)gL = 2MgL/3$. Analogamente potremo ritenere che la molla abbia il suo asse in direzione quasi verticale, e che quindi il suo momento valga approssimativamente $(k/2)\Delta' L/2$, con un verso opposto rispetto alla forza peso (la molla è sempre allungata, anche in questa condizione). Quindi il momento complessivo sarà $\tau_{TOT}=2MgL/3-(k/4)L\Delta'$ e tenderà a far ruotare in senso orario (rispetto alla figura) il sistema. Mettendo tutto insieme si determina la soluzione]

3. Una certa quantità (incognita) di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza di trasformazioni **reversibili**: compressione isoterma A → B, compressione isobara B → C, espansione isoterma C → D, compressione adiabatica D → A. I dati noti del ciclo sono: V_A = 9.00 litri, $V_B = 2V_A/3$ e $V_C = V_B/4$. Si sa inoltre che l’espansione isoterma C → D avviene mantenendo il gas a contatto termico con un termostato costituito da un’enorme massa di acqua e ghiaccio fondente mescolati ed in equilibrio termico fra loro. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

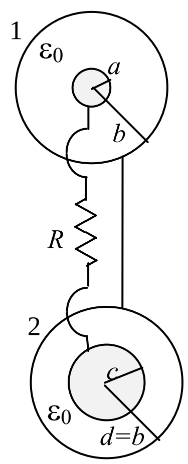
a) Quanto vale il volume V_D occupato dal gas nel punto D del ciclo?

V_D = …………………………………… = …….. m^3 $V_A(T_A/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(T_B/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A((T_DV_B/V_C)/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(V_B/V_C)^{3/2} = 8V_A$ = 7.20x10^{-2} m^3 [si usano le leggi di isobara e adiabatica reversibile, notando che $T_A = T_B$ e $T_C = T_D$ e che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V = 5/3$]

b) Sapendo che nell’espansione isoterma C → D viene solidificata una massa m = 100 g di acqua (calore latente di fusione del ghiaccio λ_F = 3.33x10^5 J/kg), quanto vale il numero di moli n del gas Elio che partecipa alla trasformazione? [Può farvi comodo sapere che $\ln(48) \sim 3.87$]

n = …………………………………… ~ …….. moli $m\lambda_F/(RT_F\ln(V_D/V_C)) \sim 3.79$ moli [il calore ceduto dal gas nell’espansione serve per far passare alla fase solida la massa m d’acqua, operazione che richiede una quantità $Q = m\lambda_F$ di calore; si noti che la trasformazione avviene, come stabilito nel testo, mantenendo il gas alla temperatura di fusione dell’acqua T_F = 273 K]

4. Un condensatore sferico (che denomineremo 1), costituito da una sfera conduttrice di raggio a = 5.0 mm concentrica a un guscio sferico sottile conduttore di raggio $b = 4a$ = 20 mm, è inizialmente (fase non descritta in figura!) collegato a un generatore di differenza di potenziale ideale V_0 = 1.0 kV. A un dato istante, il generatore viene rimosso istantaneamente e il condensatore viene collegato a un altro condensatore sferico, stavolta di raggio interno $c = 2a$ = 10 mm e raggio esterno $d = b = 4a$ = 20 mm, attraverso un resistore di resistenza R = 1.0 Mohm. Questo secondo condensatore (che denomineremo 2) è inizialmente scarico. Il collegamento avviene come in figura: in sostanza, le due armature “esterne” (i gusci sferici sottili) sono collegati tra loro da un filo di resistenza trascurabile, mentre le due armature interne sono collegate attraverso la resistenza. [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto; si suppone che la presenza dei fili e del resistore non modifichi la “simmetria” sferica dei due condensatori]



a) Quanto vale la carica Q_{01} che è inizialmente accumulata nel condensatore 1? [Supponete che esso abbia raggiunto condizioni di equilibrio]

Q_{01} = …………………………….. = ………. C $4\pi\varepsilon_0V_0/(1/a-1/b)$ = 0.74x10^{-9} C [secondo il testo, la carica si accumula sul condensatore a causa del generatore V_0. Dunque deve essere $Q_{01} = C_1V_0$, con C_1 capacità del condensatore 1. Tale capacità può essere ricavata, se non la si ricorda, applicando il teorema di Gauss a una sfera di raggio $a<r<b$ per determinare l’andamento funzionale dell’intensità di campo elettrico, $E(r) = Q_{01}/(4\pi\varepsilon_0 r)$, e quindi imponendo $V_0 = \Delta V_{ab} = -\int_a^b E(r)dr = (Q_{01}/(4\pi\varepsilon_0))(1/a-1/b)$ (per i segni, supponiamo che il generatore abbia il polo positivo collegato

all'armatura "interna"), da cui $C_1 = Q_{01}/V_0 = 4\pi\varepsilon_0(1/a-1/b)$ (se volete, questo è il modo più verboso di giungere alla soluzione). Da qui la risposta]

b) Quanto valgono le cariche elettriche Q_1 e Q_2 che, dopo un tempo molto lungo (tendenzialmente infinito) da quando i due condensatori sono stati collegati con la resistenza, si trovano accumulate sui due condensatori 1 e 2? [Supponete che dopo tale tempo lunghissimo le condizioni siano di equilibrio]

Q_1 = …………………………….. = ... C $Q_{01}(cb-ca)/(ab+bc-2ac) = 3Q_{01}/4 = 0.55\times10^{-9}$ C [se si attende un tempo sufficientemente lungo, la carica che si inizialmente si trovava sul condensatore 1 tenderà a trasferirsi in parte sul condensatore 2. Quando verranno raggiunte nuove condizioni di equilibrio, non ci sarà differenza di potenziale tra i due condensatori (ovvero la differenza di potenziale tra le armature del condensatore 1 sarà uguale a quella tra le armature del condensatore 2). Quindi $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$, ovvero, usando l'espressione della capacità citata prima, $Q_1/(1/a-1/b) = Q_2/(1/c-1/d)$, ovvero $Q_1ab/(b-a) = Q_2cd/(d-c)$, ovvero $Q_1a/(b-a)=Q_2c/(b-c)$, dove abbiamo notato che $d = b$. Inoltre, poiché la carica complessiva in gioco si conserva, deve essere $Q_1+Q_2 = Q_{01}$. Si ha quindi un sistema di due equazioni e due incognite che, risolto per Q_1, fornisce la risposta]

Q_2 = …………………………….. = ... C $Q_{01}-Q_1 = Q_{01}(ab-ca)/(ab+bc-2ac) = 0.18\times10^{-9}$ C [vedi sopra]

c) Quanto vale il tempo caratteristico τ del processo di ridistribuzione delle cariche elettriche tra i condensatori? [Forse vi conviene determinare il "circuito equivalente" del sistema …]

τ = …………………………….. = ... s $RC_{TOT} = R\, 4\pi\varepsilon_0\, abc/(ab+bc-2ac) = 55\times10^{-6}$ s [come è facile rendersi conto, il "circuito equivalente" è semplicemente dato dalla **serie** dei due condensatori che è a sua volta in serie con il resistore. Dunque il tempo caratteristico, che è quello di scarica (parziale!) del condensatore 1 sul 2 attraverso la resistenza, è $\tau = RC_{TOT}$, con C_{TOT} capacità della serie dei due condensatori, cioè $C_{TOT} = C_1C_2/(C_1+C_2)$. Sostituendo le espressioni date nelle risposte precedenti e semplificando in modo opportuno si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 16/2/2012 Firma: